

32. Pohjoismainen matematiikkakilpailu maanantaina, 9. huhtikuuta 2018

*Työaika: 4 tuntia. Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 7 pistettä.
Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineitä saa käyttää.*

Tehtävä 1.

Olkoon k positiivinen kokonaisluku ja P tason piste. Pyritään piirtämään pisteen P kautta kulkemattomia suoria niin, että jokainen pisteestä P lähtevä puolisuora leikkaa ainakin k :ta näistä suorista. Määritä pienin määrä suoria, joka riittää tähän.

Tehtävä 2.

Jono alkulukuja p_1, p_2, \dots määräytyy jonon kahdesta ensimmäisestä alkuluvusta p_1 ja p_2 niin, että p_{n+2} on suurin luvun $p_n + p_{n+1} + 2018$ alkutekijä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n . Todista, että kaikilla mahdollisilla arvoilla p_1 ja p_2 jonossa esiintyy vain äärellisen monta alkulukua.

Tehtävä 3.

Olkoon ABC kolmio, jossa $|AB| < |AC|$. Olkoon D suoran CA ja E suoran BA piste, joille $|CD| = |AB|$, $|BE| = |AC|$ sekä A, D ja E sijaitsevat suoran BC samalla puolella. Olkoon I kolmion ABC sisäympyrän keskipiste sekä H kolmion BCI korkeusjanojen jatkeiden leikkauspiste. Todista, että D, E ja H ovat samalla suoralla.

Tehtävä 4.

Olkoon $f = f(x, y, z)$ kolmen muuttujan x, y ja z polynomi, jolle

$$f(w, w, w) = 0$$

kaikilla $w \in \mathbb{R}$. Todista, että on olemassa näiden samojen kolmen muuttujan polynomit A, B ja C , joille $A + B + C = 0$ ja

$$f(x, y, z) = A(x, y, z) \cdot (x - y) + B(x, y, z) \cdot (y - z) + C(x, y, z) \cdot (z - x).$$

Onko olemassa polynomia f , jolle A, B ja C ovat yksikäsitteiset?