Den 29. nordiske matematikkonkurransen

Tysdag 24. mars 2015

Norsk versjon (nynorsk)

Oppgåvene skal løysast på 4 timar. Du får opptil 7 poeng på kvar oppgåve.
Skrive- og teiknesaker er einaste tillatne hjelpemiddel.

Oppgave 1

La ABC vere ein trekant, og Γ sirkelen med diameter AB. Vinkelhalveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle ABC$ skjer Γ igjen i høvesvis D og E. Innsirkelen til ABC tangerer BC i F, og AC i G. Vis at D, E, F og G ligg på ei rett linje.

Oppgave 2

Finn alle trippel (p, q, r) av primtall som er slik at det eine av tala pqr og $p+q+r$ er lik 101 gongar det andre.

Oppgave 3

La $n > 1$, og $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ vere eit polynom med n reelle røter (talt med multiplisitet). La polynomet q vere definert ved

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x+j).$$

Vi veit at $p(2015) = 2015$. Vis at q har minst 1970 forskjellige røter $r_1, r_2 \ldots, r_{1970}$ med $|r_j| < 2015$ for alle $j = 1, 2, \ldots, 1970$.

Oppgave 4

Ein encyklopedi består av 2000 nummererte bind. Binda er stabla i nummerrekkefølge med nummer 1 på toppen, og nummer 2000 i botnen av stabelen. To typar trekk er tillatne for å stabla om binda:

(1) For kvart partal n, får ein ta n bind frå toppen av stabelen og flytte dei til botnen av stabelen utan å endre på rekkefølga.
(2) For kvart oddetal n, får ein ta n bind frå toppen av stabelen og stable dei tilbake på toppen igjen i motsatt rekkefølge.

Kor mange forskjellige permutasjonar av binda kan ein nå ved bruk av desse to typar trekk?