

The Viking Battle — Osa 1, 2014

Version: Finnish

Tehtävä 1 Olkoon \mathbb{N} positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, joille

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m ja n .

Tehtävä 2 Olkoon ω kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Olkoot M ja N sivujen AB ja AC keskipisteet, tässä järjestyksessä, ja olkoon T sen ympyrän ω kaaren BC , joka ei sisällä pistettä A , keskipiste. Kolmioiden AMT ja ANT ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat janojen AC ja AB kohtisuorat puolittajat pisteissä X ja Y , tässä järjestyksessä. Oletetaan, että pisteet X ja Y sijaitsevat kolmion ABC sisällä, ja että suorat MN ja XY leikkaavat pisteessä K . Osoita, että $KA = KT$.

Tehtävä 3 Omalaatuinen fyysikko löysi uudenlaisen alkeishiukkasen, jolle hän antoi nimeksi *imoni*, kun joitakin sellaisia yllättäen ilmestyi hänen laboratorioonsa. Jotkin imonien parit ovat *lomittuneita*, ja jokainen imoni voi osallistua moneen eri lomittumiseen. Fyysikkomme on löytänyt tavan suorittaa seuraavia kahdenlaisia operaatioita näille hiukkasille, yhden operaation kerrallaan.

- (i) Jos jokin imoni on lomittunut parittoman monen muun imonin kanssa laboratoriossa, niin fyysikko voi tuhota sen.
- (ii) Minä tahansa ajanhetkenä hän voi kaksinkertaistaa laboratorionsa imonien joukkion luomalla jokaiselle imonille I kopion I' . Tässä operaatiossa kaksi kopiota I' ja J' lomittuvat jos ja vain jos I ja J ovat lomittuneet, ja jokainen kopio I' on lomittunut alkuperäisen imonin I kanssa; mitään muita lomittumisia ei synny tai häviä tämän operaation aikana.

Osoita, että fyysikko voi näitä operaatioita sopivasti käyttäen tuottaa kokoelman imoneita, joista mitkään kaksi eivät ole lomittuneita.