Den 27. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 8. april 2013

Norsk versjon (bokmål)

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 5 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegnesaker er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1. La $(a_n)_{n\geq 1}$ være en følge med $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor$$

for alle $n \geq 1$, der $\lfloor x \rfloor$ står for største heltall mindre enn eller lik x. Finn alle $n \leq 2013$ slik at a_n er et kvadrattall.

Oppgave 2. I en fotballturnering deltar n lag, der $n \geq 4$, og hvert par av lag spiller mot hverandre nøyaktig én gang. Anta at når turneringen er over, danner de endelige poengsummene en aritmetisk følge der hvert lag har fått ett poeng mer enn laget etter på resultatlisten. Finn største mulige poengsum for det laget som har lavest poengsum, der vi antar vanlig poenggivning for fotball (hvor vinnerlaget i hver kamp får 3 poeng og taperlaget 0 poeng, men begge får 1 poeng dersom kampen ender uavgjort).

Oppgave 3. Definér en følge $(n_k)_{k\geq 0}$ ved $n_0 = n_1 = 1$, og $n_{2k} = n_k + n_{k-1}$ og $n_{2k+1} = n_k$ for $k \geq 1$. La videre $q_k = n_k/n_{k-1}$ for hver $k \geq 1$. Vis at ethvert positivt rasjonalt tall finnes nøyaktig én gang i følgen $(q_k)_{k\geq 1}$.

Oppgave 4. La ABC være en spissvinklet trekant, og H et indre punkt i trekanten. Speilbildene av H gjennom sidene AB og AC kaller vi H_c og H_b, og speilbildene av H gjennom midtpunktene til de samme sidene kaller vi H'_c og H'_b. Vis at de fire punktene H_b, H'_b, H_c og H'_c ligger på en felles sirkel hvis og bare hvis minst to av dem faller sammen, eller H ligger på høyden fra A i trekanten ABC.