The Viking Battle - Part 1 2014
Version: Swedish

Problem 1 Låt $\mathbb{N}$ vara mängden av alla positiva heltal. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sådana att

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

för alla positiva heltal m och n.

Problem 2 Låt ω vara den omskrivna cirkeln till triangeln ABC. Beteckna med M och N mittpunkterna på sidorna AB och AC, respektive, och beteckna med T mittpunkten på bågen BC av ω som inte innehåller A. De omskrivna cirklarna till trianglarna AMT och ANT skär mittpunktsnormalerna till AC och AB i punkterna X och Y, respektive. Antag att X och Y ligger i det inre av triangeln ABC. Linjerna MN och XY skär varandra i K. Visa att $KA = KT$.

Problem 3 En galen fysiker har upptäckt en ny sorts partikel som han har kallat ett *imon*, efter att sådana partiklar på ett mystiskt sätt dykt upp i hans laboratorium. Vissa par imon är *sammankopplade*, och varje imon kan vara del av flera par sammankopplade imon. Fysikern har lyckats hitta sätt att utföra följande två operationer med partiklarna, en operation i taget.

(i) Om ett imon är sammankopplat med ett udda antal andra imon i labbet, så kan fysikern förstöra det imonet.

(ii) Han kan när som helst dubbla imonfamiljen i labbet genom att göra en kopia I' av varje imon I. Under denna procedur kopplas två kopior I' och J' samman om och endast om I och J är sammankopplade, och varje kopia I' kopplas samman med sitt originalimon I. Inga andra sammankopplingar tillkommer eller försvinner vid operationen.

Visa att fysikern kan utföra en följd av dessa operationer som resulterar i en imonfamilj, i vilken inga imonpar är sammankopplade.