Den 39. nordiske matematikkonkurransen

Tirsdag 25. mars 2025

Tid til rådighet er 4 timer. Hver oppgave er verdt 7 poeng.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

1. La n være et positivt heltall større enn 2. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som tilfredsstiller

$$\big(f(x+y)\big)^n = f(x^n) + f(y^n) \quad \text{for alle heltall } x, y.$$

2. La p være et primtall og anta at $2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1}$. Vis at $2p+1$ er et primtall.[1]

3. La ABC være en spissvinklet trekant med ortosenter H og omsenter O. La E og F være punkter på linestykkene henholdsvis AC og AB slik at $AEHF$ er et parallellogram. Vis at $OE = OF$.

4. La S_n betegne mengden av alle permutasjoner av mengden $\{1, 2, \ldots, n\}$. La $\sigma \in S_n$ være en permutasjon. Vi definerer *forskyvningen* til σ som tallet $d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\sigma(i) - i|$. Vi sier at σ er *maksimalt forskyvende* dersom $d(\sigma)$ er det størst mulige, altså om $d(\sigma) \geq d(\pi)$ for alle $\pi \in S_n$.

a) Anta at σ er en maksimalt forskyvende permutasjon av $\{1, 2, \ldots, 2024\}$. Vis at $\sigma(i) \neq i$, for alle $i \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$.

b) Holder påstanden i del a) også for permutasjoner av $\{1, 2, \ldots, 2025\}$?

Merk: En permutasjon $\sigma \in S_n$ er en bijektiv funksjon $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

---

[1] Dette er et spesialtilfelle av Pocklingtons sats. Det kreves et bevis for dette spesialtilfellet.