27. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Maanantai 8. huhtikuuta 2013

Työaikaa 4 tuntia. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 5.
Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineiden käyttö on sallittua.

1. TEHTÄVÄ. Olkoon $(a_n)_{n\geq 1}$ lukujono, jonka määrittelevät ehdot $a_1 = 1$ ja

$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

kaikilla $n \geq 1$; $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x. Määritä kaikki ne $n \leq 2013$, joille a_n on neliöluku.

2. TEHTÄVÄ. Jalkapalloturnaukseen osallistuu n joukkuetta, $n \geq 4$, ja jokainen joukkue pelaa täsmälleen kerran jokaista muuta vastaan. Oletetaan, että turnauksen päätyttyä joukkueiden pisteet muodostavat aritmeettisen jonon, jossa jokainen joukkue on saanut yhden pisteen enemmän kuin järjestyksessä seuraava. Määritä pienimmän pistemäärän saaneen joukkueen suurin mahdollinen pistemäärä, kun pisteet jaetaan jalkapallossa tavallisella tavalla (ottelun voittaja saa kolme pistettä ja häviäjä nolla, ja tasapelissä molemmat joukkueet saavat yhden pisteen).

3. TEHTÄVÄ. Määritellään jono $(n_k)_{k\geq 0}$ asettamalla $n_0 = n_1 = 1$, $n_{2k} = n_k + n_{k-1}$ ja $n_{2k+1} = n_k$, kun $k \geq 1$. Olkoon vielä $q_k = n_k/n_{k-1}$ kaikilla $k \geq 1$. Osoita, että jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy täsmälleen kerran jonossa $(q_k)_{k\geq 1}$.

4. TEHTÄVÄ. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja H sen sisäpiste. Olkoot H_c ja H_b pisteen H kuvat peilauksissa yli suorien AB ja AC, tässä järjestyksessä, ja olkoot H'_c ja H'_b pisteen H:n kuvat peilauksissa yli janojen AB ja AC keskipisteiden. Osoita, että pisteet H_b, H'_b, H_c ja H'_c ovat samalla ympyrällä, jos ja vain jos ainakin kaksi niistä yhtyy tai jos H on kolmion ABC kärjestä A piirretyllä korkeusjanalla.