Opgaver –Dansk version–

Opgave 1 De reelle tal $x_1, \dots, x_{2011}$ opfylder

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011}$$

hvor $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ er en permutation af $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$. Vis at $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

Opgave 2 Lad $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ være en funktion så der for alle heltal x og y gælder:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Vis at f er begrænset, dvs. at der findes en konstant C så

$$-C < f(x) < C$$

for alle heltal x.

Opgave 3 En følge $a_1, a_2, a_3, \dots$ af ikke-negative heltal opfylder at a_{n+1} er det sidste ciffer i $a_n^n + a_{n-1}$ for alle $n > 2$. Er det altid sandt at der findes et heltal n_0 så følgen $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ er periodisk?

Opgave 4 Lad a, b, c, d være ikke-negative reelle tal så $a + b + c + d = 4$. Vis uligheden

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \le \frac{4}{9}.$$

Opgave 5 Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion så

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

for alle reelle tal x. Bestem $f(0)$.

Opgave 6 Lad n være et positivt heltal. Vis at antallet af linjer der går gennem origo og netop et andet punkt med heltallige koordinater (x, y), $0 \le x, y \le n$, er mindst $\frac{n^2}{4}$.

Opgave 7 Lad T betegne mængden $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \le a < b \le 6\}$ med 15 elementer. Lad S være en delmængde af T som opfylder at alle seks cifre $1, 2, \dots, 6$ indgår, samt at vilkårlige tre elementer ikke samlet indeholder alle seks cifre. Hvor mange elementer kan der maksimalt være i S?

Opgave 8 I Greifswald er der tre skoler A, B og C, hvor der på hver går mindst en elev. For hvert valg af tre elever, en fra A, en fra B og en fra C, er der to som kender hinanden, og to som ikke kender hinanden. Vis at mindst et af følgende udsagn er sandt:

- Der er en elev fra A som kender alle elever fra B.
- Der er en elev fra B som kender alle elever fra C.
- Der er en elev fra C som kender alle elever fra A.

Opgave 9 Et rektangel består af $m \times n$ enhedskvadrater. En farvning af rektanglet i to farver (sort og hvid) kaldes *gyldig* hvis den opfylder følgende betingelser:

- Alle enhedskvadrater der støder op til kanten af rektanglet, er farvet sorte.
- I intet 2×2 kvadrat har de fire enhedskvadrater samme farve.
- I intet 2×2 kvadrat er de fire enhedskvadrater farvet så to diagonalt modstående kvadrater er sorte, mens de to andre er hvide.

For hvilke m og n (med $m, n \ge 3$) har rektanglet en gyldig farvning?

Opgaver –Dansk version–

Opgave 10 To personer spiller følgende spil med hele tal. Starttallet er 2011^{2011}. Spillerne skiftes til at trække. I hvert træk trækker man et tal mellem 1 og 2010 fra (begge tal inkluderet), eller dividerer med 2011 og runder om nødvendigt ned til nærmeste heltal. Spilleren som først opnår et ikke-positivt heltal, vinder. Hvilken spiller har en vindende strategi?

Opgave 11 Lad AB og CD være to diametre i cirklen $\mathcal{C}$. For et vilkårligt punkt P på $\mathcal{C}$ lad R og S være projektionerne af P på henholdsvis AB og CD. Vis at længden af RS er uafhængig af valget af P.

Opgave 12 Lad P være et indre punkt i kvadratet $ABCD$ så $PA : PB : PC$ er $1 : 2 : 3$. Bestem vinklen $\angle BPA$.

Opgave 13 Lad E være et indre punkt i den konvekse firkant $ABCD$. Konstruer trekanterne $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ og $\triangle DAI$ på ydersiden af firkanten så $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ og $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Lad henholdsvis P, Q, R og S være projektionerne af E på linjerne AB, BC, CD og DA. Vis at hvis firkanten $PQRS$ er indskrivelig, da er

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC\,.$$

Opgave 14 Den indskrevne cirkel til trekant ABC rører siderne BC, CA, AB i henholdsvis D, E, F. Lad G være et punkt på den indskrevne cirkel så FG er diameter i cirklen. Linjerne EG og FD skærer hinanden i H. Vis at $CH \parallel AB$.

Opgave 15 Lad $ABCD$ være en konveks firkant så $\angle ADB = \angle BDC$. Antag at punktet E på siden AD opfylder at

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Vis at $\angle EBA = \angle DCB$.

Opgave 16 Lad a være et helt tal. Følgen $x_0, x_1, \ldots$ er defineret ved $x_0 = a$, $x_1 = 3$ og

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ for alle } n > 1.$$

Bestem det største heltal k_a for hvilket der findes et printal p så p^{k_a} går op i $x_{2011} - 1$.

Opgave 17 Bestem alle positive heltal d for hvilke der gælder at hvis d går op i et positivt heltal n, da går d også op i ethvert heltal der kan fås ved at omrangere cifrene i n.

Opgave 18 Bestem alle par (p, q) af primtal for hvilke både $p^2 + q^3$ og $q^2 + p^3$ er kvadrattal.

Opgave 19 Lad $p \neq 3$ være et primtal. Vis at der findes en ikke-konstant aritmetisk progression af positive heltal x_1, x_2, $\ldots$, x_p så produktet af tallene er et kubiktal.

Opgave 20 Et helt tal $n \geq 1$ kaldes *balanceret* hvis det har et lige antal forskellige primdivisorerer. Vis at det findes uendeligt mange positive heltal n så netop to af tallene n, $n + 1$, $n + 2$ og $n + 3$ er balancerede.