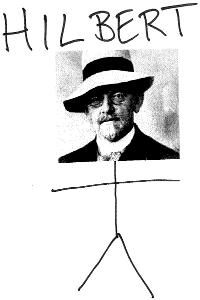
Irrationelle Mælkebøtter

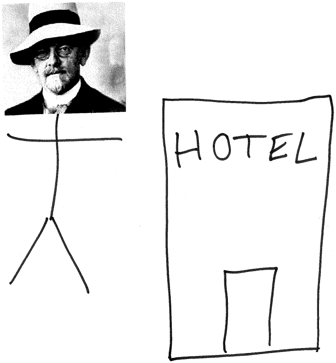
Jamie Gabe

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

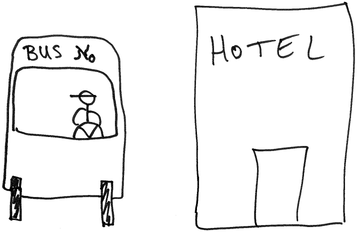
Hilbert's Hotel



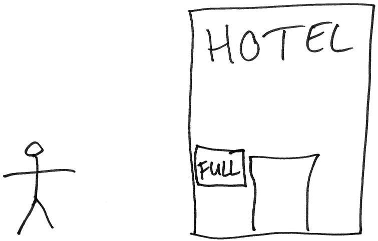
Hilbert's Hotel



Hilbert's Hotel

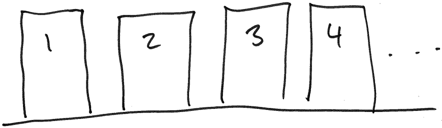


Hilbert's Hotel



Hilbert's Hotel

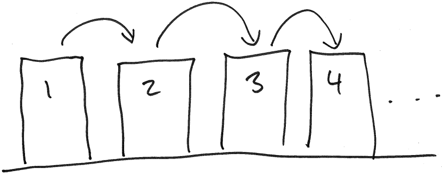
(INSIDE THE HOTEL)



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

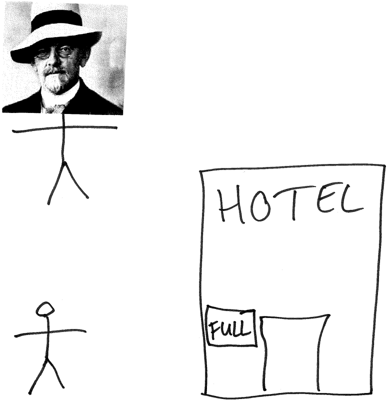
Hilbert's Hotel

(INSIDE THE HOTEL)

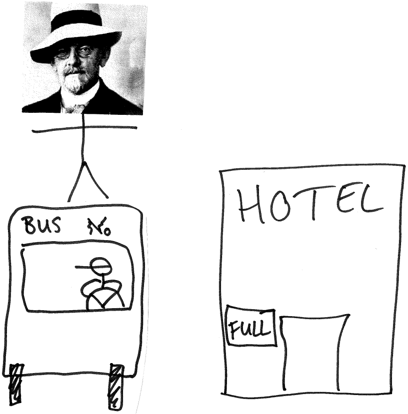


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Hilbert's Hotel

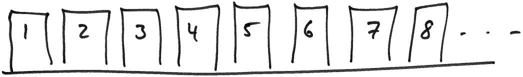


Hilbert's Hotel



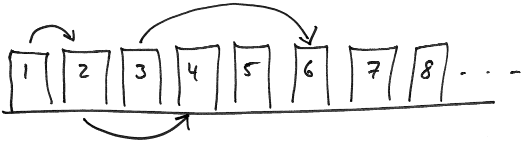
Hilbert's Hotel

(INSIDE THE HOTEL)



Hilbert's Hotel

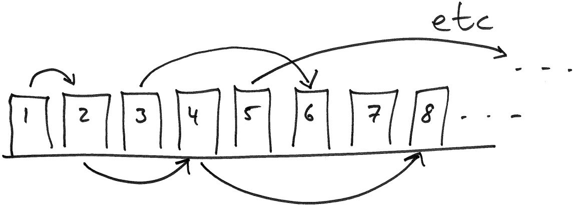
(INSIDE THE HOTEL)



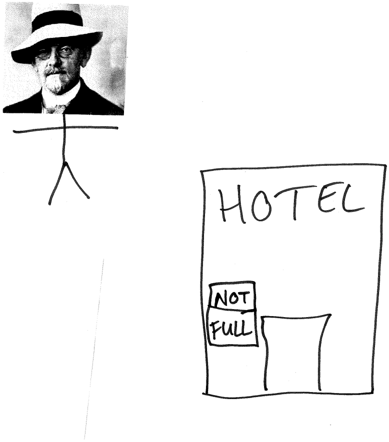
Hilbert's Hotel

(INSIDE THE HOTEL)

$n \mapsto 2 \cdot n$



Hilbert's Hotel



Rationelle Mælkebøtter

Rationelle tal: $\frac{n}{m}$ hvor $n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ er et heltal og $m = 1, 2, 3, \ldots$ er et naturligt tal.

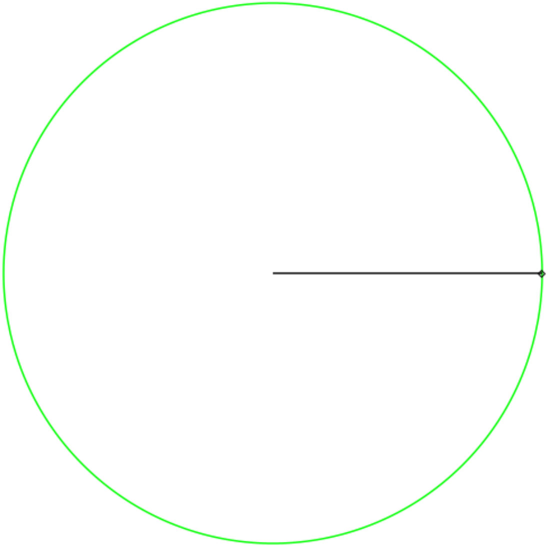
Alle rationelle tal mellem 0 og 1 kan skrives som $\frac{n}{m}$ hvor $n < m$ er naturlige tal.

Vi kan konstruere en 2-dimensionel mælkebøtte for ethvert rationelt tal mellem 0 og 1.

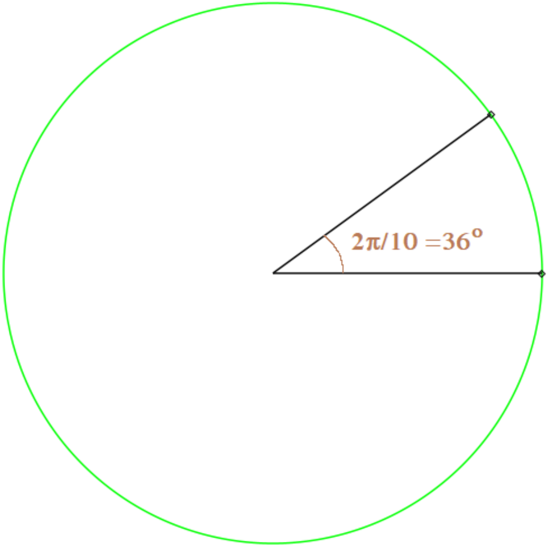
Lad os prøve med $1/10$.

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

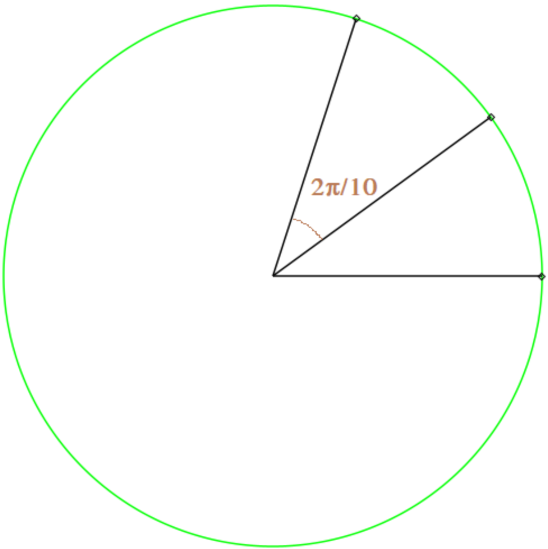
Rationel Mælkebøtte: 1/10



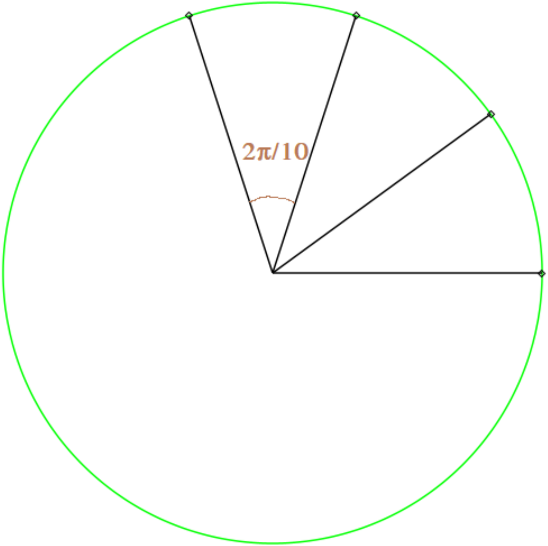
Rational Mælkebøtte: 1/10



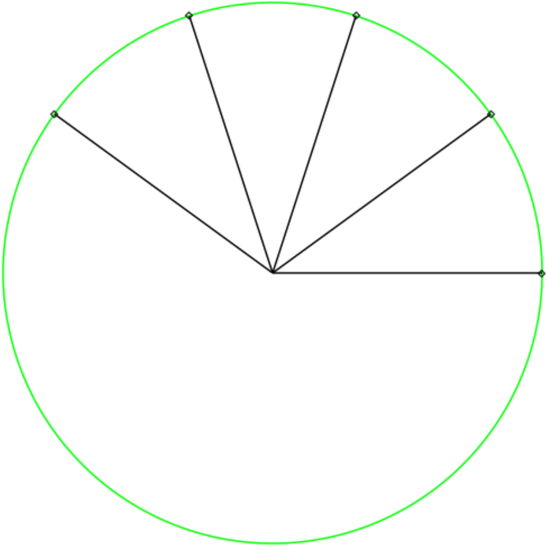
Rationel Mælkebøtte: 1/10



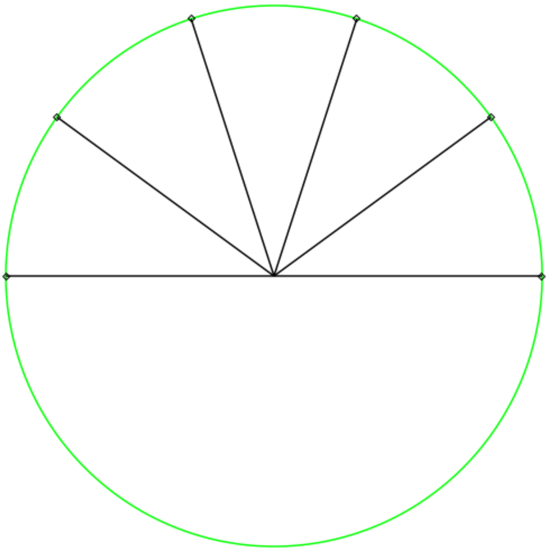
Rationel Mælkebøtte: 1/10



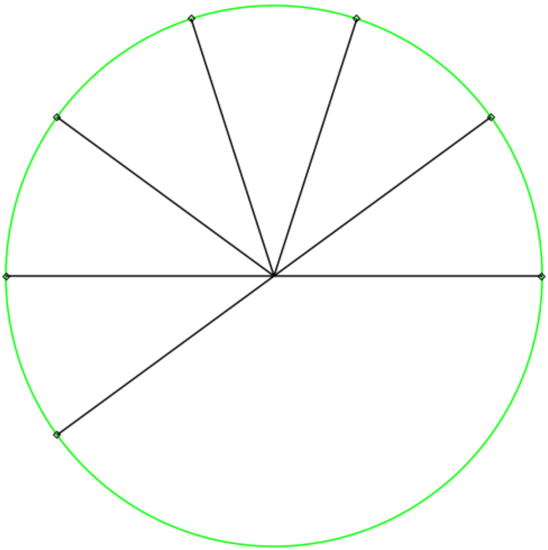
Rationel Mælkebøtte: 1/10



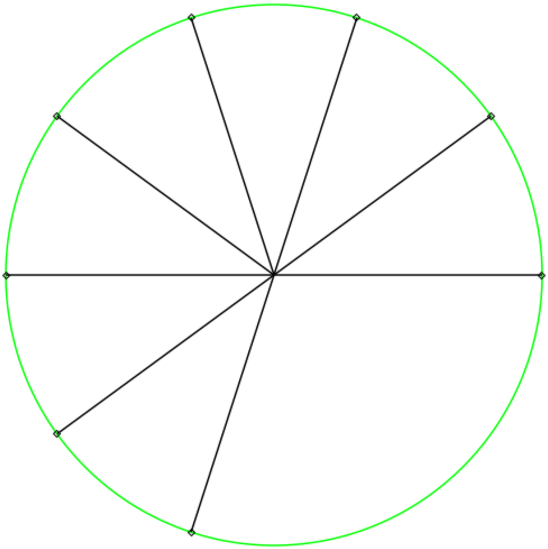
Rationel Mælkebøtte: 1/10



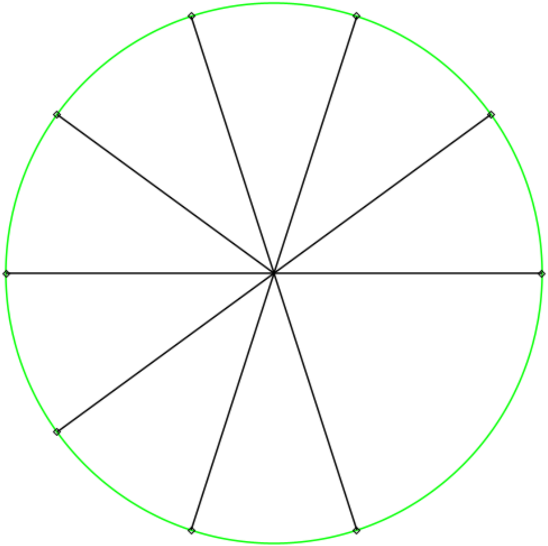
Rationel Mælkebøtte: 1/10



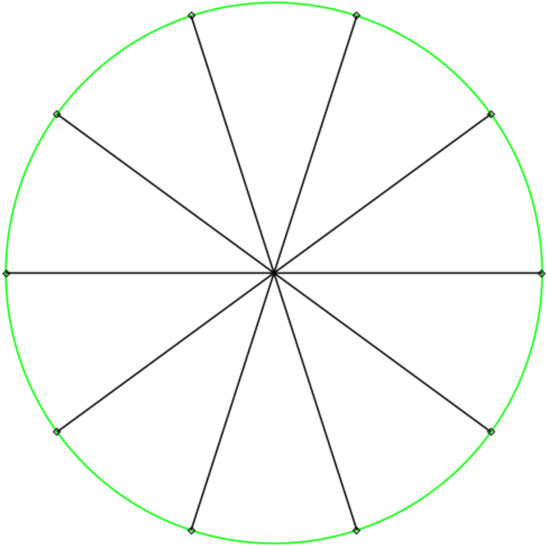
Rationel Mælkebøtte: 1/10



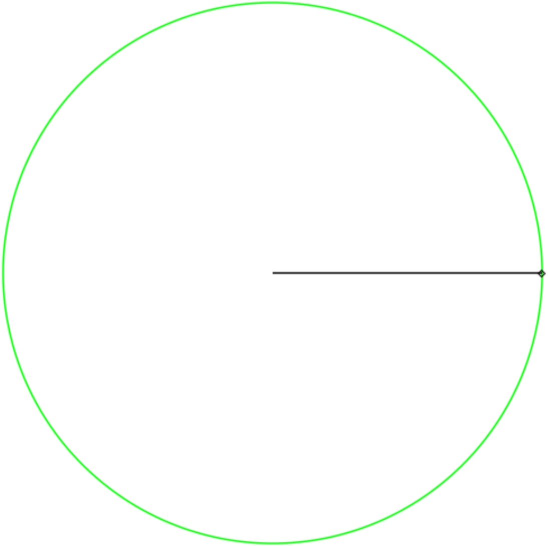
Rationel Mælkebøtte: 1/10



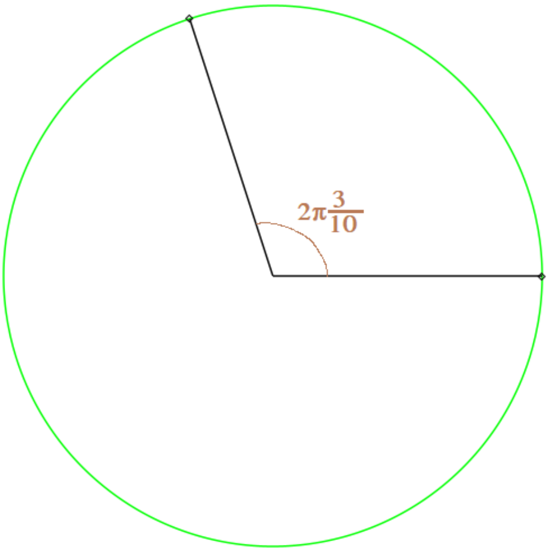
Rational Mælkebøtte: 1/10



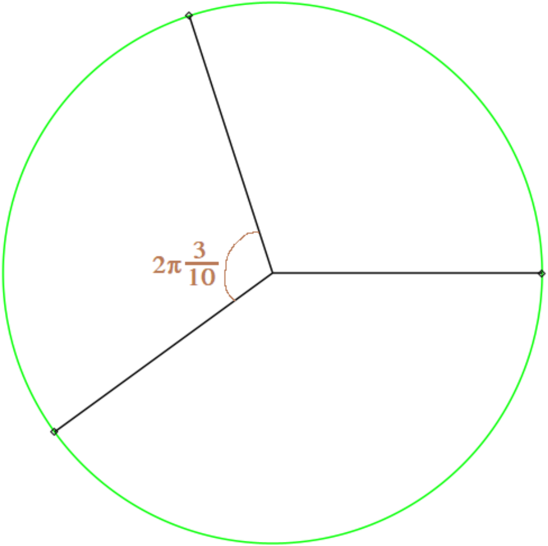
Rationel Mælkebøtte: 3/10



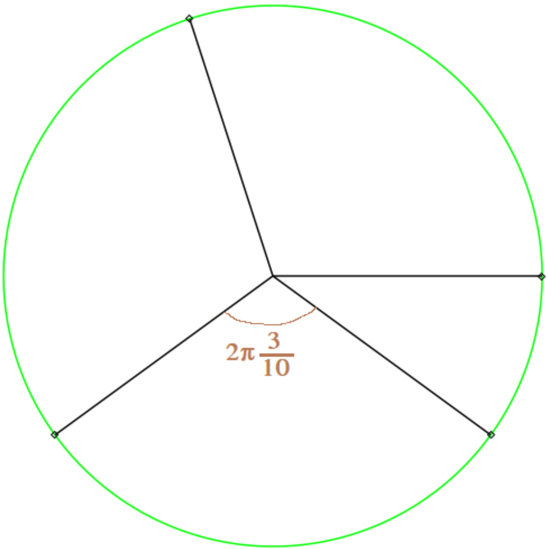
Rational Mælkebøtte: 3/10



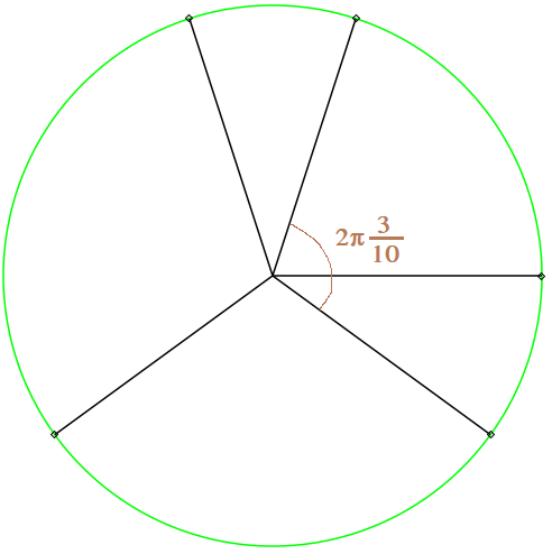
Rationel Mælkebøtte: 3/10



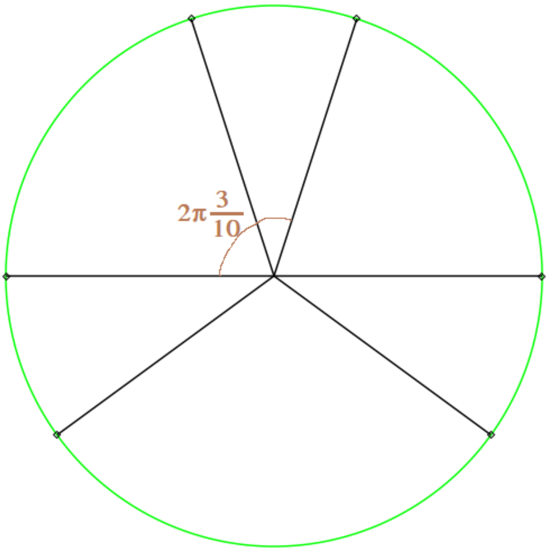
Rational Mælkebøtte: 3/10



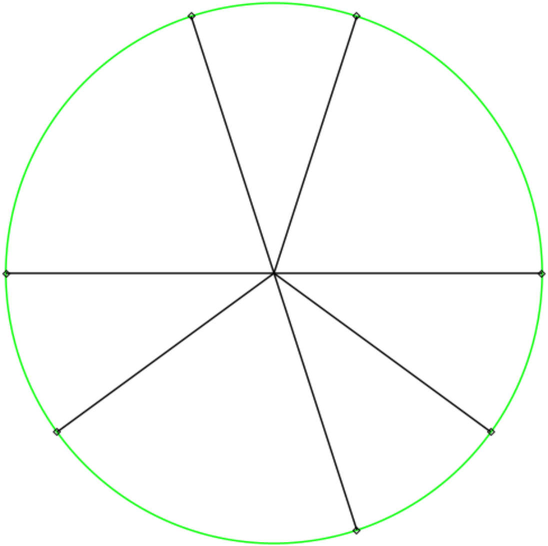
Rationel Mælkebøtte: 3/10



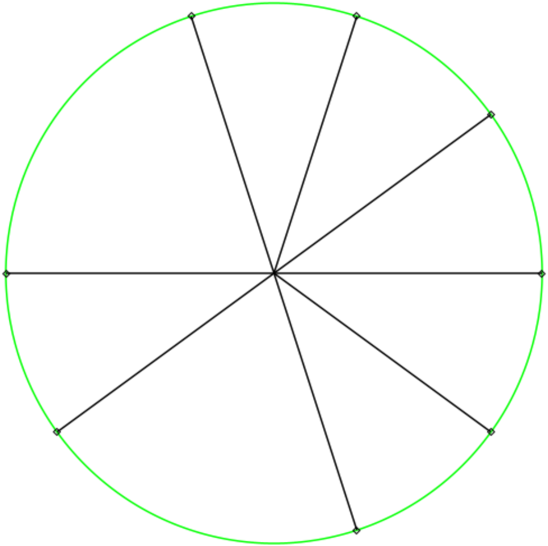
Rationel Mælkebøtte: 3/10



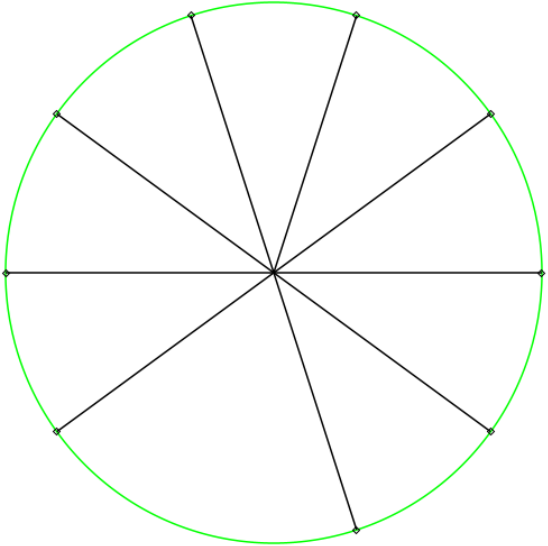
Rationel Mælkebøtte: 3/10



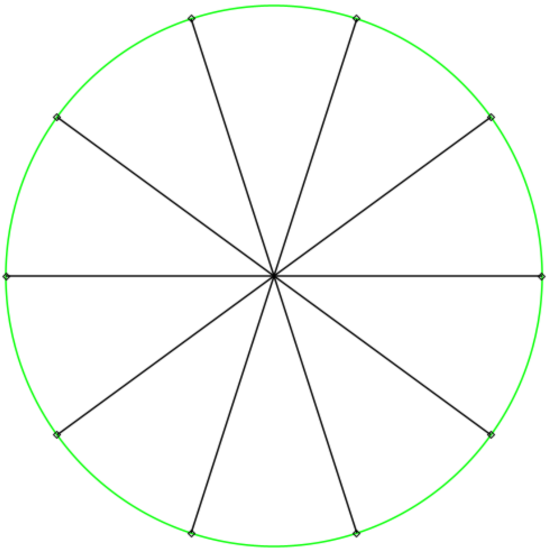
Rationel Mælkebøtte: 3/10



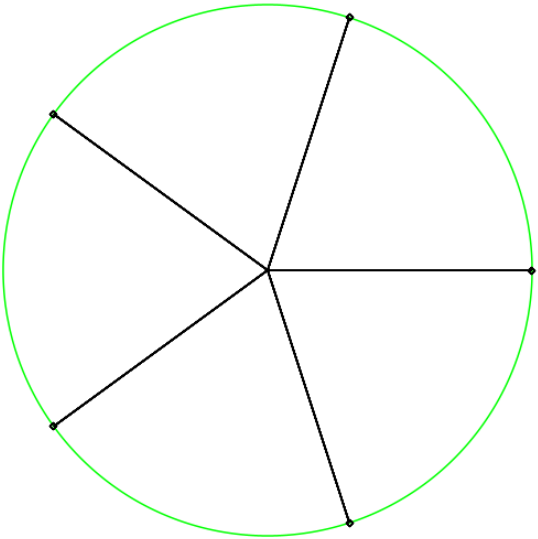
Rationel Mælkebøtte: 3/10



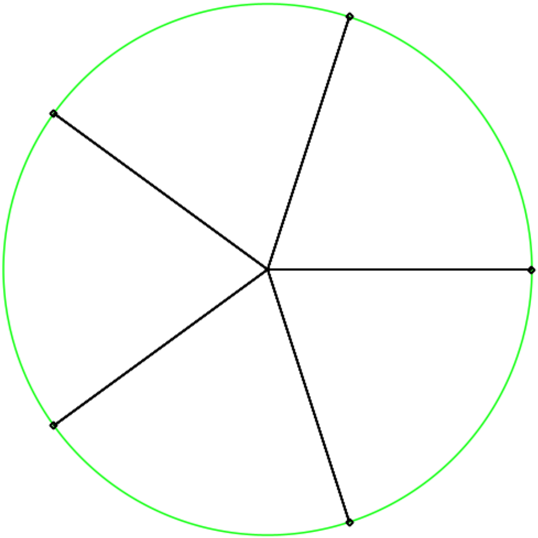
Rationel Mælkebøtte: 3/10



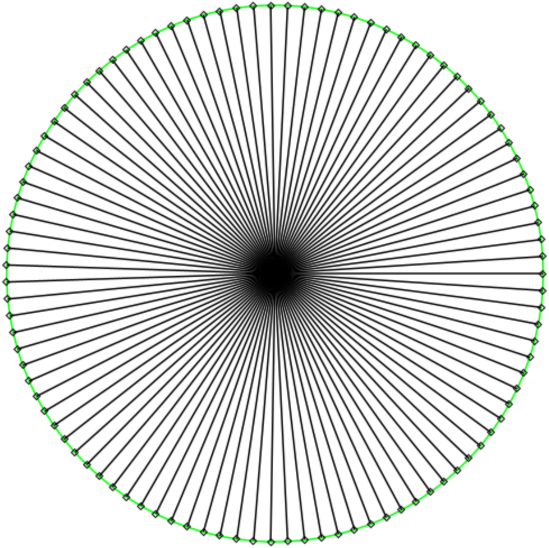
Rational Mælkebøtte: 2/10



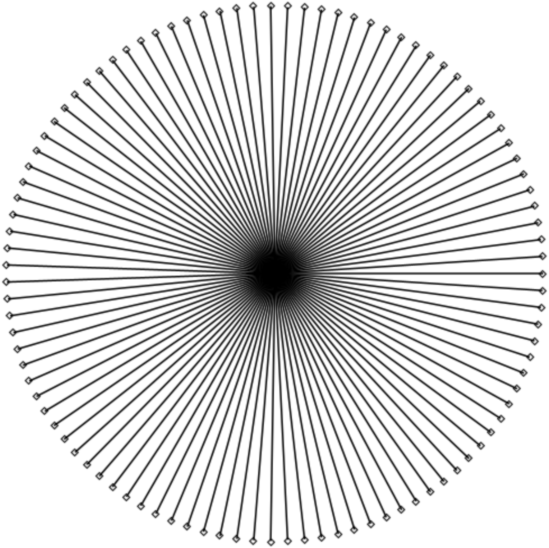
Rationel Mælkebøtte: $2/10 = 1/5$



Rationel Mælkebøtte: 1/99

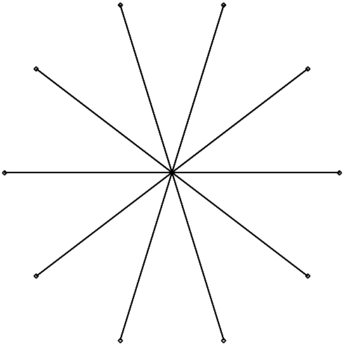


Rationel Mælkebøtte: 1/99



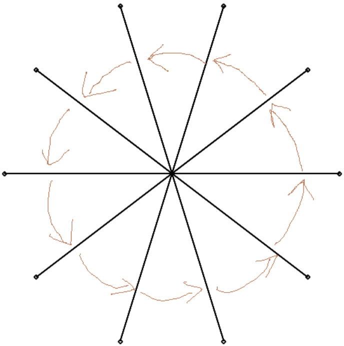
Rationel Mælkebøtte: 1/10

Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{1}{10} = 36^\circ$?



Rationel Mælkebøtte: 1/10

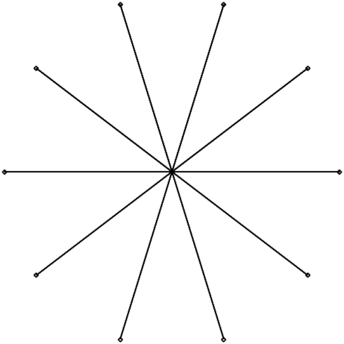
Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{1}{10} = 36^\circ$?



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Rationel Mælkebøtte: 3/10

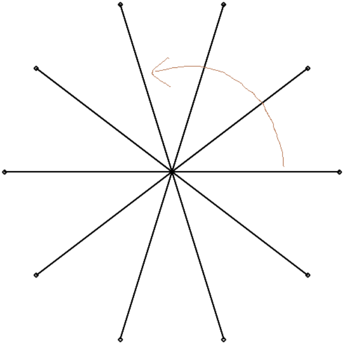
Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Rationel Mælkebøtte: 3/10

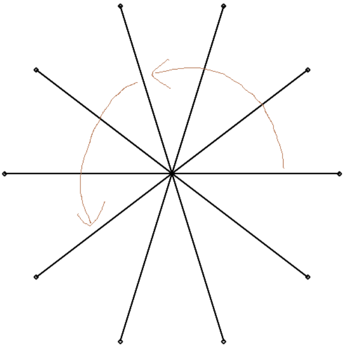
Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

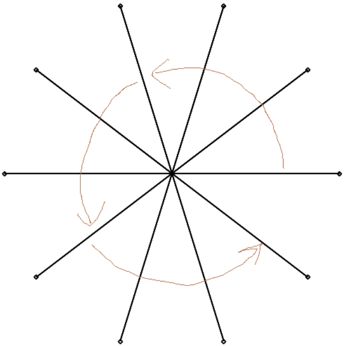
Rationel Mælkebøtte: 3/10

Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



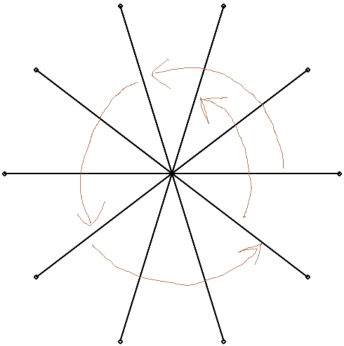
Rationel Mælkebøtte: 3/10

Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



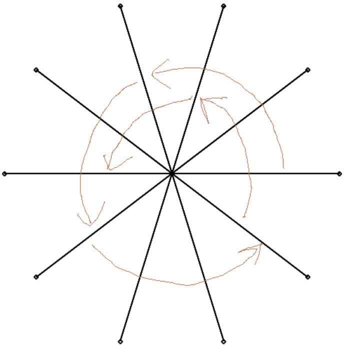
Rationel Mælkebøtte: 3/10

Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



Rational Mælkebøtte: 3/10

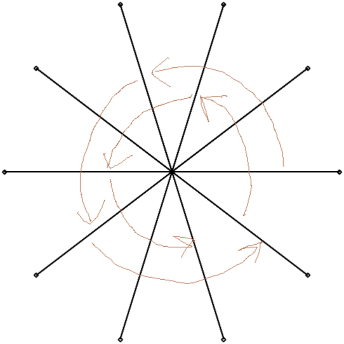
Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Rationel Mælkebøtte: 3/10

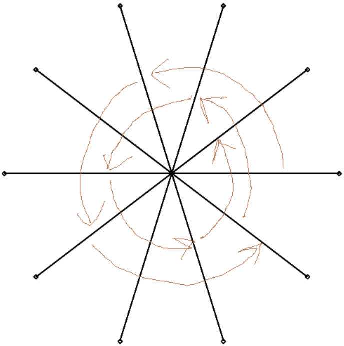
Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Rationel Mælkebøtte: 3/10

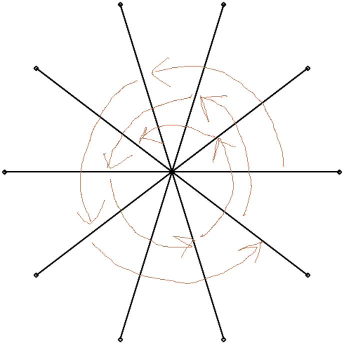
Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

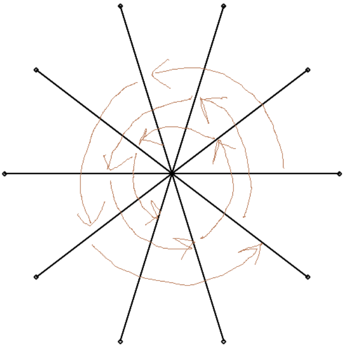
Rationel Mælkebøtte: 3/10

Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



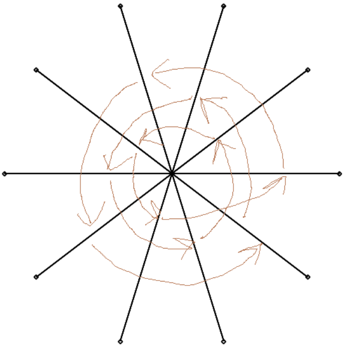
Rationel Mælkebøtte: 3/10

Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



Rationel Mælkebøtte: 3/10

Hvad sker der hvis vi roterer (mod uret) denne rationelle mælkebøtte med $2\pi \cdot \frac{3}{10} = 108^\circ$?



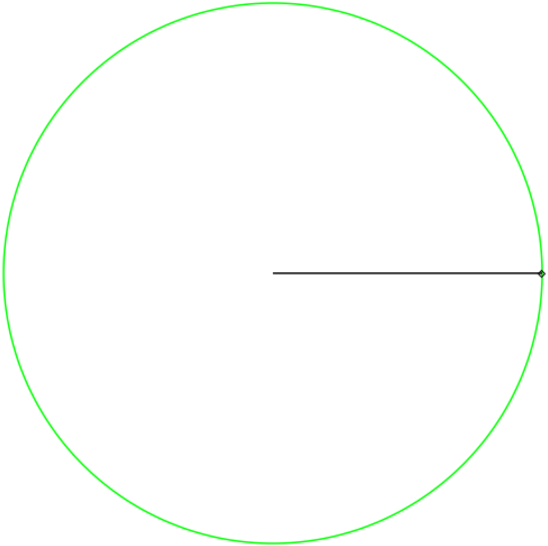
Strukturen af rationelle mælkebøtter

Lad $n < m$ være naturlige tal således at $\frac{n}{m}$ er en uforkortelig brøk.

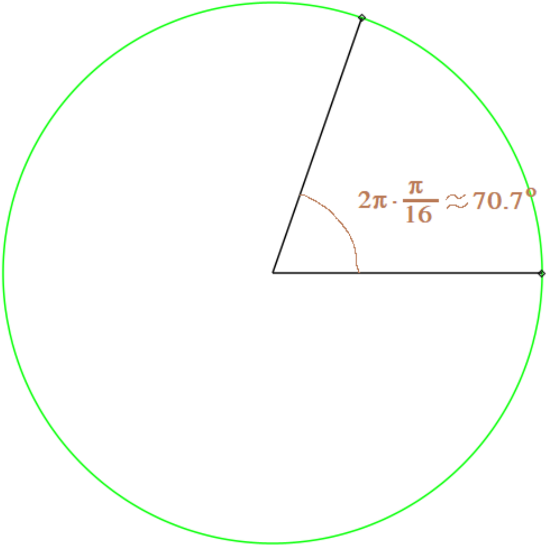
Den rationelle mælkebøtte med parameter $\frac{n}{m}$ har m blade, og når bladende placeres går man n gange rundt.

Hvis man rotérer mælkebøtten med $2\pi\frac{n}{m}$ (radianer, altså $360^\circ \cdot \frac{n}{m}$) så opnår man en identisk mælkebøtte til den man startede med.

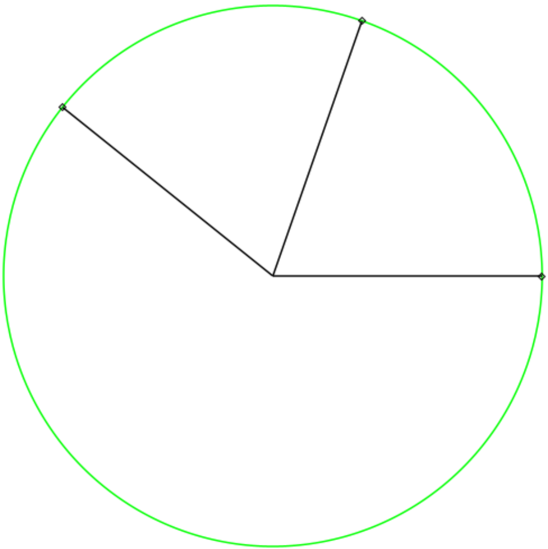
Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

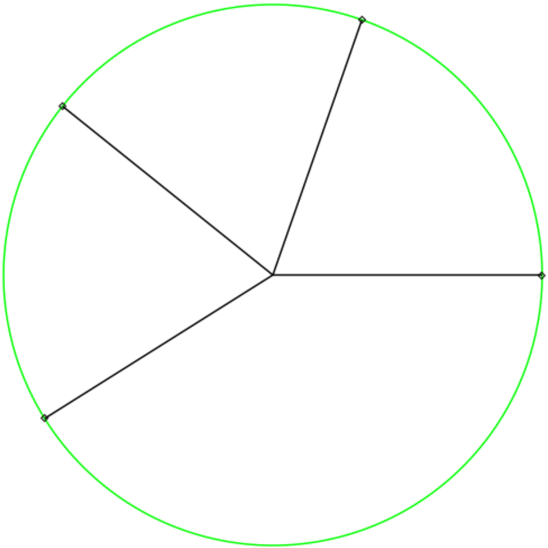


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

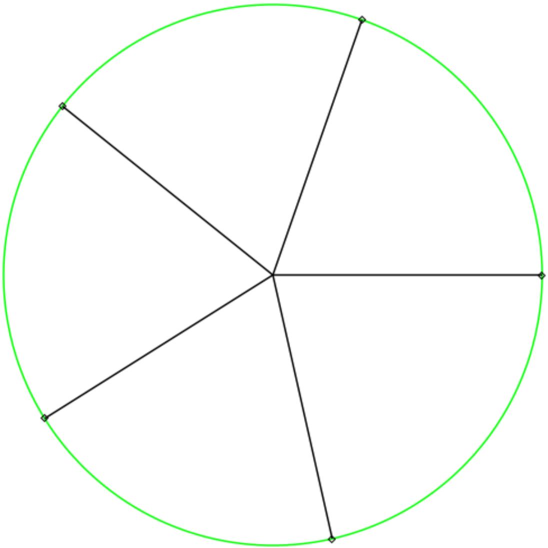


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

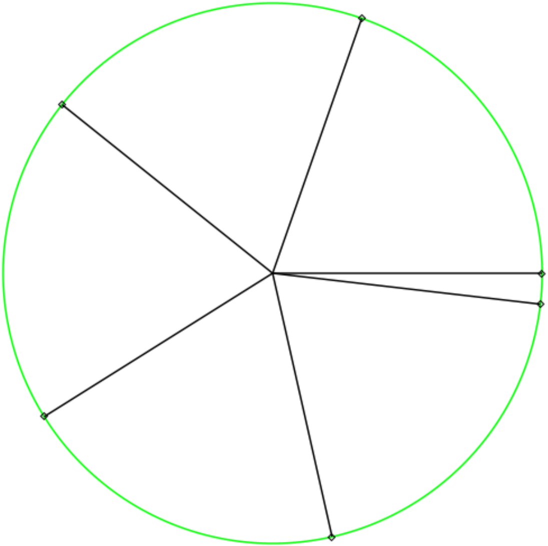
Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$



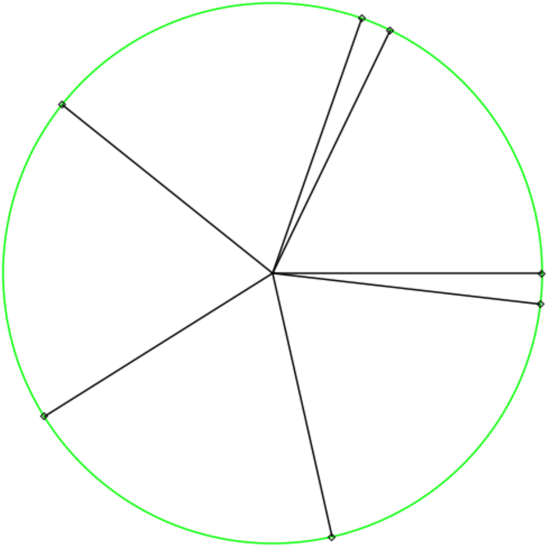
Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

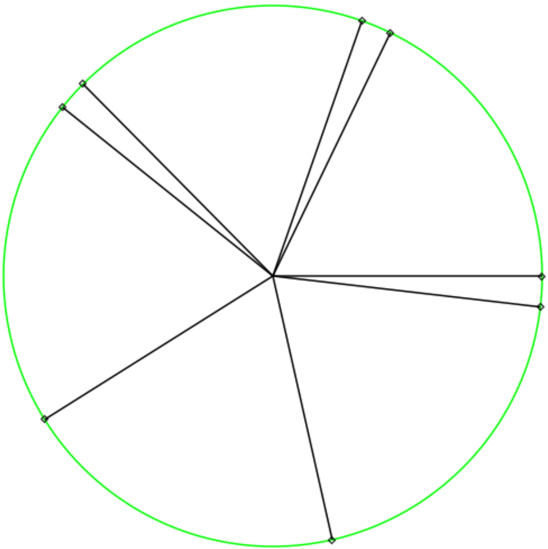


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



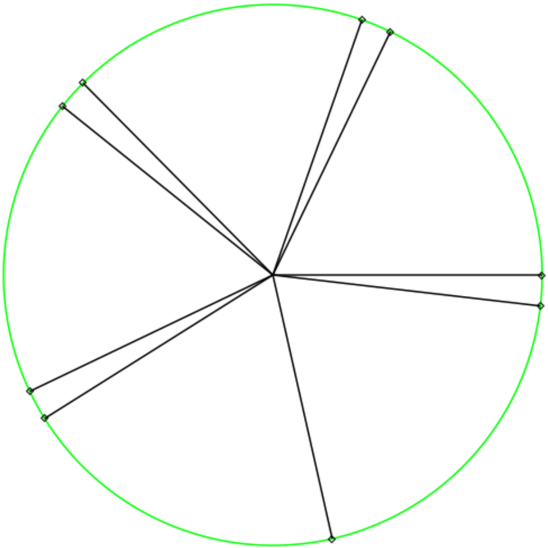
SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

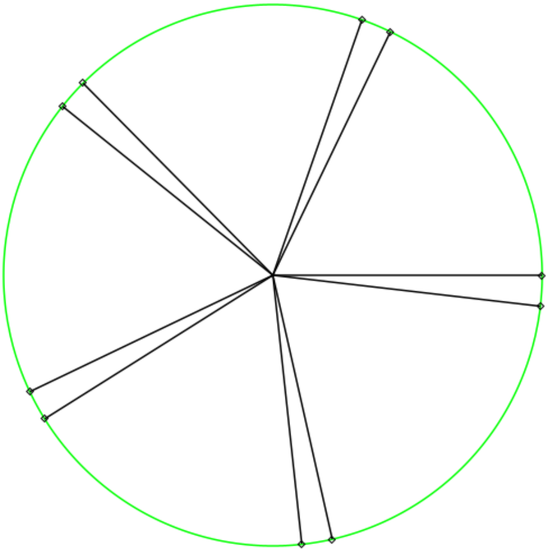


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

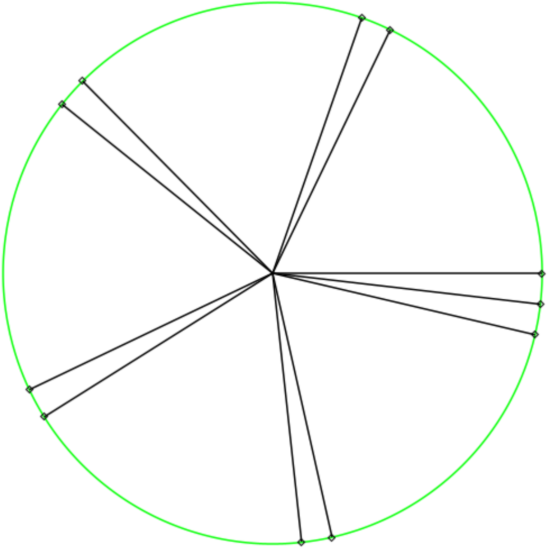


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



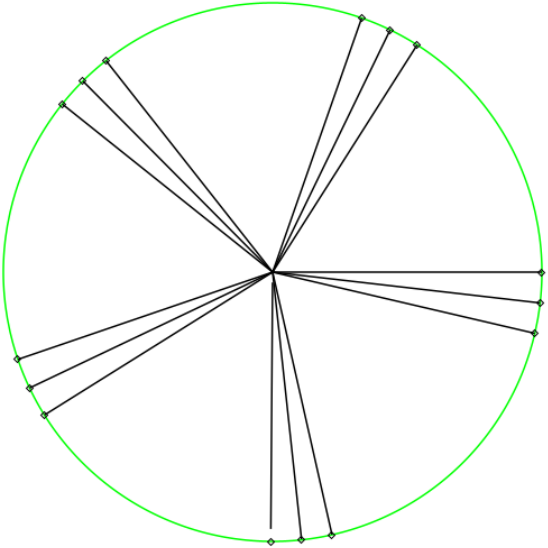
SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$

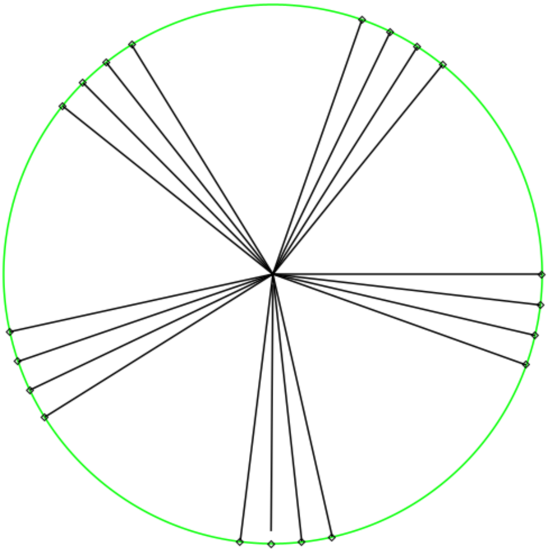


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

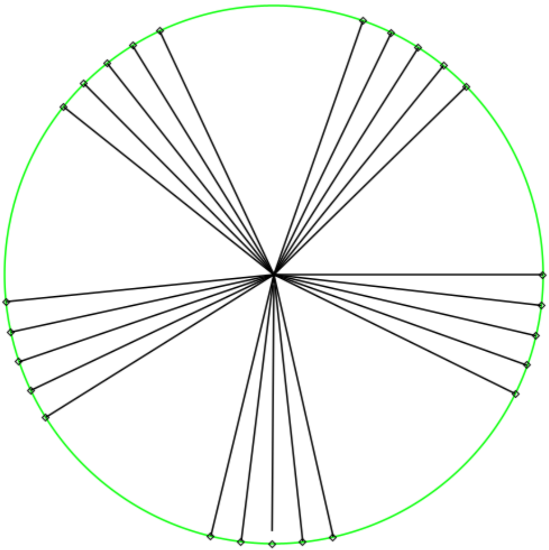


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$

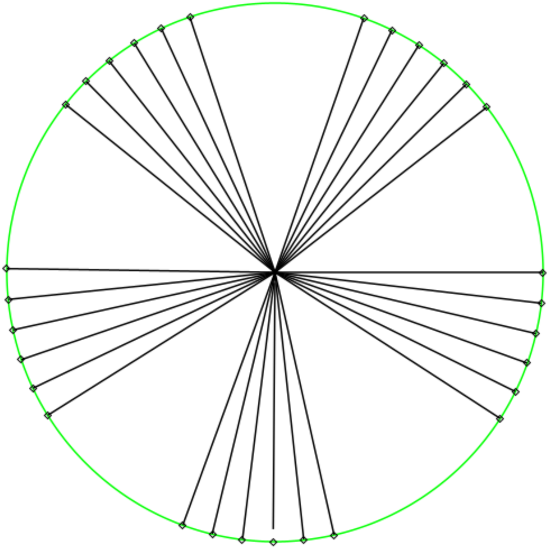


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

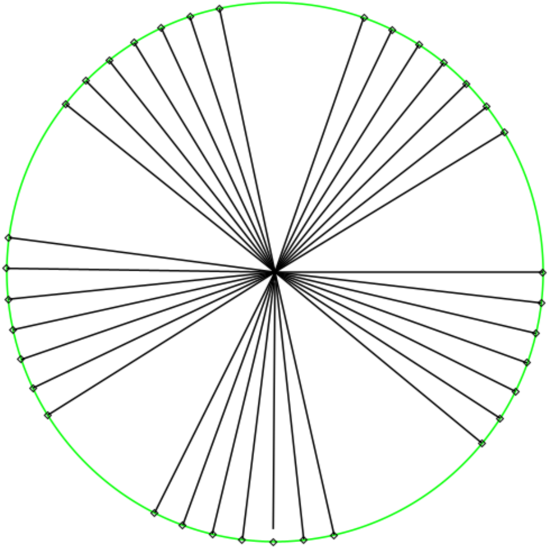
Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

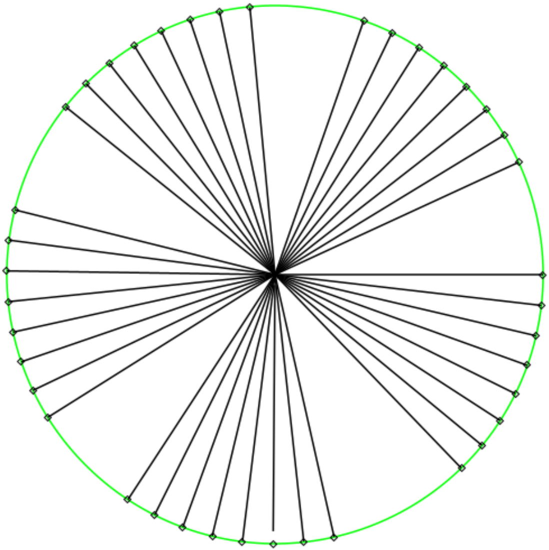


Irrational Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

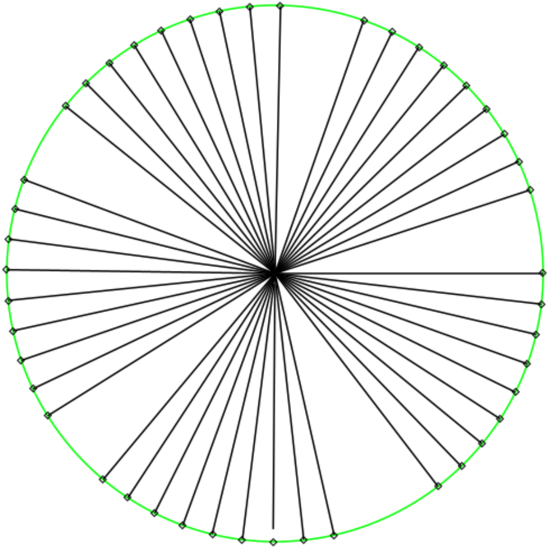


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$

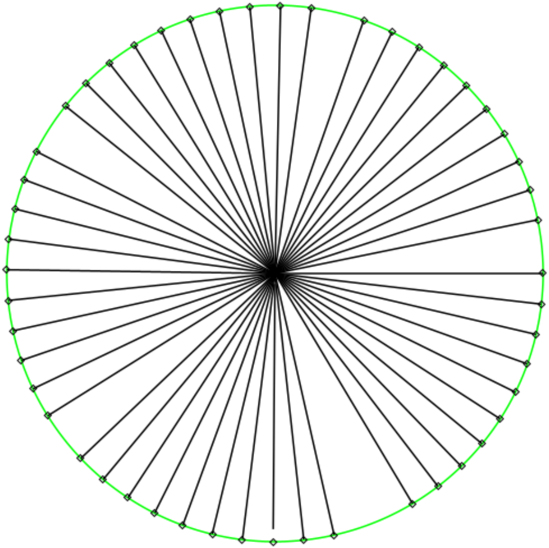


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$

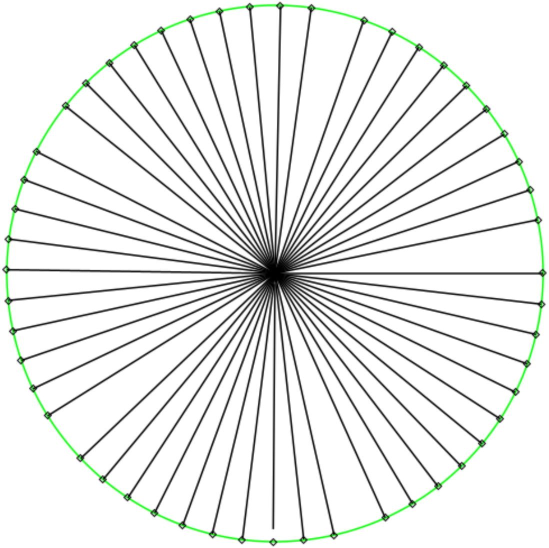


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

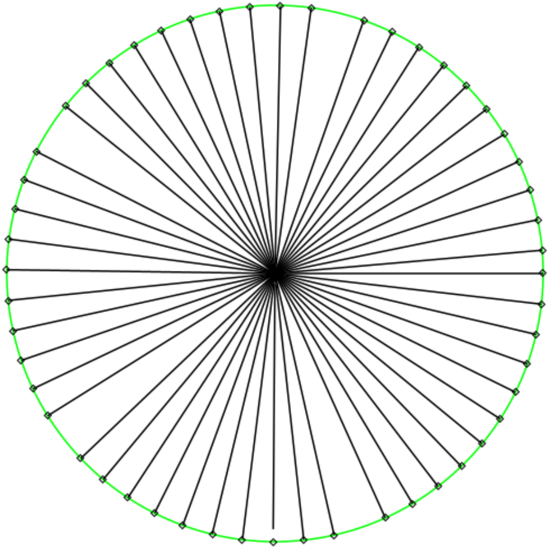


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

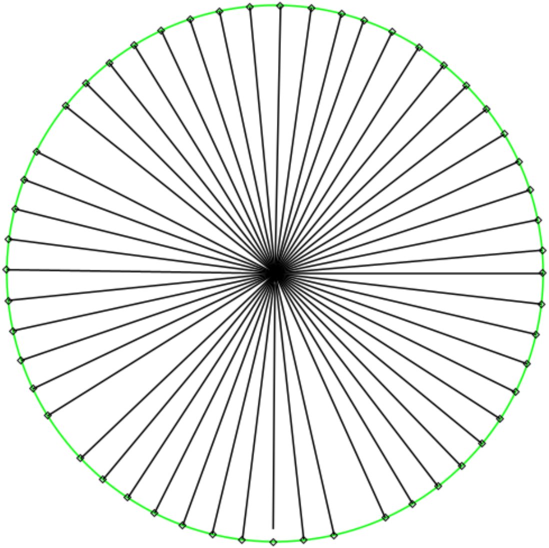


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

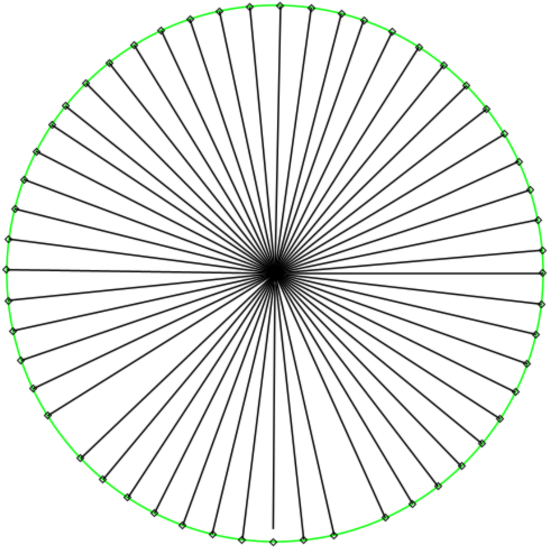


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

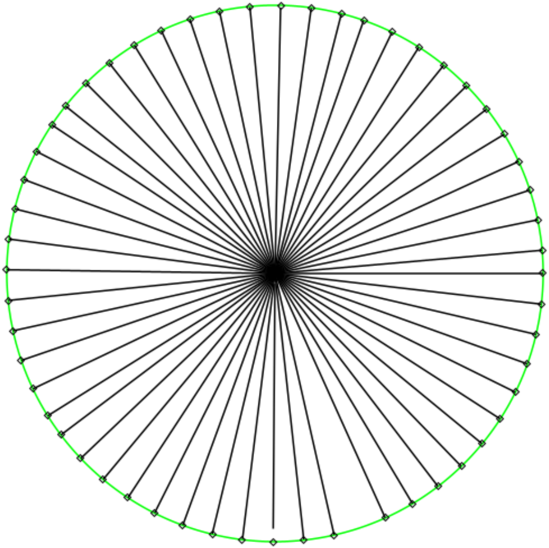


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$

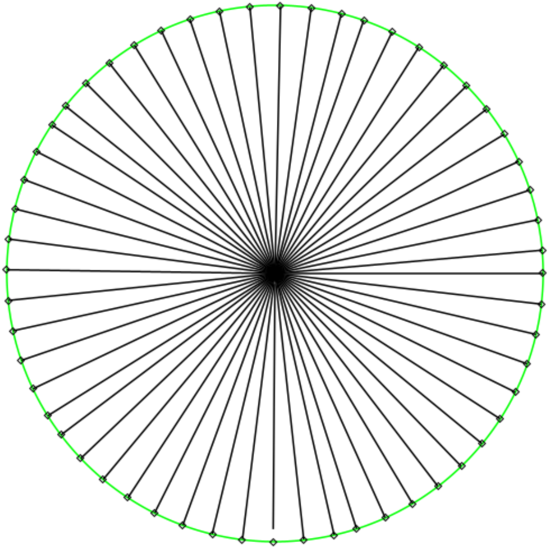


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

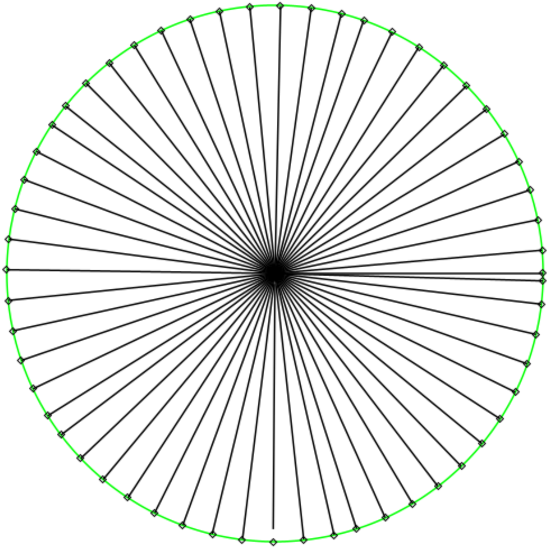


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

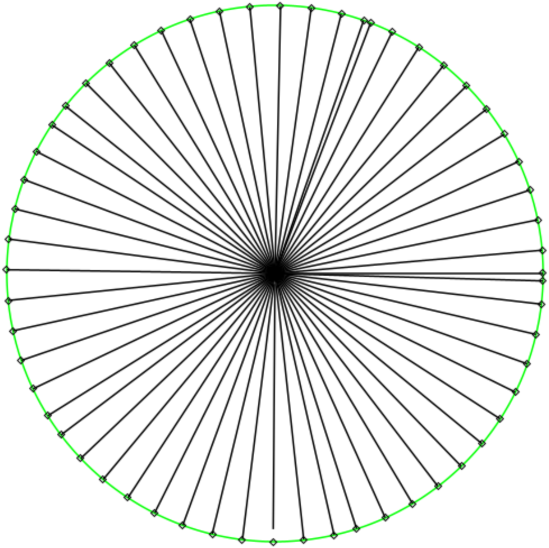


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$



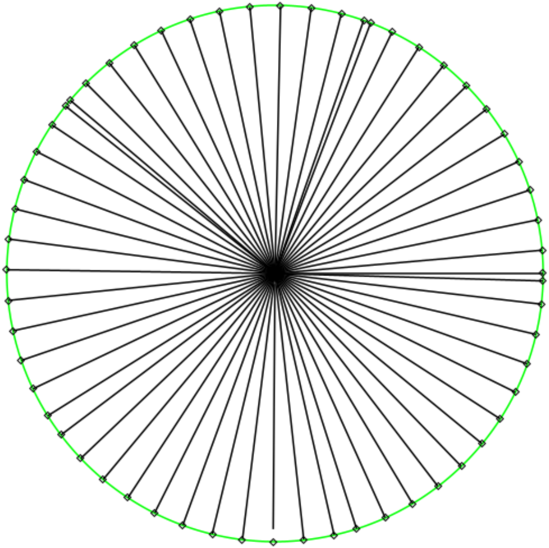
SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$



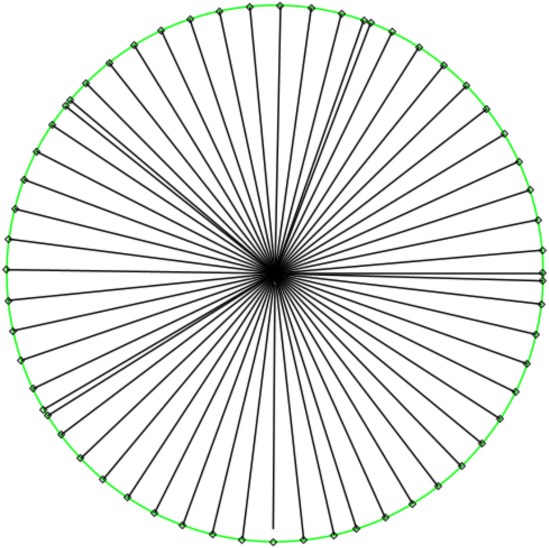
SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$



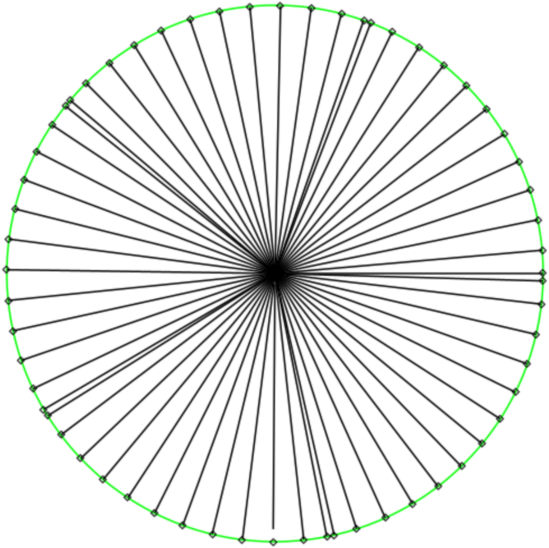
SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$

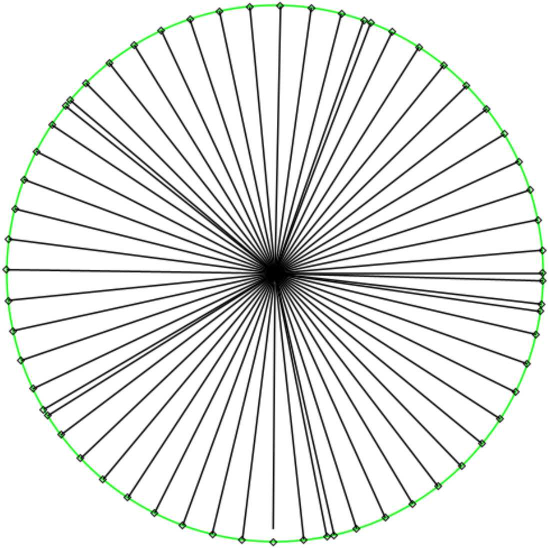


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

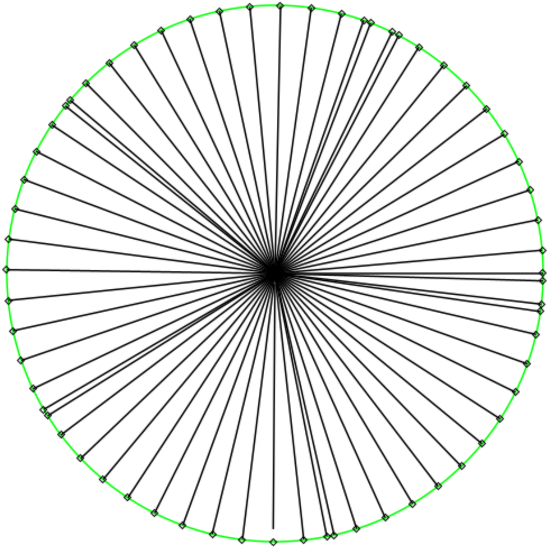
Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349\ldots$

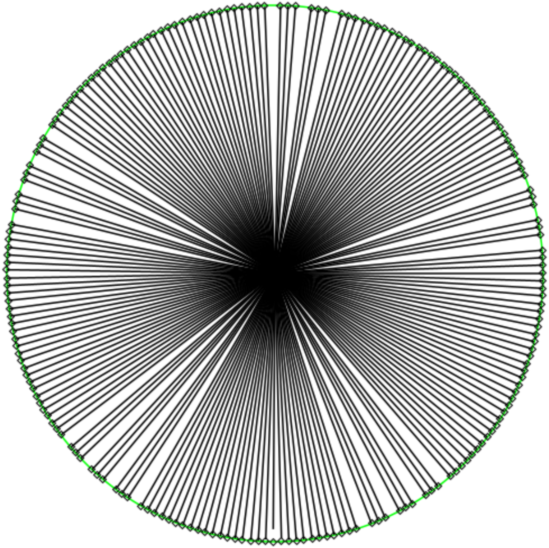


Irrational Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

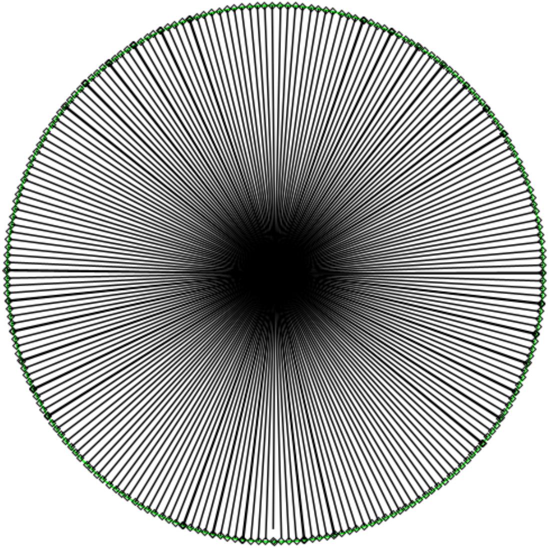


SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

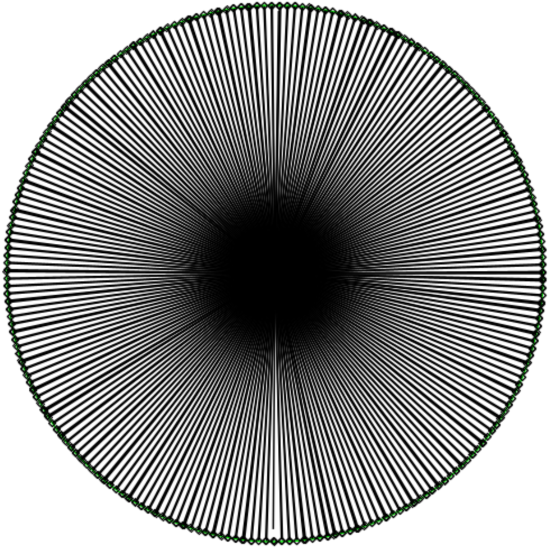
Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

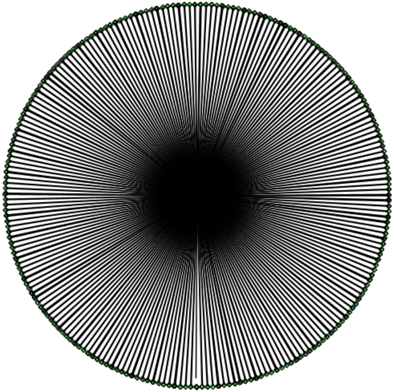


Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$



Irrationel Mælkebøtte: $\pi/16 \approx 0.196349...$

Hvad sker der hvis vi rotérer denne mælkebøtte mod uret med $2\pi \cdot (\pi/16)$ radianer?



SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Strukturen af irrationelle mælkebøtter

Lad $0 < r < 1$ være et irrationelt tal.

Den irrationelle mælkebøtte med parameter r har ∞ mange blade, og når bladende placeres går man ∞ mange gange rundt.

Hvis man rotérer mælkebøtten mod uret med $2\pi \cdot r$ radianer, så opnår man en mælkebøtte som er *næsten* identisk med den man startede med, men den mangler ét blad!

Rotationer i 2D

Rotationer i $\mathbb{R}^2$ omkring $(0,0)$ mod uret med vinkel $0 \leq v \leq 2\pi$ (i radianer) kan beskrives meget konkret:

et punkt (x, y) bliver roteret over i punktet

$$(\cos(v)x - sin(v)y \ , \ \sin(v)x + \cos(v)y).$$

Eksempel: $v = \pi/2 = 90^\circ$,

$\cos(\pi/2) = 0, \qquad \sin(\pi/2) = 1,$

så ethvert punkt (x, y) roteret over i $(-y, x)$.

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Rotationer i 2D

Rotationer i $\mathbb{R}^2$ omkring $(0,0)$ mod uret med vinkel $0 \leq v \leq 2\pi$ (i radianer) kan beskrives meget konkret:

et punkt (x, y) bliver roteret over i punktet

$$(\cos(v)x - sin(v)y \ , \ \sin(v)x + \cos(v)y).$$

Eksempel: $v = \arccos(3/5) \approx 53.13^\circ$

$\cos(v) = 3/5, \qquad \sin(v) = 4/5,$

så ethvert punkt (x, y) bliver roteret over i

$$(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \ , \ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y).$$

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Rotationer i 3D

Rotationer i $\mathbb{R}^3$ er mere komplicerede.

I stedet for at rotére omkring $(0, 0, 0)$ kan vi i stedet rotére omkring en akse.

Opgave 1: Tag punktet $(1, 0, 0)$. Rotér det først $\pi/2 = 90^\circ$ omkring y-aksen, og rotér det derefter $\pi/2 = 90^\circ$ omkring z-aksen. Hvilket punkt får man?

Opgave 2: Tag punktet $(1, 0, 0)$. Rotér det først $\pi/2 = 90^\circ$ omkring z-aksen, og rotér det derefter $\pi/2 = 90^\circ$ omkring y-aksen. Hvilket punkt får man?

Rotationer i 3D

Rotation omkring x-aksen med vinkel $0 \leq v \leq 2\pi$:
(x, y, z) rotéres over i

$$(x\ ,\ \cos(v)y - \sin(v)z\ , \sin(v)y + \cos(v)z)$$

Rotation omkring y-aksen med vinkel $0 \leq v \leq 2\pi$:
(x, y, z) rotéres over i

$$(\cos(v)x - \sin(v)z\ ,\ y\ ,\ \sin(v)x + \cos(v)z)$$

Rotation omkring z-aksen med vinkel $0 \leq v \leq 2\pi$:
(x, y, z) rotéres over i

$$(\cos(v)x - \sin(v)y\ ,\ \sin(v)x + \cos(v)y\ ,\ z)$$

Rotationer i 3D

Eksempel: $v = \pi/2 = 90^\circ$.

Rotation omkring x-aksen: (x, y, z) rotéres over i

$$(x\ ,\ \ -z\ , y)$$

Rotation omkring y-aksen: (x, y, z) rotéres over i

$$(-z\ ,\ \ y\ ,\ \ x)$$

Rotation omkring z-aksen: (x, y, z) rotéres over i

$$(-y\ ,\ \ x\ ,\ \ z)$$

3D Irrationel Mælkebøtte

Vi bruger vinklen $v = \arccos(3/5)$ radianer ($\approx 53.13°$).

Rotation omkring y-aksen: (x, y, z) rotéres over i

$$\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z\ ,\ \ y\ ,\ \ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z\right)$$

Rotation omkring z-aksen: (x, y, z) rotéres over i

$$\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\ ,\ \ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\ ,\ \ z\right)$$

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

3D Irrationel Mælkebøtte

Vi starter med $p = (1, 0, 0)$.

Rotér p omkring y-aksen: $a = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$.

Rotér p omkring z-aksen: $b = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$.

3D Irrationel Mælkebøtte

$$p = (1,0,0)$$
$$a = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}), \quad b = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0).$$

Rotér a omkring y-aksen: $\quad aa = (-\frac{7}{25}, 0, \frac{24}{25})$

Rotér b omkring y-aksen: $\quad ab = (\frac{9}{25}, \frac{4}{5}, \frac{12}{25})$

Rotér a omkring z-aksen: $\quad ba = (\frac{9}{25}, \frac{12}{25}, \frac{4}{5})$

Rotér b omkring z-aksen: $\quad bb = (-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, 0).$

3D Irrationel Mælkebøtte

$$p = (1,0,0)$$
$$a = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}), \qquad b = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0)$$
$$aa = (-\tfrac{7}{25}, 0, \tfrac{24}{25}), \qquad ab = (\tfrac{9}{25}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{12}{25}),$$
$$ba = (\tfrac{9}{25}, \tfrac{12}{25}, \tfrac{4}{5}), \qquad bb = (-\tfrac{7}{25}, \tfrac{24}{25}, 0).$$

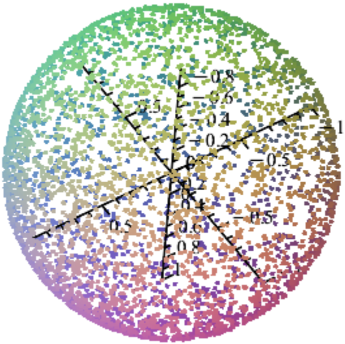
Rotér omkring y-aksen:

$$aaa = (-\tfrac{117}{125}, 0, \tfrac{44}{125}), \qquad aab = (-\tfrac{21}{125}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{72}{125}),$$
$$aba = (-\tfrac{53}{125}, \tfrac{12}{25}, \tfrac{96}{125}), \qquad abb = (-\tfrac{21}{125}, \tfrac{24}{25}, -\tfrac{28}{125})$$

Rotér omkring z-aksen:

$$baa = (-\tfrac{21}{125}, -\tfrac{28}{125}, \tfrac{24}{25}), \qquad bab = (-\tfrac{53}{125}, \tfrac{96}{125}, \tfrac{12}{25}),$$
$$bba = (-\tfrac{21}{125}, \tfrac{72}{125}, \tfrac{4}{5}), \qquad bbb = (-\tfrac{117}{125}, \tfrac{44}{125}, 0).$$

3D Irrationel Mælkebøtte



3D Irrationel Mælkebøtte

Hvert blad (bortset for p) af den 3-dimensionelle irrationelle mælkebøtte kan beskrives ved et ord w som består af bogstaverne a og b.

Fx. er $w = aabaababba$ et ord.

Og hvis vi rotérer bladet $w = aabaababba$ omkring z-aksen med $\arccos(3/5)$, så får vi bladet $bw = baabaababba$.

Sætning

Alle ord w giver forskellige blade i den 3D irrationelle mælkebøtte.

3D Irrationel Mælkebøtte

Vi startede med bladet p givet ved punktet $(1, 0, 0)$.

Hvis w er et ord, så er aw det blad man får ved at rotére w omkring y-aksen med $\arccos(3/5)$.

Og bw er bladet man får ved at rotére w omkring z-aksen med $\arccos(3/5)$.

Spørgsmål

Hvad sker der hvis vi rotérer hele 3D mælkebøtten omkring y-aksen med $\arccos(3/5)$? Og hvad med omkring z-aksen?

Sammenlign de to mælkebøtter man får ud af det.

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

3D Irrationelle Mælkebøtte

Definition

Vi siger at et geometrisk objekt M i rummet er paradoksalt hvis man kan rotére det to forskellige veje og dermed opnå to objekter som begge er skarpt mindre end M, og som kun overlapper i punktet $(0, 0, 0)$.

Sætning

Den 3D irrationelle mælkebøtte er paradoksal.

Dette afhænger af hvad vi nævnte tidligere:

Sætning

Alle ord w giver forskellige blade i den 3D irrationelle mælkebøtte.

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Paradokser i 2D?

Definition

Vi siger at et geometrisk objekt M i planen er paradoksalt hvis man kan rotére det to forskellige veje og dermed opnå to objekter som begge er skarpt mindre end M, og som kun overlapper i punktet $(0,0)$.

Spørgsmål

Findes der paradoksale objekter i planen?

Hint: Antag M er et objekt som kan rotéres to forskellige veje (med vinkler v_1 og v_2) og opnå to objekter M_1 og M_2 som begge er skarpt mindre end M. Vælg et punkt $p \neq (0,0)$ i M og prøv at rotér det nogle gange og se hvad der sker.

3D Irrationelle Mælkebøtte

Lemma 1

Lad w være et ord i a og b med længde ℓ. Så er det tilsvarende punkt i mælkebøtten på formen $\left(\frac{k}{5^\ell}, \frac{m}{5^\ell}, \frac{n}{5^\ell}\right)$ hvor x-koordinate $\frac{k}{5^\ell}$ er en uforkortelig brøk.

$$
\begin{aligned}
a &= \left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right), & b &= \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right) \\
aa &= \left(-\tfrac{7}{25}, 0, \tfrac{24}{25}\right), & ab &= \left(\tfrac{9}{25}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{12}{25}\right), \\
ba &= \left(\tfrac{9}{25}, \tfrac{12}{25}, \tfrac{4}{5}\right), & bb &= \left(-\tfrac{7}{25}, \tfrac{24}{25}, 0\right). \\
aaa &= \left(-\tfrac{117}{125}, 0, \tfrac{44}{125}\right), & aab &= \left(-\tfrac{21}{125}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{72}{125}\right), \\
aba &= \left(-\tfrac{53}{125}, \tfrac{12}{25}, \tfrac{96}{125}\right), & abb &= \left(-\tfrac{21}{125}, \tfrac{24}{25}, -\tfrac{28}{125}\right) \\
baa &= \left(-\tfrac{21}{125}, -\tfrac{28}{125}, \tfrac{24}{25}\right), & bab &= \left(-\tfrac{53}{125}, \tfrac{96}{125}, \tfrac{12}{25}\right), \\
bba &= \left(-\tfrac{21}{125}, \tfrac{72}{125}, \tfrac{4}{5}\right), & bbb &= \left(-\tfrac{117}{125}, \tfrac{44}{125}, 0\right).
\end{aligned}
$$

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

3D Irrationelle Mælkebøtte

Lemma 1

Lad w være et ord i a og b med længde ℓ. Så er det tilsvarende punkt i mælkebøtten på formen $\left(\frac{k}{5^\ell}, \frac{m}{5^\ell}, \frac{n}{5^\ell}\right)$ hvor x-koordinate $\frac{k}{5^\ell}$ er en uforkortelig brøk.

Rotation omkring y-aksen: $w = (x, y, z)$ rotéres over i

$$aw = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z \;,\; y \;,\; \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z\right)$$

Rotation omkring z-aksen: $w = (x, y, z)$ rotéres over i

$$bw = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \;,\; \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \;,\; z\right)$$

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

3D Irrationelle Mælkebøtte

Lemma 2

Hvis to ord w_1 og w_2 har forskellige længder, så er de tilsvarende blade i mælkebøtten forskellige.

Bevis.

Lad længderne for w_1 og w_2 være ℓ_1 og ℓ_2.

Lemma 1: x-koordinaten i w_1 kan skrives som en uforkortelig brøk $\frac{k_1}{5^{\ell_1}}$.

Tilsvarende er x-koordinaten for w_2 en uforkortelig brøk $\frac{k_2}{5^{\ell_2}}$.

Da $\ell_1 \neq \ell_2$ er nævnerne i de to brøker forskellige, må brøkerne også være forskellige (da de var uforkortelige).

Altså må w_1 og w_2 høre til forskellige punkter, da x-koordinaterne er forskellige.

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

3D Irrationelle Mælkebøtte

Lemma 3

Hvis to ord w_1 og w_2 giver forskellige blade i mælkebøtten så giver

- aw_1 og aw_2 forskellige blade; og
- bw_1 og bw_2 forskellige blade.

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

3D Irrationelle Mælkebøtte

Lemma 4

Hvis to ord w_1 og w_2 har samme længde ℓ, så giver aw_1 og bw_2 forskellige blade i mælkebøtten.

Bevis.

Lemma 1: $w_1 = (\frac{k}{5^\ell}, \frac{m}{5^\ell}, \frac{n}{5^\ell})$ og

$$aw_1 = \left(\frac{k'}{5^{\ell+1}} \ , \ \frac{5m}{5^{\ell+1}} \ , \ \frac{n'}{5^{\ell+1}} \right)$$

og $\frac{k'}{5^{\ell+1}}$ er en uforkortelig brøk.

Rotér aw_1 og bw_2 omkring z-aksen i modsatte retning (samme vinkel) end vi plejer: (x, y, z) rotéres til

$$(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \ , \ -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \ , \ z).$$

SDU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

3D Irrationelle Mælkebøtte

Lemma 4

Hvis to ord w_1 og w_2 har samme længde ℓ, så giver aw_1 og bw_2 forskellige blade i mælkebøtten.

Bevis.

bw_2 rotéres tilbage til w_2! Og aw_1 rotéres til

$$\left(\frac{3k' + 4 \cdot 5m}{5^{\ell+2}}, \frac{-4k' + 3 \cdot 5m}{5^{\ell+2}}, \frac{5n'}{5^{\ell+2}}\right).$$

Da primtallet 5 ikke går op i $3k'$, men går op i $4 \cdot 5m$, må $\frac{3k'+4\cdot5m}{5^{\ell+2}}$ være en uforkortelig brøk.

Men x-koordinaten i w_2 har nævner 5^{ℓ}.

Så disse punkter er forskellige, tilsvarende er aw_1 og bw_2 forskellige.

Banach–Tarski paradokset

Banach–Tarski paradokset

Enhver solid kugle kan deles op i 5 dele, sådan at 2 af delene kan rotéres og sættes sammen til en kugle identisk med den vi startede med, og tilsvarende kan de resterende 3 dele rotéres og sættes sammen til en kugle identisk med den vi startede med.

Dette kaldes et en solid kugle har en paradoksal dekomposition.