

Varighed: 4 timer og 30 minutter.

Det er tilladt at stille spørgsmål de første 30 minutter.

Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1. Lad n være et positivt heltal. Der skal vælges n tal fra følgende tabel:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

Der må ikke vælges to tal fra samme række eller samme søjle. Find den maksimale værdi af produktet af de n tal.

Opgave 2. Lad k og n være positive heltal, og lad $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ være forskellige heltal. Et polynomium P med heltallige koefficienter opfylder at

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$$

og

$$P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013.$$

Bestem den maksimale værdi af kn .

Opgave 3. Lad $\mathbb{R}$ være mængden af reelle tal. Bestem alle funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y, \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Opgave 4. Vis at følgende ulighed gælder for alle positive reelle tal x, y, z :

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y + z}{2}.$$

Opgave 5. Tallene 0 og 2013 er skrevet ved to modstående hjørner på en terning. Ved de resterende seks hjørner i terningen skal der skrives reelle tal. På hver af terningens kanter skrives forskellen på tallene ved kantens endepunkter. Hvornår er summen af kvadraterne på tallene på kanterne minimal?

Opgave 6. Julemanden har mindst n gaver til n børn. Barn nummer i kan lide $x_i > 0$ af disse gaver, for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Antag at

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Vis at julemanden kan give hvert barn en gave barnet kan lide.

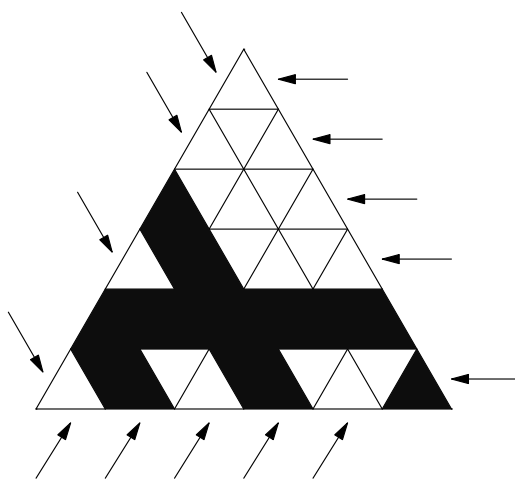
Opgave 7. På en tavle er der skrevet et positivt heltal. To spillere A og B spiller følgende spil: I hvert træk skal man vælge en divisor m i det tal n der står på tavlen, hvor $1 < m < n$, og erstatte n med $n - m$. Spiller A starter, og spillerne skiftes til at trække. Den spiller som først ikke kan trække, har tabt. For hvilke starttal er der en vindende strategi for B ?

Opgave 8. I en sauna er der n rum, hvert med ubegrænset kapacitet. Intet rum må benyttes af mænd og kvinder på samme tid. Desuden ønsker mænd kun at dele sauna med mænd de ikke kender, og kvinder ønsker kun at dele sauna med kvinder de kender. Find det største tal k så k vilkårlige heteroseksuelle par kan besøge saunaen på samme tid når to mænd kender hinanden netop når deres koner kender hinanden.

Opgave 9. I et land er der 2014 lufthavne, og der findes ikke tre lufthavne som ligger på linje. Der er et direkte fly mellem to lufthavne hvis og kun hvis linjen gennem de to lufthavne inddeler landet i to dele som hver indeholder 1006 lufthavne. Vis at der ikke findes to lufthavne så man kan rejse fra den ene til den anden og undervejs besøge samtlige andre lufthavne netop en gang.

Opgave 10. En hvid ligesidet trekant er opdelt i n^2 ens mindre trekanter af linjer som er parallelle med trekantens sider. En *linje af trekanter* består af alle trekanter placeret mellem to på hinanden følgende parallelle linjer som udgør trekantsnettet. Desuden betragtes en trekant i et hjørne også som en linje af trekanter.

Vi ønsker at male hele trekanten sort ved en række af følgende operationer: Vælg en linje af trekanter som indeholder mindst en hvid trekant, og mal linjen af trekanter sort. (En mulig situation med $n = 6$ efter fire operationer er vist på figur 1. Pilene viser hvilke muligheder man har for den næste operation i denne situation). Bestem det mindst mulige og det størst mulige antal operationer.



Figur 1

Opgave 11. I en spidsvinklet trekant ABC med $|AC| > |AB|$ er D projektionen af A på BC , og E og F er projektionerne af D på henholdsvis AB og AC . Lad G være skæringspunktet mellem linjen AD og linjen EF . Lad desuden H være det andet skæringspunkt mellem linjen AD og den omskrevne cirkel til trekant ABC . Vis at

$$|AG| \cdot |AH| = |AD|^2.$$

Opgave 12. Trapezet $ABCD$, hvor AB og CD er parallelle, opfylder at den omskrevne cirkel til trekant BCD skærer linjen AD i punktet E som er forskelligt fra A og D . Vis at den omskrevne cirkel til trekant ABE tangerer linjen BC .

Opgave 13. Alle sidefladerne i et tetraeder er retvinklede trekanter. Desuden har tre af dets kanter den samme længde s . Bestem tetraederets rumfang.

Opgave 14. Cirklerne α og β har samme radius og skærer hinanden i to punkter hvoraf det ene kaldes P . Punkterne A og B er punkterne diametralt modsat P på henholdsvis α og β . En tredje cirkel med samme radius går gennem P og skærer cirklerne α og β i henholdsvis punktet X og punktet Y .

Vis at linjerne XY og AB er parallelle.

Opgave 15. Fire cirkler i planen har samme centrum, og deres radier danner en strengt voksende differensrække. Vis at der ikke findes et kvadrat hvis hjørner ligger på fire forskellige cirkler.

Opgave 16. Vi kalder et positivt heltal n *nydeligt* hvis der findes et heltal k , $1 < k < n$, så

$$1 + 2 + \cdots + (k - 1) = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + n.$$

Findes der et nydeligt tal N som opfylder uligheden

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4 ?$$

Opgave 17. Lad c og n , $n > c$, være positive heltal. Marys lærer skriver n positive heltal på tavlen. Er det sandt at Mary for alle n og c kan kalde tallene på tavlen $a_1, \dots, a_n$ i en eller anden rækkefølge så det cykliske produkt $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ bliver kongruent med enten 0 eller c modulo n ?

Opgave 18. Bestem alle par (x, y) af heltal så $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Opgave 19. Lad a_0 være et positivt heltal og $a_n = 5a_{n-1} + 4$, for alle $n \geq 1$. Kan a_0 vælges så a_{54} er et multiplum af 2013?

Opgave 20. Bestem alle polynomier f med ikke-negative heltallige koefficienter så der for alle primtal p og alle positive heltal n eksisterer et primtal q og et positivt heltal m så $f(p^n) = q^m$.