Version: Danish

39. Nordiske Matematikkonkurrence

Tirsdag d. 25. marts 2025

Varighed 4 timer. Hver opgave giver 7 point.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

1. Lad n være et positivt helt tal større end 2. Find alle funktioner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som opfylder at

$$\Big(f(x+y)\Big)^n = f(x^n) + f(y^n), \quad \text{for alle hele tal } x, y.$$

2. Lad p være et primtal, og antag at $2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1}$. Bevis at $2p+1$ er et primtal. [1]

3. Lad ABC være en spidsvinklet trekant hvor H er højdernes skæringspunkt, og O er centrum for trekantens omskrevne cirkel. Lad yderligere E og F være punkter på henholdsvis linjestykket AC og linjestykket AB sådan at $AEHF$ er et parallelogram. Bevis at $|OE| = |OF|$.

4. Lad S_n betegne mængden af alle permutationer af mængden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Lad $\sigma \in S_n$ være en permutation. Vi definerer *forskydningen* af σ til at være tallet $d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\sigma(i) - i|$. Vi siger at σ er *maksimalt forskydende* hvis $d(\sigma)$ er størst muligt, altså hvis $d(\sigma) \geq d(\pi)$ for alle $\pi \in S_n$.

a) Antag at σ er en maksimalt forskydende permutation af $\{1, 2, ..., 2024\}$. Bevis at $\sigma(i) \neq i$ for alle $i \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$.

b) Gælder påstanden i del a) også for permutationer af $\{1, 2, \ldots, 2025\}$?

Bemærkning: En permutation $\sigma \in S_n$ er en bijektiv funktion $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

[1] Dette er et specialtilfælde af Pocklingtons sætning. Der kræves et bevis for dette specialtilfælde.