Baltic Way

14. November 2026, Vilnius, Litauen

Version: Danish

Tid til rådighed: 4 h 30 min
Tid til spørgsmål: 30 min
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1 Turbo springer mellem de positive heltal, således at til tiden $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ er Turbo på heltallet a_t. Turbo begynder på tallet a_1, og vælger de følgende tal således at

$$\begin{aligned} a_t \cdot a_{t+1} &\geqslant t + 401 \qquad \text{hvis } t \text{ er ulige,} \\ a_t \cdot a_{t+1} &\leqslant t + 401 \qquad \text{hvis } t \text{ er lige} \end{aligned}$$

for alle positive heltal t.

Bevis hvis der ikke findes 410 på hinanden følgende tal, som alle bliver besøgt af Turbo, så må Turbo besøge mindst et af tallene 2026 og 2027.

Opgave 2 Find alle funktioner $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ så

$$f(x + 2y + f(x)) = y + f(y + 2x)$$

gælder for alle $x, y > 0$.

Opgave 3 Lad $n > 1$ være et positivt heltal. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ være positive reelle tal med $x_{n+1} = x_1$, som opfylder at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} > 2n.$$

Bevis at

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^3 + \frac{1}{x_i^3} \right) > 5n.$$

Opgave 4 Find alle funktioner $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ så

$$(f(x) + f(y) - 1)\, f(x + y) = f(x) f(y)\, (2f(x + y) - 1)$$

gælder for alle rationelle tal x, y.

Opgave 5 Lad $n \geqslant 3$ være et heltal. Bestem det mindste reelle tal M, så

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} < M$$

gælder for alle positive reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Opgave 6 Et 2027×2027 bræt består af felter. Nogle af diagonalerne af felterne er indtegnet, vi kalder disse *vægge*. Hvert felt indeholder højst en væg, og feltet øverst til venstre indeholder ingen vægge.

En robot starter i det øverste venstre hjørne. Den begynder at bevæge sig mod det nedre højre hjørne og bevæger sig altid i lige linjer. Hvis robotten rammer midten af et felt, der indeholder en væg gør den følgende:

- Hvis væggen står vinkelret på den retning robotten bevæger sig, vælger robotten at dreje 90 grader entent til højre eller venstre.
- Hvis væggen er parallel med den retning robotten bevæger sig, fortsætter den med at bevæge sig i samme retning.

Robotten stopper hvis den rammer kanten på brættet.

Et felt kaldes *opnåeligt*, hvis robotten kan foretage sine valg således, at den besøger det indre af dette felt. Bestem det mindste antal vægge, der må være tegnet, for at mindst halvdelen af alle felter er opnåelige, eller bevis at sådan en indtegning af vægge ikke er mulig.

Opgave 7 Der er $n > 1$ kort og på hvert kort står et unikt primtal. Anna ved ikke hvilke primtal, der står på kortene. Kortene placeres med bagsiden opad på en række, således at tallene på kortene ikke kan ses. I et træk vælger Anna et eller flere på hinanden følgende kort og bliver fortalt, hvad produktet af primtallene på disse kort er. Bestem det mindste antal træk Anna må lave for at kunne bestemme hvilket primtal, der står på hvert kort.

Opgave 8 Der er $n > 1$ dansere, som står i en cirkel, og danser til en evig sang. Ved hvert taktslag svinger hver danser enten med sit højre eller venstre ben. Efter det første taktslag, beslutter de hvilket ben de svinger efter følgende regel: En danser svinger sit højre ben, hvis danseren svingede samme ben som sin højre nabo ved forrige taktslag ellers svinger danseren sit venstre ben. Bestem antallet af konfigurationer, hvorpå danserne kunne have svunget deres ben ved første taktslag, hvis der findes et fremtidigt taktslag, hvor alle dansere svinger samme ben.

Bemærkning: To konfigurationer er forskellige, hvis der findes en danser, som svinger forskellige ben i de to konfigurationer.

Opgave 9 I den baltiske skov har hver bille en unik streng af 3 cifre skrevet på ryggen. To biller er fjender, hvis strengen bestående af de to sidste cifre på den ene bille er den samme som strengen bestående af de to første cifre på den anden bille. En bille kan være sin egen fjende.

Hvad er det største antal biller, der kan leve i skoven, hvis ingen biller har en fjende.

Opgave 10 Lad n være et positivt heltal. Det øverste højre felt af et $2n \times 2n$ bræt er hvidt, og alle andre felter er røde. Den Grimme Ælling udfører følgende operation et antal gange:

1. Den Grimme Ælling vælger en række eller kolonne, som indeholder et ulige antal røde felter
2. Farverne i den valgte række eller kolonne byttes rundt, så alle røde felter bliver hvide og alle hvide felter bliver røde.

Bestem det maksimale antal hvide felter, der kan være efter et endeligt antal operationer, udtrykt ved n.

Opgave 11 I en spidsvinklet trekant ABC med $AB < AC$ ligger punktet D på siden BC. Vinkelhalveringslinjerne til vinklerne BAD og CAD skærer de omskrevne cirkler til trekanterne ABD og ACD igen i henholdsvis X og Y. På den omskrevne cirkel til trekant ABC er N midtpunktet af cirkelbuen BC, der indeholder A. Bevis at punkterne X, A, N og Y ligger på en cirkel.

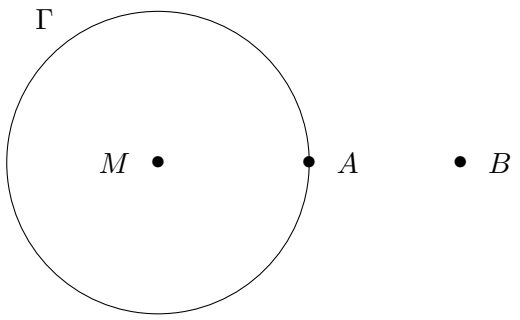
Opgave 12 Lad ABC være en spidsvinklet trekant med $AB < AC$. Lad Γ være den omskrevne cirkel til trekant ABC og O centrum for Γ. Linjen AO skærer Γ igen i X. Lad D være fodpunktet fra højden fra A på BC. Punkterne E og F ligger på henholdsvis linjestykkerne AC og AB, sådan at $AC \perp DE$ og $AB \perp DF$. Linjerne DX og EF skærer i L. Linjen AL skærer Γ igen i K. Bevis at E, F, X og K ligger på en cirkel.

Opgave 13 Lad den omskrevne cirkel til ABC være Γ og lad X være et punkt på Γ. Punkterne D, E og F er faste og ligger på henholdsvis linjestykkerne BC, CA og AB. Midpunktet af linjestykkerne XD, XE og XF er henholdsvis D', E' og F'. Bevis at når X varierer på Γ, bevæger centrum for den omskrevne cirkel til trekant $D'E'F'$ sig på en cirkel.

Opgave 14 I en geometri app er en cirkel med centrum i M, der går gennem A, indtegnet. Punktet B er spejlingen af M i A. Vi siger at punkterne A, B, og M er *konstrueret*. I et træk vælger brugeren to forskellige konstruerede punkter P og Q, og trykker på en af to knapper.

- Knap 1 indtegner linjen mellem P og Q.
- Knap 2 indtegner cirklen med centrum P der går gennem Q.

Efter at en af knapperne er blevet trykket på, bliver alle skæringspunkter mellem indtegnede objekter konstrueret.



Bestem det mindste antal træk, der er nødvendigt for at konstruere to punkter $X, Y \in \Gamma$, så B er spejlningen af X i Y.

Opgave 15 Lad ABC være en spidsvinklet trekant og O centrum for den omskrevne cirkel. Vinkelhalverinslinjen af vinkel BAC skærer linjestykket BC i D og den omskrevne cirkel til trekant ABC igen i M. En cirkel med centrum D og radius DB skærer linjen BM igen i N og linjestykket AC i to forskellige punkter K og L, sådan at L er mellem A og K. Linjerne BL og NK skærer i E, mens linjerne BM og AC skærer i F. Bevis at ED og OF står vinkelrette på hinanden.

Opgave 16 Lad $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ være en multiplikativ funktion, som opfylder at $f(n) \leqslant n$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Et par af positive heltal (a_1, d) er *litauisk*, hvis følgen givet ved $a_{n+1} = f(a_n + d)$ er begrænset. Bevis at ethvert par af positive heltal er litauisk, hvis og kun hvis der eksisterer uendeligt mange primtal p, således at $f(p^{k_p}) < p^{k_p}$ for et positivt heltal k_p.

Bemærkning: En funktion $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ er *multiplikativ*, hvis $f(mn) = f(m)f(n)$ for alle indbyrdisk primiske positive heltal $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. En følge $a_1, a_2, \ldots$ er *begrænset*, hvis der eksisterer et M, således at $|a_n| < M$ for alle n.

Opgave 17 Et positivt heltal n kaldes *farligt*, hvis det kan skrives som $n = a \cdot b$, hvor a og b er positive heltal med $|a - b| < 6$. Findes der en uendelig strengt voksende aritmetisk progression af positive heltal, der ikke indeholder nogle farlige tal.

Opgave 18 Bestem alle positive heltal k, for hvilke der eksisterer et positivt heltal n, således at

$$n + k \mid n! + 1.$$

Opgave 19 Tallene $1, 2, \ldots, 2026$ er skrevet på en tavle. Et *dårligt par* er et par af positive heltal (a, b), hvor $a < b$, og a ikke deler b. I et træk vælger Georg et dårligt par (a, b), der står skrevet på tavlen, sletter a og b og skriver på tavlen, den rest han får, når han deler b med a.

Find det mindste antal træk Georg må udføre, for at kunne opnå, at der ikke er nogle dårlige par på tavlen.

Opgave 20 Lad $n \geqslant 3$. De positive heltal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er placeret i en cirkel i denne rækkefølge, så hvert tal i cirklen deler summen af dets to naboer. Lad m være det mindste tal blandt $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Bestem alle mulige værdier af

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_1}$$

udtrykt ved n og m.