VIII Nordiske Matematikk-konkurranse

Torsdag 17. mars 1994

Tillatt tid: 4 timer

Hver oppgave er verdt 5 poeng.

Oppgave 1

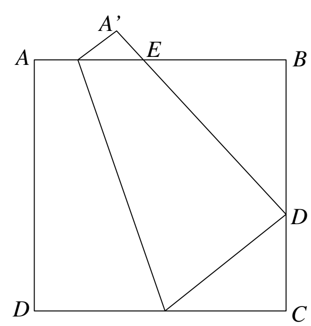
La O være et punkt i det indre av en likesidet trekant ABC med sidelengder a. Linjene AO, BO og CO skjærer trekantens sider i punktene A_1, B_1 og C_1. Vis at

$$|OA_1| + |OB_1| + |OB_2| < a.$$

Oppgave 2

En endelig mengde S av punkter i planet med heltallige koordinater kalles en *to-nabo-mengde* dersom for hvert punkt (p, q) i S er nøyaktig to av punktene $(p+1, q)$, $(p-1, q)$, $(p, q+1)$ og $(p, q-1)$ med i S. For hvilke n finnes en to-nabo-mengde som inneholder nøyaktig n punkter?

Oppgave 3



Et kvadratisk papir $ABCD$ brettes ved å plassere hjørnet D på et punkt D' på BC (se figuren). Anta at AD flyttes over til $A'D'$ som krysser AB i E. Vis at omkretsen av trekanten EBD' er halvparten så lang som omkretsen av kvadratet.

Oppgave 4

Finn alle positive heltall $n < 200$ slik at $n^2 + (n+1)^2$ er et kvadrattall.