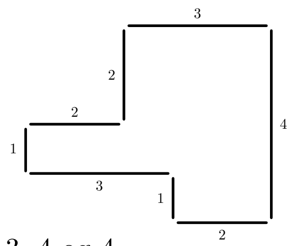
Georg Mohr-Konkurrencen 2021
Løsninger

Tirsdag den 12. januar 2021 kl. 9-13

Opgave 1. Georg har et sæt pinde. Af dem skal han lave en lukket figur med den egenskab at hver pind danner rette vinkler med sine nabopinde. Alle pindene skal bruges. Hvis pindene har længderne 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 og 4, kan figuren for eksempel se således ud:



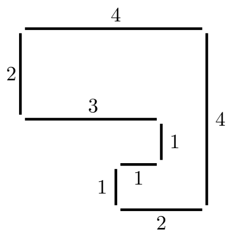
(a) Vis at han kan lave en sådan figur hvis pindene har længderne 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 og 4.

(b) Bevis at det ikke kan lade sig gøre hvis pindene har længderne 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 og 4.

(c) Afgør om det kan lade sig gøre hvis pindene har længderne 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 og 5.

Løsning:

(a) Her er et eksempel med længderne 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 og 4:



(b) Da alle vinkler skal være rette, må pindene i en færdig figur være placeret skiftevis lodret og vandret hele vejen rundt. I en færdig figur er der derfor nødvendigvis lige mange lodrette og vandrette pinde. Det samlede antal pinde i et brugbart sæt er derfor lige. Med ni pinde (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 og 4) kan det altså ikke lade sig gøre.

(c) Hvis man bevæger sig hele vejen rundt i en færdig figur, ender man samme sted som man begyndte. Samlet set må man derfor have bevæget sig lige så langt til venstre som til højre. Den samlede længde af de vandrette pinde er derfor et lige tal. Også den samlede længde af de lodrette pinde må være et lige tal, da man samlet har bevæget sig lige meget ned og op. Den samlede længde af alle pindene er dermed sum af to lige tal og dermed selv lige. Da $1+2+2+2+3+3+3+4+4+5$ er et ulige tal, kan det ikke lade sig gøre at danne en figur ud fra de angivne længder (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 og 5).

Opgave 2. Georg har en 4-sidet terning med tallene 2, 3, 4 og 5. Han slår 17 gange med terningen og skriver for hvert slag resultatet på en tavle så der til slut står 17 tal på tavlen. Georg lægger mærke til at gennemsnittet af de 17 tal er et helt tal.

Kan hvert af tallene 2, 3, 4 og 5 optræde mindst tre gange på Georgs tavle?

Løsning: Svaret er nej. Hvis hvert af tallene 2, 3, 4 og 5 optræder mindst tre gange, så er summen af de 17 tal

$$S = 3 \cdot (2 + 3 + 4 + 5) + a + b + c + d + e = 42 + a + b + c + d + e,$$

hvor hvert af tallene a, b, c, d og e tilhører $\{2, 3, 4, 5\}$. Så er $a + b + c + d + e$ mindst $5 \cdot 2 = 10$ og højst $5 \cdot 5 = 25$. Derfor er

$$52 = 42 + 10 \leq S \leq 42 + 25 = 67.$$

Da gennemsnittet er et helt tal, skal 17 gå op i summen S, men det er ikke muligt da $3 \cdot 17 = 51$ og $4 \cdot 17 = 68$. Dermed kan tallene 2, 3, 4 og 5 ikke optræde mindst tre gange hver.

Opgave 3. Georg undersøger hvilke hele tal der kan skrives på formen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm n^2.$$

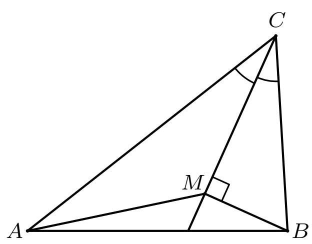
For eksempel kan tallet 3 skrives som $-1^2 + 2^2$, og tallet -13 kan skrives som $+1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2$.

Kan alle hele tal skrives på denne måde?

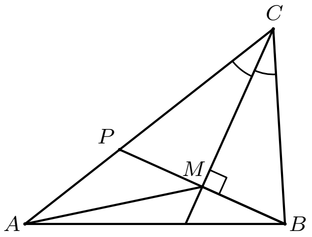
Løsning: Svaret er ja. Bemærk først at tallene 1, 2, 3 og 4 kan opnås, for eksempel således: $1^2 = 1$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, $3 = -1^2 + 2^2$, $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$. Bemærk dernæst at der for enhver værdi af a gælder at $a^2 - (a+1)^2 - (a+2)^2 + (a+3)^2 = a^2 - (a^2 + 2a + 1) - (a^2 + 4a + 4) + (a^2 + 6a + 9) = 4$, og tilsvarende, med det omvendte valg af fortegn, $-a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 - (a+3)^2 = -4$. Det betyder at hvis man kan skrive et tal m på den ønskede form, så kan man også opnå tallene $m + 4$ og $m - 4$ ved blot at medtage fire yderligere led i summen, med passende valg af fortegn. Ved at gentage dette argument ser man at hvis m kan skrives på den ønskede form, så gælder det samme for alle tal $m + 4k$, hvor k er et helt tal. Med udgangspunkt i $m = 1, 2, 3, 4$, kan alle hele tal fremkomme som $m + 4k$, hvormed Georg kan skrive alle hele tal på den ønskede form.

Opgave 4. I trekant ABC er $|AC| > |BC|$. Punktet M ligger på vinkelhalveringslinjen til vinkel C, og BM er vinkelret på vinkelhalveringslinjen.

Bevis at arealet af trekant AMC er halvt så stort som arealet af trekant ABC.



Løsning:



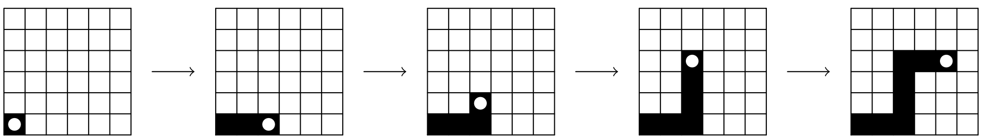
Lad P være skæringspunktet mellem forlængelsen af BM og siden AC. Da $|AC| > |BC|$, ligger punktet P mellem A og C. De to retvinklede trekanter CMP og CMB er kongruente da de deler siden CM og har samme vinkel ved C. Deraf følger at de har samme areal: $areal(CMP) = areal(CMB)$. Det følger også at $|MP| = |MB|$. Trekanterne AMP og AMB har dermed lige lange grundlinjer MP og MB, og da de har samme højde fra A, har de samme areal: $areal(AMP) = areal(AMB)$. Vi har således $areal(AMP) = \frac{1}{2}areal(ABP)$ og $areal(CMP) = \frac{1}{2}areal(CBP)$. Derfor er

$$areal(AMC) = areal(AMP) + areal(CMP) = \frac{1}{2}(areal(ABP) + areal(CBP)) = \frac{1}{2}areal(ABC),$$

hvilket skulle vises.

Opgave 5. På et bræt med 2021×2021 felter er alle felter hvide pånær et hjørnefelt som er sort. Alma og Bertha spiller følgende spil. Til at starte med står der en brik på det sorte felt. I hvert træk skal en spiller flytte brikken til et nyt felt i samme række eller søjle som det felt brikken står på. Alle felter som brikken flytter henover, inklusive slutfeltet, skal være hvide pånær startfeltet, og alle felter brikken flytter henover, inklusive slutfeltet, bliver farvet sorte ved dette træk. Alma starter, og de skiftes til at trække. Den første som ikke kan trække, har tabt.

Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer hende sejren?



Figuren viser et eksempel på mulige indledende træk i et tilsvarende spil på et bræt med 6×6 felter.

Løsning: Svaret er Alma. Almas vindende strategi består i altid at rykke brikken i lodret retning så langt som muligt. Ved at følge denne strategi sikrer Alma at Bertha hver tur skal rykke sin brik vandret enten allerøverst eller allernederst i et hvidt rektangel der er højere end det er bredt: Første gang det bliver Berthas tur, har hun et hvidt rektangel med bredde 2020 og højde 2021 at rykke ind i. Lad os se hvad der sker efter at Bertha flytter j skridt ind i et rektangel med en bredde på m og en højde på n, hvor $m < n$.

Hvis $m = 1$, er $j = 1$, hvormed Bertha taber efter Almas næste træk. Hvis $m > 1$ og enten $j = m$ eller $j = 1$, efterlader Alma efter sit træk et hvidt rektangel med siderne $n - 1$ og $m - 1$ eller siderne n og $m - 1$, altså stadig højere end det er bredt. Hvis $1 < j < m$, efterlader Alma to hvide rektangler: et med $n - 1$ rækker og $j - 1$ søjler og et med n rækker og $m - j$ søjler, og da $j - 1 < m - 1 < n - 1$ og $m - j < m < n$, er begge disse rektangler højere end de er brede.

Vi ser at Bertha hver gang bliver nødt til at flytte ind i et hvidt rektangel der er højere end det er bredt. Sommetider har hun to at vælge mellem, men de er altid højere end de er brede. Det sikrer at Alma altid kan trække hvis Bertha kan trække.

Da Alma således altid kan trække efter Bertha, og spillet ender efter et endeligt antal træk, vinder Alma.

Sponsorer: Undervisningsministeriet, Novo Nordisk Fonden, Jobindex, Lundbeckfonden, Georg Mohr Fonden og Matematiklærerforeningen.