Den 39e Nordiska matematiktävlingen

Tisdagen, den 25 mars 2025

1. Låt n vara ett positivt heltal, större än 2. Finn alla funktioner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, som satisfierar ekvationen

$$(f(x+y))^n = f(x^n) + f(y^n), \quad \text{för alla heltal } x, y.$$

2. Låt p vara ett primtal och antag att $2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1}$. Visa att talet $2p+1$ är ett primtal. [1]

3. Låt $\triangle ABC$ vara en spetsvinklig triangel. Låt H vara triangelns ortocentrum (det vill säga skärningspunkten för höjderna i triangeln) och låt O vara medelpunkten för triangelns omskrivna cirkel. Låt E och F vara punkter på sträckorna AC respektive AB sådana att $AEHF$ är en parallellogram. Visa att $|OE| = |OF|$.

4. Beteckna med S_n mängden av alla permutationer av mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Låt $\sigma \in S_n$ vara en permutation. Vi definierar *rubbningen* av σ som talet $d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\sigma(i) - i|$. Vi säger att σ är *maximalt rubbad* om $d(\sigma)$ är så stor som möjligt, det vill säga om $d(\sigma) \geq d(\pi)$, för alla $\pi \in S_n$.

(a) Antag att σ är en maximalt rubbad permutation av $\{1, 2, \ldots, 2024\}$. Visa att $\sigma(i) \neq i$, för alla $i \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$.

(b) Är påståendet i deluppgift (a) sant för permutationer av $\{1, 2, \ldots, 2025\}$?

Skrivtid 4 timmar.
Varje problem är värt 7 poäng.
Endast skriv- och ritdon är tillåtna.

[1] Det är ett specialfall av Pocklingtons sats. Ett bevis av detta specialfall krävs.