

# Víkingsaorrustan 2016 - 1. hluti

## Version: Icelandic

**Dæmi 1** Látum  $ABC$  vera hvasshyrndan þríhyrning með hæðamiðju  $H$ . Látum  $D$  vera punkt þannig að ferhyrningurinn  $HABD$  sé samsíðungur (þar sem  $AB \parallel HD$  og  $AH \parallel BD$ ). Látum  $E$  vera punkt á línunni  $DH$  þannig að línan  $AC$  liggur í gegnum miðpunkt línustriksins  $HE$ . Látum  $F$  vera annan skurðpunkt línunnar  $AC$  og umritaðs hrings þríhyrningsins  $DCE$ .

Sannið að  $EF = AH$ .

**Dæmi 2** Um runu af jákvæðum rauntölum  $a_1, a_2, \dots$  gildir að ójafnan

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

er uppfyllt fyrir allar jákvæðar heiltölur  $k$ . Sannið að

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$$

fyrir öll  $n \geq 2$ .

**Dæmi 3** Látum  $n$  vera jákvæða heiltölu. Tveir leikmenn,  $A$  og  $B$ , spila leik þar sem þeir skiptast á að velja jákvæðar heiltölur  $k \leq n$ . Reglurnar eru eftirfarandi:

- (i) Leikmaður má ekki velja tölu sem einhver leikmaður hefur valið í einhverri af fyrri umferðum.
- (ii) Leikmaður má ekki velja tölu sem er aðliggjandi tölu sem leikmaðurinn hefur þegar valið í einhverri af fyrri umferðum.
- (iii) Leik lýkur með jafntelfi ef allar tölurnar hafa verið valdar annars tapar sá leikmaður sem getur ekki valið tölu.

Leikmaður  $A$  hefur leikinn. Hver verður útkoma leiksins ef báðir spila óaðfinnanlega?