Retningslinjer for bedømmelsen.
Georg Mohr-Konkurrencen 2009
2. runde

Det som skal vurderes i bedømmelsen af en besvarelse, er om deltageren har formået at analysere problemstillingen, kombinere de givne oplysninger til et svar på det stillede spørgsmål og argumentere overbevisende og udtømmende for svaret. Derimod er det ikke i sig selv væsentligt i hvilken grad deltageren viser beherskelse af matematikkens formelle apparat eller færdigheder inden for skolernes pensum.

Der kan gives indtil 4 point for hver af de 5 opgaver. En helt korrekt og fuldstændig besvarelse giver 4 point, og der gives ikke fuldt pointtal medmindre besvarelsen er i alt væsentligt korrekt og fuldstændig. For en delvis korrekt besvarelse eller blot skridt eller ideer som leder i retning af en løsning, kan der gives et eller flere point. Derimod giver regninger eller argumenter som ikke bringer deltageren nærmere en løsning, ikke point uanset om de er rigtige i sig selv. Tilfældige indfald uden funktion i sammenhængen tæller ikke i sig selv positivt ved bedømmelsen.

Bedømmelsen har til formål at fastslå hvem der har løst opgaverne bedst. Derfor skal kun konkrete skridt i retning af en løsning honoreres, og det skal ikke tages i betragtning om deltageren i øvrigt synes at have ydet en anerkendelsesværdig indsats.

Opgave 1

a. Løsning ved beregning af vinkler.

- Det giver ikke i sig selv point at udlede $\angle DAE = 80°$.
- Det giver 1 point at bestemme enten $\angle ABC$ og $\angle ACB$ eller $\angle BAC$ eller $\angle DAC$.
- Det giver 1 point at argumentere for at trekant BAD er ligebenet.
- Det giver yderligere 1 point at udlede at $\angle BDA = \angle DBA = 45°$.
- Det sidste point gives for at udregne v.

Bemærkning: En figur med gradtallet for *alle* relevante vinkler inklusive vinkel v giver i sig selv 2 point.

b. Løsning ved trigonometri

- Det giver 1 point at vise $\angle BAF = 80°$ eller $\angle DAF = 10°$, hvor F er skæringen mellem AC og BD.

- Det giver yderligere 1 point at nå frem til $|BD| = \sqrt{2}|AB|$, $|BF| = \frac{|AB|}{\sin v}\sin 80^\circ$ og $|DF| = \frac{|AB|}{\sin v}\sin 10^\circ$.
- Det giver yderligere 1 point at udtrykke $\sin v$ alene ved kendte størrelser.
- Det sidste point gives for at afslutte beregningen med resultatet $v = 55^\circ$.

Opgave 2

- Det giver 1 point at reducere ligningssystemet til en ligning med én ubekendt.
- Det giver 1 point at løse denne ligning.
- Det giver 1 point at udregne ligningssystemets løsninger ud fra løsningerne til ligningen i én variabel.
- Det giver herudover 1 point når der ud fra beregningens udformning, de ledsagende bemærkninger og en eventuel efterfølgende afprøvning ikke kan være tvivl om at de løsninger som er bestemt, er alle dem der findes, og kun dem.

Bemærkning: Det giver 1 point at se og *eftervise* at ligningerne er opfyldt for $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$ og $x = 2$, $y = -1$, uden nogen forudgående beregning.

Opgave 3

I det følgende betegner p antal chokolader, x antal chokolader på hvert fad og r antal tiloversblevne chokolader.

Generelt: Det giver ikke point at skrive at resultatet er 49, uden nogen form for argumentation. Det giver heller ikke point at finde en konkret mulig værdi af p, fx $p = 109$ eller $p = 229$, og derfra udlede at $r = 49$. Eksistensen af en værdi af p som opfylder opgavens beskrivelse, kræves ikke påvist.

a. Løsning ved opstilling af ligning.

- Det giver 1 point at opstille ligningen $p = 60x + r$.
- Det giver 1 point ud fra ligningen at argumentere for at 60 og r ikke har fælles divisorer.
- Det giver yderligere 1 point at indse at 2, 3 og 5 dermed ikke går op i r.
- Det giver yderligere 1 point at argumentere for at $r = 49$.

b. Løsning ved at betragte divisorer en ad gangen.

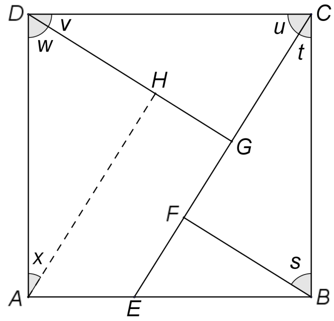
- Det giver 1 point at argumentere for at r ikke kan være lige da p i modsat fald bliver lige.
- Det giver 1 point at argumentere for at r ikke er delelig med 3 da p i modsat fald er delelig med 3.

- Det giver 1 point at argumentere for at r ikke er delelig med 5 da p i modsat fald er delelig med 5.
- Det giver yderligere 1 point at argumentere for at $r = 49$.

Opgave 4

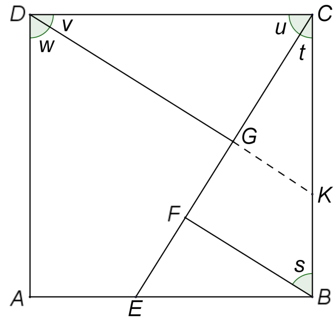
Generelt: Hvis en korrekt argumentation gennemføres i et specialtilfælde, for eksempel det tilfælde hvor A er midtpunkt af AB, trækkes 1 point fra hvad en tilsvarende besvarelse af det generelle problem ville give.

I alle løsningerne betegnes vinklerne således: $s = \angle CBF$, $t = \angle BCE$, $u = \angle DCE$, $v = \angle CDG$, $w = \angle ADG$ og $x = \angle DAH$, hvor H er projektionen af A på DG.



Der gælder $s = u = w$ og $t = v = x$. Sådanne relationer kræves bevist fx ved betragtning af komplementærvinkler eller henvisning til parvis parallelitet eller ortogonalitet af vinklernes ben og overensstemmende drejningsvinkler. Overalt i det følgende at det underforstået at længdeenheden er kantlængden af kvadratet $ABCD$.

a. Løsning ved drejning.
Påstanden følger af at F går over i G når kvadratet drejes 90° om sit centrum i retningen ABC. Dette er sandt fordi linjen BF afbildes i CE og linjen CE i DG som følge af ortogonaliteten af disse par af linjer eller af at der gælder $s = u$ og $t = v$. Alternativt er det sandt fordi trekanterne BCF og CDG er kongruente og ens orienterede. En drejning som afbilder G i F, kan også betragtes, eller man kan se på andre delfigurer end trekanterne BCF og CDG, for eksempel trekanterne BCE og CDK, hvor K er skæringspunktet mellem BC og forlængelsen af DG.



I disse trekanter er F og G fodpunkter for højden på hypotenusen. Sådanne varianter bedømmes efter retningslinjer svarende til nedenstående.

1 point for hvert af følgende.

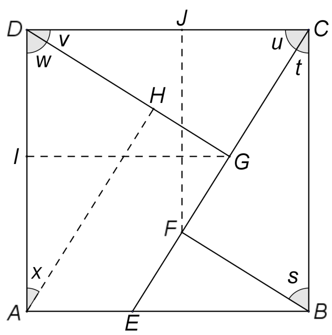
- Ideen at betragte en drejning om centrum.
- Bevis for at linjen BF ved drejningen afbildes i CE og linjen CE i DG, eller for kongruens af trekanterne BCF og CDG.
- Udtømmende argument for at drejningen så afbilder F i G.
- Udtømmende argument for at heraf følger $|DF| = |AG|$

b. Løsning ved kongruens
Påstanden følger af at trekanterne CDF og DAG er kongruente. I beviset herfor indgår $u = w$ og $|CF| = |DG|$, hvor det sidste følger af at trekanterne BCF og CDG er kongruente i kraft af $t = v$. Alternativt kan man bevise at trekanterne DFG og AGH er kongruente. Dette kræver at man foruden det allerede nævnte indser $|DG| = |AH|$ og $|FG| = |GH|$. Disse ligninger følger af at trekanterne CDG og DAH er kongruente på grund af $u = w$ eller $v = x$.

1 point for hvert af følgende.

- Tydelig hensigt at ville bevise påstanden ved at bevise at trekant CDF er kongruent med trekant DAG eller trekant DFG med trekant AGH.
- Bevis for $t = v$ og $u = w$
- Bevis for at trekant BCF er kongruent med trekant CDG, og dermed $|CF| = |DG|$.
- Bevis for at trekant CDF er kongruent med trekant DAG eller trekant DFG med trekant AGH, og dermed $|DF| = |AG|$.

c. Løsning ved ligedannethed og Pythagoras' sætning
Trekanterne CDF og DAG deles op med højderne DG og GI. Så er trekanterne CDG og DGI ligedannede fordi CD og GI er parallelle. Dette benyttes sammen med Pythogoras' sætning anvendt flere gange til at udtrykke $|DF|^2$ og $|AG|^2$ ved $|CF| = |DG|$ eller en hermed injektivt forbundet længde. Ved reduktion ses at de to udtryk er identiske. Ligningen $|CF| = |DG|$ følger af $s = u$ eller $t = v$.



Alternativt kan trekanterne deles op med højderne FJ og AH. Så behøves foruden det allerede nævnte ligningen $|DG| = |AH|$, som følger af $u = w$ eller $v = x$.

1 point for hvert af følgende.

- Indførelse af højden GI eller FJ og bevis for at trekanterne CDG og DGI er ligedannede, eller trekanterne BCF og CFJ er ligedannede.
- Bevis for $s = u$ eller $t = v$ og dermed $|CF| = |DG|$.
- Udtryk for $|DF|^2$ og $|AG|^2$ som funktioner af $|CF| = |DG|$ eller en hermed injektivt forbundet længde.
- Reduktion af disse udtryk så de ses at være identiske.

d. Løsning ved trigonometri

1 point for hvert af følgende.

- Tydeligt indset korrekt strategi for trigonometrisk bevis.
- $|CF|$ og $|DG|$ korrekt udtrykt ved vinkler i figuren.
- $|DF|$ og $|AG|$ eller $|DF|^2$ og $|AG|^2$ korrekt udtrykt ved vinkler i figuren.
- Vise $t = v$ og $u = w$ og derved opnå identiske udtryk for $|DF|$ og $|AG|$ eller $|DF|^2$ og $|AG|^2$.

e. Løsning ved analytisk geometri.

For eksempel vælge $(0,0) = C$, $(1,0) = B$, $(0,1) = D$ og lade a betegne CE's hældningskoefficient. Vi har så ligningerne CE: $y = ax$, BF: $y = -\frac{1}{a}(x-1)$, DG: $y = -\frac{1}{a}x + 1$. Ved parvis løsning af ligningerne får man $F = \frac{1}{(a^2+1)}(1, a)$ og $G = \frac{1}{(a^2+1)}(a, a^2)$. Med brug af $D = (0,1)$ og $A = (1,1)$ udtrykkes $|DF|^2$ og $|AG|^2$ med afstandsformlen. Ved reduktion ses at udtrykkene er identiske.

1 point for hvert af følgende.

- Indføre koordinatsystem og opstille korrekte ligninger for linjerne CE, BF og DG udtrykt ved én af hældningskoefficienterne, én af normalvektorerne eller lignende.
- Udtrykke koordinaterne til F og G ved de samme konstanter.
- Udtrykke afstandskvadraterne $|DF|^2$ og $|AG|^2$ ved ligningernes konstanter.
- Reducere til identiske udtryk og heraf konkludere at der gælder $|DF| = |AG|$.

Opgave 5

- Det giver 1 point ud fra konkret eksempel på en rute at argumentere for at $(n+1)^2 - 1$ er en mulig rutelængde når n er lige.
- Det giver 1 point ud fra konkret eksempel på en rute at argumentere for at $(n+1)^2 - 2$ er en mulig rutelængde når n er ulige.
- Det giver 1 point at argumentere for at en rute umuligt kan være længere end $(n+1)^2 - 1$ når n er lige.
- Det giver 1 point at argumentere for at en rute umuligt kan være længere end $(n+1)^2 - 2$ når n er ulige.