

2. Nordiske Matematikkonkurrence

11. april 1988

Dansk version

*Til opgavebesvarelsen gives 4 timer.
For hver opgave gives maksimalt 5 point.*

Opgave 1

Et positivt helt tal n har egenskaben, at hvis vi sletter de sidste tre cifre i n , så fremkommer $\sqrt[3]{n}$.

Bestem tallet n .

Opgave 2

Lad a , b og c være tre fra 0 forskellige reelle tal, således at $a \geq b \geq c$. Vis at

$$\frac{a^3 - c^3}{3} \geq abc \left(\frac{a-b}{c} - \frac{b-c}{a} \right) .$$

Hvornår gælder lighedstegnet?

Opgave 3

To kugler med samme centrum har radier r og R , hvor $r < R$. Vi ønsker at vælge tre punkter A , B og C på den største kugleflade, så siderne i trekant ABC alle tangerer den mindste kugle.

Vis at dette er muligt hvis og kun hvis $R \leq 2r$.

Opgave 4

Lad m_n være minimum af funktionen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k .$$

Vis at $m_n \rightarrow \frac{1}{2}$ for $x \rightarrow \infty$.