36. Nordiske Matematikkonkurrence

Mandag den 4. april 2022

Dansk version

Varighed 4 timer. Hver opgave giver 7 point.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

Opgave 1

Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x) \qquad \text{og} \qquad f(f(x)) = 1 - f(x)$$

for alle reelle tal x.

Opgave 2

I Eventyrland er byerne forbundet med veje, og for hver direkte vej mellem to byer findes der også en rute mellem disse to byer som ikke benytter dén vej. (Der er højst én direkte vej mellem to vilkårlige byer). Hjerter Dame befalede sparerne at frembringe en liste over alle „lige“ delsystemer af vejsystemet, altså vejsystemer bestående af delmængder af mængden af veje, hvor hver by er forbundet til et lige antal veje (eventuelt ingen). For hvert sådan delsystem skulle de opregne dets veje. Hvis der i alt er n veje i Eventyrland og x delsystemer på sparernes liste, hvor mange veje er der så på sparernes liste når hver vej tælles lige så mange gange som den optræder på listen.

Opgave 3

Anton og Britta spiller et spil med mængden $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, hvor $n \geq 5$ er et ulige helt tal. I hvert træk fjerner Anton et tal fra M og lægger det i sin mængde A, og Britta fjerner så et tal fra M og lægger det i sin mængde B. (Både A og B er tomme i begyndelsen). Når M er tømt, vælger Anton to forskellige tal x_1, x_2 i A og viser dem til Britta. Derefter vælger Britta to forskellige tal y_1, y_2 i B. Britta vinder hvis

$$(x_1 x_2 (x_1 - y_1)(x_2 - y_2))^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \mod n.$$

Ellers vinder Anton. Find alle de n hvor Britta har en vindende strategi.

Opgave 4

Lad ABC være en spidsvinklet trekant med omskreven cirkel k og centrum O for den omskrevne cirkel. En linje gennem O skærer AB og AC i henholdsvis D og E. Lad B' og C' betegne billederne af henholdsvis B og C ved spejling i O. Vis at de omskrevne cirkler til ODC' og OEB' mødes på k.