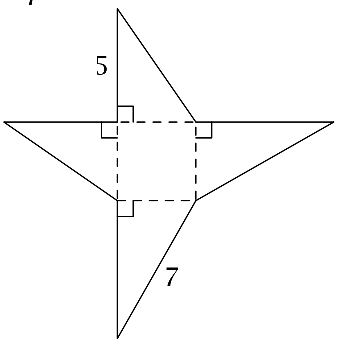
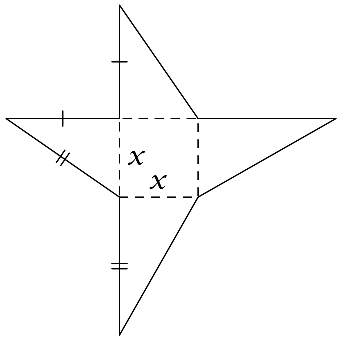
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2005

Opgave 1. *Figuren stammer fra et udklipsark. Når sidefladerne foldes op langs de stiplede linjer, fremkommer en (ikke ligesidet) pyramide med kvadratisk grundflade. Beregn grundfladens areal.*





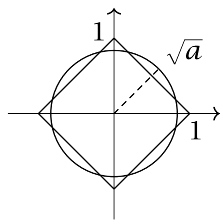
Løsning. Sidelængden i den kvadratiske grundflade kaldes x. Hypotenusen i en retvinklet trekant med kateterne x og 5 danner fælles kant i pyramiden med en katete i en retvinklet trekant hvor den anden katete er x, og hypotenusen er 7. Ifølge Pythagoras gælder så $x^2 + 5^2 = 7^2 - x^2$, og dermed er grundfladens areal $x^2 = \frac{49-25}{2} = 12$.

Opgave 2. *Bestem for ethvert positivt reelt tal a antallet af løsninger (x, y) til ligningssystemet*

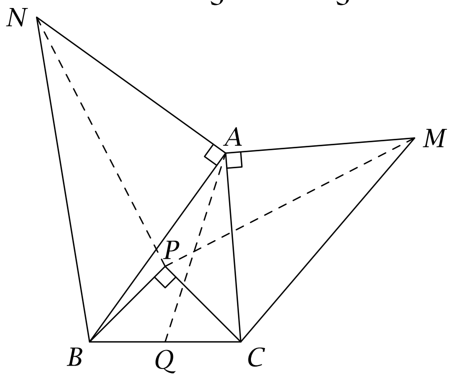
$$|x| + |y| = 1,$$
$$x^2 + y^2 = a,$$

hvor x og y er reelle tal.

Løsning. Opgaven løses grafisk. Ligningerne $|x|+|y| = 1$ og $x^2+y^2 = a$ beskriver henholdsvis et kvadrat med centrum i $(0,0)$ og en cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{a}$ (se figuren), og løsningerne repræsenteres derfor af skæringspunkterne mellem kvadratet og cirklen. Kvadratets diagonal har længde 2, og med Pythagoras ses at sidelængden er $\sqrt{2}$. Afstanden fra $(0,0)$ til kvadratets side er derfor $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs. hvis radius i cirklen er $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hvilket svarer til $a = \frac{1}{2}$, tangerer cirklen dermed kvadratets fire sider. Hvis radius i cirklen er $\sqrt{a} = 1$, dvs. hvis $a = 1$, vil cirklen gå igennem kvadratets fire hjørner. Hvis $\frac{1}{2} < a < 1$, vil cirklen derfor skære hver side netop to gange, og der er dermed otte løsninger til ligningssystemet. Hvis $a = 1$, skærer cirklen kvadratet i de fire hjørner af kvadratet, og hvis $a = \frac{1}{2}$ i midtpunkterne af de fire sider, og der er dermed fire løsninger til ligningssystemet. Hvis $a < \frac{1}{2}$ eller $a > 1$, er der ingen løsninger da cirklen ikke skærer kvadratet.



Opgave 3. *Punktet P ligger inden i $\triangle ABC$ så $\triangle BPC$ er ligebenet, og vinkel P er ret. Desuden er $\triangle BAN$ og $\triangle CAM$ begge ligebenede og med en ret vinkel i A, og begge ligger uden for $\triangle ABC$. Vis at $\triangle MNP$ er ligebenet og retvinklet.*



Løsning. Lad Q være midtpunktet af siden BC. Vi ønsker at vise at trekanterne NBP og ABQ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. Bemærk først at $\angle NBP = 45° + \angle ABP = \angle ABQ$. Ifølge Pythagoras er $|NB| = \sqrt{2}|AB|$ og $|BP| = \sqrt{2}|BQ|$, hvilket viser at trekanterne NBP og ABQ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. På tilsvarende måde ser man at trekant MCP og trekant ACQ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. Dette viser at $|NP| = \sqrt{2}|AQ| = |MP|$. Desuden er $\angle NPM = 360° - (\angle NPB + \angle MPC) - \angle BPC = 360° - (\angle AQB + \angle AQC) - 90° = 360° - 180° - 90° = 90°$. Dermed er trekant MNP ligebenet og retvinklet.

Opgave 4. *Fjorten elever skriver hver et helt tal på tavlen. Da de sidenhen møder deres matematiklærer Homer Grog, fortæller de ham at uanset hvilket tal de slettede på tavlen, så kunne de resterende tal deles i tre grupper med samme sum. De fortæller ham også at tallene på tavlen var hele tal. Er det nu muligt for Homer Grog at afgøre hvilke tal eleverne skrev på tavlen?*

Løsning. Ja, det er muligt. Først viser vi at alle tallene på tavlen er delelige med 3. Kald de 14 tal for $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{14}$ og deres sum for s. Tallet 3 går op i $s - x_i$ for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, 14$, da de 14 tal kan inddeles i tre grupper med samme sum når man fjerner et tal. Dette betyder at også

$$(s - x_1) + (s - x_2) + \cdots + (s - x_{14}) = 14s - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}) = 13s$$

er delelig med 3, og da 3 er et primtal som ikke går op i 13, må 3 gå op i s. Men vi ved også at 3 går op i $s - x_i$ for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, 14$, og dermed må 3 gå op i hvert af de 14 tal. Vi har nu vist at alle tallene på tavlen er delelige med 3. Antag nu at mindst et af tallene er forskelligt fra 0. Der findes dermed et positivt helt tal n så 3^n går op i alle 14 tal, mens 3^{n+1} ikke går op i alle 14 tal. Dividerer vi tallene med 3^n, opnår vi 14 nye tal hvor mindst et tal ikke er deleligt med 3. De 14 nye tal må også have egenskaben at hvis man fjerner et tal, kan de resterende 13 deles i tre grupper med samme sum, men det har vi lige vist medfører at alle tallene er delelige med 3, hvilket ikke er rigtigt. Dermed er antagelsen om at mindst et af tallene er forskelligt fra 0, forkert, og det vil sige at alle tallene på tavlen må være 0. Det er altså muligt for Homer Grog at afgøre hvilke tal eleverne skrev på tavlen.

Opgave 5. *For hvilke reelle tal p har ligningssystemet*

$$
\begin{aligned}
x_1^4 + \frac{1}{x_1^2} &= px_2,\\
x_2^4 + \frac{1}{x_2^2} &= px_3,\\
&\vdots\\
x_{2004}^4 + \frac{1}{x_{2004}^2} &= px_{2005},\\
x_{2005}^4 + \frac{1}{x_{2005}^2} &= px_1
\end{aligned}
$$

netop én løsning $(x_1, x_2, \dots, x_{2005})$, hvor $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$ er reelle tal?

Løsning. Da ligningssystemets venstresider alle er positive, er der ingen løsninger når $p = 0$. Desuden er $(x_1, x_2, \dots, x_{2005})$ en løsning for p netop hvis $(-x_1, -x_2, \dots, -x_{2005})$ er en løsning for $-p$. Det er derfor tilstrækkeligt at se på tilfældet hvor p er positiv. Først overvejer vi hvad der sker hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2005} = x$. I dette tilfælde er alle ligningerne $x^4 + \frac{1}{x^2} = px$, og hvis denne ligning har mere end en løsning, har det oprindelige ligningssystem også. Ligningen kan omformes til den skjulte andengradsligning $(x^3)^2 - px^3 + 1 = 0$ ved at gange med x^2 på begge sider (bemærk $x \neq 0$), og denne ligning har mere end en løsning hvis diskriminanten $(-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = p^2 - 4$ er positiv, dvs. hvis $p > 2$. Vi kan derfor slutte at $p \leq 2$ hvis det oprindelige ligningssystem skal have højst en løsning.

Hvis $0 < p \leq 2$ og $(x_1, x_2, \dots, x_{2005})$ er en løsning, er

$$
px_{i+1} = x_i^4 + \frac{1}{x_i^2} = \left(x_i^2 - \frac{1}{x_i}\right)^2 + 2x_i \geq 2x_i,
$$

og dermed

$$
x_{i+1} \geq \frac{2}{p} x_i \geq x_i
$$

for alle $i = 1, 2, \dots, 2005$ (bemærk at her opfattes $x_{2005+1} = x_1$). Altså er $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2005} \leq x_1$, og dermed er tallene $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$ alle ens. Faktoren $\frac{2}{p}$ i uligheden ovenfor er dermed 1, så $p = 2$, og tallene $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$ er løsninger til ligningen $(x^3)^2 - 2x^3 + 1 = 0$, dvs. $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2005} = x = 1$. Der er altså netop en løsning til ligningssystemet for $p = 2$. I alt kan vi konkludere at ligningssystemet har præcis en løsning netop når $p = \pm 2$.