Version: Icelandic

39. Norræna Stærðfræðikeppnin

25. mars, 2025

Leyfilegur tími eru 4 klukkustundir. Hvert dæmi gefur allt að 7 stig. Einu leyfilegu hjálpargögnin eru skriffæri og teiknitól.

1. Látum n vera jákvæða heiltölu stærri en 2. Finnið öll föll $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sem uppfylla

$$\Big(f(x+y)\Big)^n = f(x^n) + f(y^n), \quad \text{fyrir allar heiltölur } x, y.$$

2. Látum p vera frumtölu og gerum ráð fyrir að $2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1}$ [1]. Sýnið að $2p+1$ sé frumtala. [2]

3. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með hæðamiðju H og ummiðju O. Látum E og F vera punkta á strikunum AC og AB, í þeirri röð, þannig að $AEHF$ sé samsíðungur. Sannið að $|OE| = |OF|$.

4. Skilgreinum S_n sem mengi allra umraðana á $\{1, 2, \ldots, n\}$. Látum $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ vera umröðun. Látum *flutning* σ vera töluna $d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\sigma_i - i|$. Segjum að σ sé *hámarksflytjandi* ef $d(\sigma)$ er eins stórt og það gerist, þ.e. ef $d(\sigma) \geq d(\pi)$, fyrir öll $\pi \in S_n$.

a) Gerum ráð fyrir að $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ sé hámarksflytjandi umröðun á $\{1, 2, \ldots, 2024\}$. Sýnið að $\sigma_i \neq i$, fyrir öll $i \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$.

b) Gildir staðhæfingin í a) um umraðanir á $\{1, 2, \ldots, 2025\}$?

---

[1] $a \equiv b \pmod{m}$ þýðir að m gengur upp í $a - b$

[2] Þetta er sértilvik af setningu Pocklington. Sanna þarf þetta sértilvik.