Baltic Way 2008

Gdańsk, 8. november 2008

Dansk

Varighed: 4,5 timer.
Hver opgave er 5 point værd.

Opgave 1. Bestem alle polynomier $p(x)$ med reelle koefficienter således at

$$p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$$

og

$$p(0) = 0.$$

Opgave 2. Bevis at hvis de reelle tal a, b og c opfylder at $a^2+b^2+c^2=3$, da er

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

Hvornår gælder der lighed?

Opgave 3. Findes der en vinkel $\alpha \in \,]0, \pi/2[$ sådan at $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ og $\cot\alpha$, i en eller anden rækkefølge, er fire på hinanden følgende led i en differensrække?

Opgave 4. Polynomiet P har heltallige koefficienter, og $P(x) = 5$ for fem forskellige heltal x. Vis at der ikke findes noget heltal x således at $-6 \leq P(x) \leq 4$ eller $6 \leq P(x) \leq 16$.

Opgave 5. Antag at Romeo og Julie hver har et regulært tetraeder hvor der til hvert hjørne hører et positivt reelt tal. Til hver kant i deres tetraeder tilknytter de nu produktet af de to tal som hører til kantens hjørner. Derefter skriver de på hver side af deres tetraeder summen af de tre tal der er tilknyttet sidens tre kanter. De fire tal skrevet på siderne af Romeos tetraeder, viser sig netop at være de fire tal skrevet på Julies tetraeder. Følger det heraf at de fire tal der hører til hjørnerne i Romeos tetraeder, er identiske med de fire tal der hører til hjørnerne i Julies tetraeder?

Opgave 6. Find alle endelige mængder af positive heltal med mindst to elementer sådan at for vilkårlige to tal a, b $(a > b)$ der ligger i mængden, vil tallet $\frac{b^2}{a-b}$ også ligge i mængden.

Opgave 7. Hvor mange par (m, n) af positive hele tal med $m < n$ opfylder ligningen

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \; ?$$

Opgave 8. Betragt en mængde A af positive heltal således at det mindste element i A er 1001, og produktet af alle elementer i A er et kvadrattal. Hvad er den mindst mulige værdi af det største element i A?

Opgave 9. Antag at de positive hele tal a og b opfylder ligningen

$$a^b - b^a = 1008.$$

Bevis at a og b er kongruente modulo 1008.

Opgave 10. For et positivt helt tal n betegner $S(n)$ summen af cifrene i n. Bestem den størst mulige værdi af udtrykket $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$.

Opgave 11. Betragt en delmængde A, med 84 elementer, af mængden $\{1, 2, \ldots, 169\}$ således at intet par af elementer summerer til 169. Vis at A indeholder et kvadrattal.

Opgave 12. I en skoleklasse med $3n$ børn giver ethvert par af børn en fælles gave til netop ét andet barn. Bevis at det for alle ulige n er muligt at det følgende gælder:

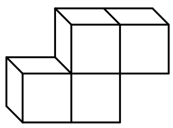
For tre vilkårlige børn A, B og C i klassen, vil A og C give en gave til B hvis A og B giver en gave til C.

Opgave 13. Til en nært forestående international matematikkonkurrence blev de deltagende lande bedt om at vælge blandt ni kombinatorikopgaver. Vel vidende hvor svært det normalt er at blive enige, var ingen overraskede over at følgende skete:

- Hvert land stemte for præcist tre opgaver.
- Der var ikke to lande der stemte for det samme sæt af opgaver.
- Givet vilkårlige tre lande, var der en opgave som ingen af dem stemte for.

Find det størst mulige antal deltagende lande.

Opgave 14. Er det muligt at bygge en $4 \times 4 \times 4$-terning af klodser med følgende form bestående af 4 enhedsterninger?



Opgave 15. Nogle 1×2 dominobrikker, der hver dækker to nabofelter, er placeret på et bræt med $n \times n$ felter sådan at intet par af dem rører hinanden (ikke engang ved et hjørne). Find den mindst mulige værdi af n forudsat at dominobrikkerne samlet dækker et areal på 2008 felter.

Opgave 16. Lad $ABCD$ være et parallelogram. Cirklen med diameter AC skærer linjen BD i punkterne P og Q. Normalen til linjen AC gennem punktet C skærer linjerne AB og AD i punkterne henholdsvis X og Y. Bevis at punkterne P, Q, X og Y ligger på samme cirkel.

Opgave 17. Antag at a, b, c og d er siderne i en firkant indskrevet i en given cirkel. Bevis at produktet $(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ antager sit maksimum når firkanten er et kvadrat.

Opgave 18. Lad AB være en diameter i cirklen S, og lad L være tangenten i A. Lad desuden c være et fast positivt reelt tal, og betragt alle par af punkter X og Y der ligger på L, på hver sin side af A, sådan at $|AX| \cdot |AY| = c$. Linjerne BX og BY skærer S i punkterne henholdsvis P og Q. Vis at alle linjerne PQ går gennem et fælles punkt.

Opgave 19. I en cirkel med diameter 1 er tegnet nogle korder. Summen af kordernes længder er større end 19. Bevis at der findes en diameter der skærer mindst 7 korder.

Opgave 20. Lad M være et punkt på BC og N et punkt på AB således at AM og CN er vinkelhalveringslinjer i trekant ABC. Forudsat at

$$\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA},$$

bevis at trekant ABC er ligebenet.