Version: suomi

39. pohjoismainen matematiikkakilpailu

25. maaliskuuta 2025

Kilpailu kestää 4 tuntia. Kukin tehtävä on 7 pisteen arvoinen.
Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.

1. Olkoon n lukua 2 suurempi positiivinen kokonaisluku. Etsi kaikki kuvaukset $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, jotka toteuttavat yhtälön

$$\Big(f(x+y)\Big)^n = f(x^n) + f(y^n)$$

kaikilla kokonaisluvuilla x ja y.

2. Olkoon p alkuluku ja oletetaan, että $2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1}$. Todista, että $2p+1$ on alkuluku.[1]

3. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka korkeusjanojen leikkauspiste on H ja ympärysympyrän keskipiste on O. Olkoon E janan AC ja F janan AB piste, joille $AEHF$ on suunnikas. Todista, että $|OE| = |OF|$.

4. Merkitään S_n:llä joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatioiden joukkoa. Olkoon $\sigma \in S_n$ permutaatio. Määritellään permutaation σ *siirtymän* olevan luku $d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\sigma(i) - i|$. Sanotaan permutaation σ olevan *maksimaalisesti siirtyvä*, jos $d(\sigma)$ on suurin mahdollinen, ts. $d(\sigma) \geq d(\pi)$, kun $\pi \in S_n$.

a) Olkoon σ maksimaalisesti siirtyvä joukon $\{1, 2, \ldots, 2024\}$ permutaatio. Todista, että $\sigma(i) \neq i$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$.

b) Pitääkö kohdan a väite paikkaansa joukon $\{1, 2, \ldots, 2025\}$ permutaatioille?

[1] Tämä on erikoistapaus Pocklingtonin lauseesta. Tämän erikoistapauksen todistus vaaditaan.