27. norræna stærðfræðikeppnin

Mánudaginn 8. apríl 2013

Íslensk útgáfa

Leyfilegur tími er 4 kukkustundir. Hvert dæmi er 5 stiga virði. Einu leyfilegu hjálpartækin eru skriffæri og teikniáhöld.

Dæmi 1. Látum $(a_n)_{n\geq 1}$ vera runu með $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

fyrir öll $n \geq 1$, þar sem $\lfloor x \rfloor$ táknar stærstu heiltöluna sem er minni en eða jöfn x. Finnið öll $n \leq 2013$ þannig að a_n sé ferningstala.

Dæmi 2. Á fótboltamóti keppa n lið, $n \geq 4$, og sérhver tvö lið leika nákvæmlega einu sinni hvort við annað. Gerum ráð fyrir að við lok keppninnar myndi stigataflan mismunaröð þar sem hvert lið hefur einu stigi meira en næsta lið í röðinni. Gerum einnig ráð fyrir að notuð sé venjuleg stigagjöf í fótbolta þar sem sigurlið fær 3 stig, tapið 0 stig og hvort lið fær 1 stig við jafntefli. Ákvarðið þá hæsta mögulega stigafjölda þess liðs sem situr í neðsta sæti stigatöflunnar.

Dæmi 3. Skilgreinum runu $(n_k)_{k\geq 0}$ með $n_0 = n_1 = 1$, og $n_{2k} = n_k + n_{k-1}$ og $n_{2k+1} = n_k$ fyrir $k \geq 1$. Látum ennfremur $q_k = n_k/n_{k-1}$ fyrir hvert $k \geq 1$. Sýnið að sérhver jákvæð ræð tala komi fyrir nákvæmlega einu sinni í rununni $(q_k)_{k\geq 1}$.

Dæmi 4. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning og H vera punkt innan í honum. Speglum H um hliðarnar AB og AC og köllum spegilpunktana H_c og H_b, í þessari röð. Speglum síðan H um miðpunkta þessara sömu hliða og köllum þá spegilpunkta H'_c og H'_b. Sýnið að punktarinir fjórir H_b, H'_b, H_c og H'_c liggi á sama hring þá og því aðeins að a.m.k. tveir þeirra falli saman eða H liggi á hæðalínunni frá A í þríhyrningnum ABC.