Den 27. nordiske matematikkonkurransen

Måndag 8. april 2013

Norsk versjon (nynorsk)

Oppgåvene skal løysast på 4 timar. Du får opptil 5 poeng på kvar oppgåve.
Skrive- og teiknesaker er einaste tillatne hjelpemiddel.

OPPGÅVE 1. La $(a_n)_{n\geq 1}$ vere ei følgje med $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor$$

for alle $n \geq 1$, der $\lfloor x \rfloor$ står for største heiltal mindre enn eller lik x. Finn alle $n \leq 2013$ slik at a_n er eit kvadrattal.

OPPGÅVE 2. I ei fotballturnering deltek n lag, der $n \geq 4$, og kvart par av lag spelar mot kvarandre nøyaktig éin gong. Anta at når turneringa er over, dannar dei endelege poengsummane ei aritmetisk følgje der kvart lag har fått eitt poeng meir enn laget etter på resultatlista. Finn største mogelege poengsum for det laget som har lågast poengsum, der vi antek vanleg poenggivning for fotball (kor vinnarlaget i kvar kamp får 3 poeng og taparlaget 0 poeng, men begge får 1 poeng dersom kampen endar uavgjort).

OPPGÅVE 3. Definer ei følgje $(n_k)_{k\geq 0}$ ved $n_0 = n_1 = 1$, og $n_{2k} = n_k + n_{k-1}$ og $n_{2k+1} = n_k$ for $k \geq 1$. La vidare $q_k = n_k/n_{k-1}$ for kvar $k \geq 1$. Vis at eitkvart positivt rasjonalt tal finst nøyaktig éin gang i følgja $(q_k)_{k\geq 1}$.

OPPGÅVE 4. La ABC vere ein spissvinkla trekant, og H eit indre punkt i trekanten. Speilbilda av H gjennom sidene AB og AC kallar vi H_c og H_b, og speilbilda av H gjennom midtpunkta til dei same sidene kallar vi H'_c og H'_b. Vis at dei fire punkta H_b, H'_b, H_c og H'_c ligg på ein sams sirkel viss og berre viss minst to av dei fell saman, eller H ligg på høgda frå A i trekanten ABC.