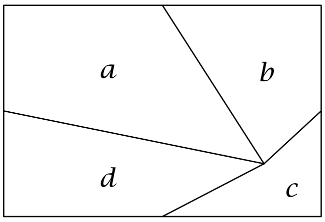
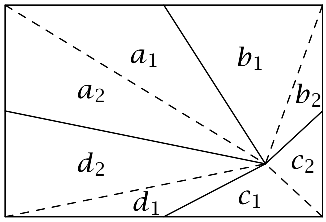
Georg Mohr-Konkurrencen

Løsninger · 2002

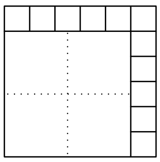
Opgave 1. *Fra et indre punkt i et rektangel trækkes forbindelseslinjer til de fire siders midtpunkter. Herved opstår fire områder (polygoner) med arealerne a, b, c og d (se figur). Bevis at $a + c = b + d$.*





Løsning. Opdel som vist områderne ved hjælp af forbindelseslinjer til rektanglets hjørner, og lad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 betegne arealerne af de fremkomne trekanter. Da trekanter med samme højde og grundlinje har samme areal, er $a_1 = b_1$, $b_2 = c_2$, $c_1 = d_1$ og $d_2 = a_2$. Dermed er $a+c = a_1+a_2+c_1+c_2 = b_1+d_2+d_1+b_2 = b+d$.

Opgave 2. *Bevis at for ethvert helt tal n større end 5 kan et kvadrat deles i n kvadrater.*
Løsning. Antag at kvadratet har sidelængde 1. For ethvert helt tal $k > 1$ kan kvadratet deles i et kvadrat med sidelængde $\frac{k-1}{k}$ og $2k - 1$ kvadrater med sidelængde $\frac{1}{k}$, altså i alt $2k$ kvadrater (se figur for $k = 6$).

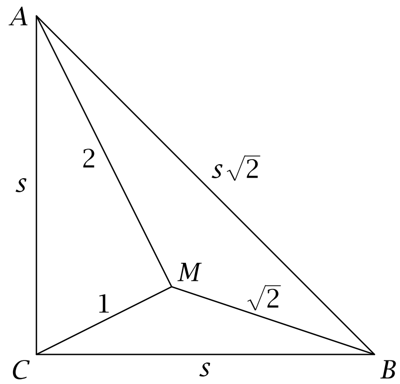


Det største af de $2k$ kvadrater kan yderligere deles i fire kvadrater således at det oprindelige kvadrat bliver inddelt i $2k + 3$ kvadrater. Da alle hele tal n større end 5 kan skrives på formen $2k$ eller $2k + 3$ for et helt tal $k > 1$, har vi hermed vist at et kvadrat kan deles i n kvadrater for $n > 5$.

Opgave 3. *To positive hele tal har summen* 2002. *Kan* 2002 *gå op i de to tals produkt?*
Løsning. Svaret er nej, og dette bevises indirekte ved at antage at det er muligt, og herefter vise at dette fører til en modstrid. Antag at der for to positive hele tal a og b gælder at $a + b = 2002$, samt at ab er delelig med 2002. Da $ab = a(2002 - a) = 2002a - a^2$, og både ab og $2002a$ er delelige med 2002, er også a^2 delelig med 2002. Desuden er $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at primtallene 2, 7, 11 og 13 vil gå op i a^2 og dermed også i a. Dermed vil $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ også gå op i a, hvilket er umuligt da $a < 2002$.

Opgave 4. *I trekant ABC er $\angle C = 90^\circ$ og $|AC| = |BC|$. Desuden er M et indre punkt i trekanten så $|MC| = 1$, $|MA| = 2$ og $|MB| = \sqrt{2}$. Beregn $|AB|$.*

Løsning. Kald kateternes længde for s. Ifølge Pythagoras er længden af hypotenusen $\sqrt{2}s$. Siderne i $\triangle AMB$ er $\sqrt{2}$ gange så store som siderne i $\triangle BMC$, og de to trekanter er dermed ensvinklede. Nu kan vi udregne vinklerne ved M: $\angle AMB = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 180^\circ - (\angle MBC + \angle MBA) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Dermed er $\angle CMA = 360^\circ - 2\angle AMB = 90^\circ$. Trekant AMC er derfor retvinklet, og Pythagoras giver at $s = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, og $|AB| = \sqrt{2}s = \sqrt{10}$.



Opgave 5. *Homer Grog har på ti sedler skrevet tallene* 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, *ét tal på hver seddel. Han arrangerer sedlerne i en rundkreds og forsøger at få den største sum S af tallene på tre på hinanden følgende sedler til at blive mindst mulig. Hvad er den mindste værdi S kan antage?*

Løsning. Summen S er 29 ved rækkefølgen $1 \to 17 \to 9 \to 3 \to 15 \to 7 \to 5 \to 13 \to 11 \to 4$ (cyklisk). Vi viser nu at S ikke kan blive mindre end 29. Betragt for en vilkårlig placering af sedlerne de tre grupper med tre sedler som ligger på plads 1–3, 4–6 og 7–9 efter sedlen med tallet 1. Summen af tallene i de tre grupper er 84, og dermed er gennemsnitssummen for de tre grupper 28. I en af grupperne er der tre ulige tal, og dermed er summen ulige og altså ikke 28. Altså vil mindst en af de tre grupper have en sum som er større end 28. Samlet har vi vist at den mindste værdi S kan antage, er 29.