

# The Viking Battle - Del 1 2014

## Danish version

**Opgave 1** Lad  $\mathbb{N}$  være mængden af positive hele tal. Bestem alle funktioner  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  så

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

for alle positive hele tal  $m$  og  $n$ .

**Opgave 2** Lad  $\omega$  være den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ . Lad desuden  $M$  og  $N$  være midtpunkterne af henholdsvis  $AB$  og  $AC$ , og lad  $T$  betegne midtpunktet af buestykket  $BC$  af  $\omega$  som ikke indeholder  $A$ . De omskrevne cirkler til trekantene  $AMT$  og  $ANT$  skærer midtnormalerne til henholdsvis  $AC$  og  $AB$  i punkterne  $X$  og  $Y$ . Antag at  $X$  og  $Y$  ligger i det indre af trekant  $ABC$ . Linjerne  $MN$  og  $XY$  skærer hinanden i  $K$ . Vis at  $KA = KT$ .

**Opgave 3** En vanvittig fysiker har opdaget en ny slags partikel som han kalder en *imon* efter at de på mystisk vis er dukket op i hans laboratorium. Nogle par af imoner er *sammenfiltret*, og hver imon kan indgå i flere par af sammenfilterede imoner. Fysikeren har fundet en måde at udføre følgende to operationer på disse partikler, men kun en operation ad gangen.

- (i) Hvis en imon er sammenfiltret med et ulige antal andre imoner, kan fysikeren destruere imonen.
- (ii) På et vilkårligt tidspunkt kan fysikeren fordoble familien af imoner i sit laboratorium ved at lave en kopi  $I'$  af hver imon  $I$ . Ved denne operation bliver to kopier  $I'$  og  $J'$  sammenfiltret hvis og kun hvis deres originaler  $I$  og  $J$  er sammenfiltret, og hver kopi  $I'$  bliver desuden sammenfiltret med dens original  $I$ . Der opstår eller forsvinder ikke andre sammenfiltringer ved operationen.

Vis at fysikeren kan udføre en serie af operationer så imonerne i hans laboratorium bliver en familie af imoner hvor ingen par af imoner er sammenfiltrede.