Retningslinjer for bedømmelsen
Georg Mohr-Konkurrencen 2018
2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

Opgave 1

Undervejs i spillet står der på tavlen et antal adskilte regnestykker, hvor vi også regner et enkelt 1 uden omgivende regnetegn for et regnestykke. I hvert træk samles to af disse regnestykker til ét.

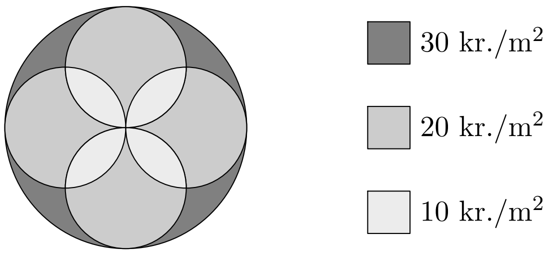
Der gives følgende point.

- 3 point for at vise at den der har det sidste træk, kan bestemme pariteten af resultatet. Heraf kan der gives 1 point for hvert af følgende.
  - 1 point for at nævne eller bruge i sin argumentation at alle led i et regnestykke er lig med 1.
  - Yderligere 1 point for at vise ét af følgende.
    - Resultatet af et regnestykke er $p + 1$, hvor p er antallet af $+$. Det er tilstrækkeligt at vise dette med med henblik på det ene, afsluttende regnestykke.
    - Når to regnestykker med resultater a og b samles til ét, bliver resultatet $a + b$ hvis der sættes $+$, og $a + b - 1$ hvis der sættes $\cdot$. Det er tilstrækkeligt at vise dette med med henblik på spillets sidste træk.
- 1 point for at vise at Georg har det sidste træk.

Bemærkning: Hvis der ikke gives andre point, giver det 1 point at beskrive en vindende strategi for Georg uden begrundelse.

Opgave 2

Nedenfor er M = areal af mørkegråt område, G = areal af gråt område, L = areal af lysegråt område, S = areal af stor cirkel og T = areal af lille cirkel.



Der gives følgende point.

- 3 point for ét af følgende.
  - Udregning af M, G og L, hvor udregning af hvert areal giver 1 point.
  - Vise at $M = L$. Herunder gives der 1 point for hvert af $G+2L = 4T$, $M+G+L = S$ og $4T = S$, men dog kun alle 3 point hvis der konkluderes at $M = L$.
- 1 point for at regne prisen ud på baggrund af det foregående.

Bemærkning: Mange deltagere vil forstå at der skal svares med et betaleligt beløb. Afrundet til hele ører er svaret 251,33 kr. Det er ikke et krav at der svares i denne form; svaret 80π kr. er tilstrækkeligt. Det må i bedømmelsen ikke tillæges betydning om svaret indeholder enheden kr., eller om en eventuel anvendelse af enhederne kr. og m^2 i beregningerne er konsistent. Det må heller ikke tillægges betydning om et svar i kr. er givet med mere end to decimaler selv om et sådant beløb ikke kan betales. Endelig må det ikke tillæges betydning hvilken tilnærmelse til π deltageren eventuelt vælger, det være sig 3, 3,14, 22/7 eller andet, eller om numeriske beregninger eller afrundinger byggende på en sådan tilnærmelse er nøjagtige.

Opgave 3

Der gives følgende point.

- 2 point for at vise $a \in \{1, 13, 169\}$.
  - Heraf 1 point for at vise $a \mid a + b + 169$ eller tilsvarende.
- 1 point for at vise for to af disse a at der findes tal b og c så alle tre brøker er hele tal.
- Yderligere 1 point for at vise dette for det sidste a.

Bemærkning: Opgaven kræver ikke at b og c bestemmes. Der skal blot for hvert af de tre a føres bevis for at de findes. Samtlige løsninger (a, b, c) er $(1, 34, 2)$, $(1, 170, 70)$, $(13, 26, 4)$, $(13, 182, 82)$, $(169, 338, 238)$.

Opgave 4

Der gives følgende point.

- 2 point for at vise at følgen ikke kan dannes med mindre end 11 forskellige tal
- 1 point for at vise at følgen kan dannes med 11 forskellige tal forudsat alle brøker af to forskellige af dem er forskellige.
- 1 point for at vise at der findes 11 forskellige tal så alle brøker af to forskellige af dem er forskellige.

Bemærkning: 1 af de to første point kan gives for analyser som fører til ulighederne $n^2 \geq 99$ eller $n(n-1) \geq 99$ for antallet n af forskellige tal. I første tilfælde, hvor så kun $n < 10$ er udelukket, kan de to sidste point gives tilsvarende. Kravet til det tredje point er så opfyldt hvis der er beskrevet et princip for konstruktion af følgen, og princippet er vist at medføre det beskrevne, selv om deltageren ikke ser at konstruktionen ikke kan gennemføres helt frem til 100 tal.

Bemærkning: Kravet til det tredje point kan opfyldes enten med et bevis ud fra et princip for konstruktion af følgen eller med en liste af 100 tal fra en 11-mængde hvor det ses at der ikke er to tal som mere end én gang følger efter hinanden i samme rækkefølge, og det højst forekommer én gang at et tal står to gange i træk.

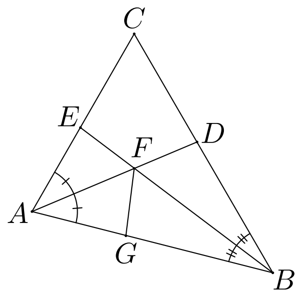
Bemærkning: Kravet til det sidste point kan opfyldes enten med et bevis ud fra et princip for valg af tallene eller med en liste eller tabel hvor alle kvotienter af to forskellige af dem er regnet ud, og hvor det ses at samme tal ikke optræder to gange. Med udregning menes at kvotienten er reduceret til uforkortelig brøk, hvis tallene er rationale. I andre tilfælde kræves en tilsvarende entydig talrepræsentation.

Opgave 5

I det følgende betegner F skæringen mellem AD og BE, G punktet på AB så $|AG| = |AE|$, og $s = (a+b+c)/2$ trekantens semiperimeter. Som sædvanlig er A, B og C vinklerne i disse hjørner og a, b og c de modstående sider.

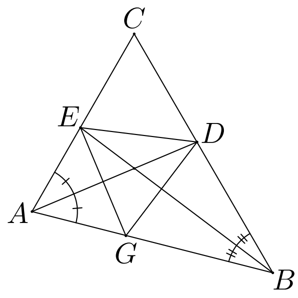
Der gives følgende point.

a) Klassisk løsning med linjen FG.



- 1 point for at indføre G
- Yderligere 1 point for at vise $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ og $\triangle BDF \cong \triangle BGF$.
- Yderligere 1 point for at vise $\angle AEF + \angle BDF = 180°$.
- Yderligere 1 point for at udlede $C = 60°$.

b) Klassisk løsning med trekant DEG.



- 1 point for at indføre G
- Yderligere 1 point for at vise hvert af følgende:
  - $\angle CED = \angle BGD$ og $\angle CDE = \angle AGE$.
  - Trekant DEG er ligesidet.
- Yderligere 1 point for at udlede $C = 60°$.

c) Løsning med cosinusrelationen eller relationer med semiperimeteren.

- 1 point for at udtrykke $|AE|$ og $|BD|$ ved a, b og c og sætte udtrykkene ind i ligningen $|AE| + |BD| = c$.
- Yderligere 1 point for at omforme ligningen til $a^2+b^2-ab = c^2$ eller $ab = 4(s-a)(s-b)$.
- Yderligere 1 point for at udlede $\cos C = \frac{1}{2}$, $(\sin\, C/2)^2 = \frac{1}{4}$ eller tilsvarende.
- Yderligere 1 point for at udlede $C = 60°$.

Bemærkning: De to sidste point opnås også hvis $C = 60°$ udledes af $ab = 4(s-a)(s-b)$ uden brug af trigonometri med argumenter tilhørende klassisk geometri.

d) Løsning med sinusrelationen

- 1 point for at udtrykke $|AE|$ og $|BD|$ ved c og vinkler og sætte udtrykkene ind i ligningen $|AE| + |BD| = c$.
- Yderligere 1 point for at omforme ligningen til $\sin A/2\, \sin B/2 = (\sin(C+A/2) - \sin A/2)$ $(\sin(C + B/2) - \sin B/2)$.
- Yderligere 1 point for at udlede $(\sin\, C/2)^2 = \frac{1}{4}$ eller tilsvarende.
- Yderligere 1 point for at udlede $C = 60°$.

Bemærkning: Dele af de trigonometriske løsninger kan gennemføres med brug af koordinater, vektorer eller komplekse tal, men der er ikke fundet løsninger med brug af disse værktøjer som fører til andre ligninger end de nævnte. Sådanne løsningsforsøg bedømmes derfor efter skemaet for den nærmest tilsvarende trigonometriske løsning.