16. pohjoismainen kilpailu, 4. 4. 2002

1. Puolisuunnikas $ABCD$, missä AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja $AD < CD$, on piirretty ympyrän c sisään. Olkoon DP AC:n suuntainen ympyrän jänne. Oletetaan, että pisteeseen D piirretty c:n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä E ja että PB ja DC leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $EQ = AC$.

2. Kahteen maljaan on sijoitettu yhteensä N palloa, jotka on numeroitu 1:stä N:ään. Yksi pallo siirretään maljasta toiseen. Tallöin kummassakin maljassa olevissa palloissa olevien lukujen keskiarvo kasvaa samalla määrällä, joka on x. Mikä on x:n suurin mahdollinen arvo?

3. Olkoot $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ ja $b_1,\ b_2, \ldots, b_n$ reaalilukuja ja olkoot $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ kaikki eri lukuja. Osoita, että jos kaikki tulot

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_n),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, ovat keskenään yhtä suuria, niin myös kaikki tulot

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots (a_n + b_j),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, ovat keskenään yhtä suuria.

4. Eva, Per ja Anna leikittelevät taskulaskimillaan. He valitsevat eri kokonaislukuja ja tarkistavat, ovatko ne jaollisia 11:llä vai eivät. He tutkivat vain sellaisia yhdeksännumeroisia lukuja, joissa esiintyvät kaikki numerot 1, 2, ..., 9. Anna vaittää, että jos tällainen luku valitaan umpimähkään, niin todennaköisyys, että se olisi jaollinen 11:llä, on tasan 1/11. Eva on toista mieltä: hänen mielestään todennäköisyys on alle 1/11. Perin mielestä todennäköisyys on yli 1/11. Kuka on oikeassa?