

The Viking Battle - Del 1 2013

Opgave 1 Flere positive heltal står på en række. Alice udfører følgende operation: Hun vælger to nabotal x og y så x står til venstre for y , og så $x > y$, og erstatter parret (x, y) med $(y + 1, x)$ eller $(x - 1, x)$. Vis at hun kun kan udføre denne operation et endeligt antal gange.

Opgave 2 Lad $ABCD$ være en indskrivelig firkant hvor diagonalerne AC og BD skærer hinanden i punktet E . Forlængelsen af siderne AD og BC skærer hinanden i F så F ligger tættere på A end på D , og F ligger tættere på B end på C . Lad G være punktet så firkant $ECGD$ er et parallelogram, og lad punktet H være spejlingen af E i linjen AD . Vis at punkterne D , H , F og G ligger på en cirkel.

Opgave 3 Find alle tripler (x, y, z) af positive heltal så $x \leq y \leq z$ og

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$