Projektiv plangeometri

1 Uendelig fjerne punkter og den uendelig fjerne linje

I den *projektive plangeometri* er hver af planets linjer udvidet med et *uendelig fjernt punkt*. To af linjerne antages at have samme uendelig fjerne punkt hvis og kun hvis de er parallelle. De uendelig fjerne punkter danner tilsammen den *uendelig fjerne linje*. Det således udvidede plan kaldes det *projektive plan* til forskel fra det sædvanlige *geometriske plan*. Udvidelsen forenkler nogle dele af plangeometrien fordi der i det projektive plan gælder:

Gennem to forskellige punkter går der netop én linje.

To forskellige linjer har netop ét fælles punkt.

1.1 Øvelse

Vis dette for alle kombinationer af sædvanlige og uendelig fjerne punkter og linjer, hvor de sædvanlige linjer er udvidet med deres uendelig fjerne punkt og enten kan skære hinanden eller være parallelle.

Sætningerne ses at svare til hinanden når »punkt« byttes om med »linje« og »ligger på« med »går gennem«. I den senere øvelse 5.3[1] viser jeg at hvis en sætning om at bestemte punkter ligger på bestemte linjer i det projektive plan, er sand, så er den såkaldt *duale* sætning, som man får ved skifte ordene ud på denne måde, også sand. Dette kaldes *dualitet*.

Punkter og linjer forstås i det følgende at høre til det projektive plan medmindre andet er nævnt. Symbolet AB betegner sædvanligvis *hele* linjen gennem to forskellige punkter A og B, og skæringspunktet mellem to forskellige linjer l, m betegnes med $l \cap m$. Hvis AB betegner et linjestykke, skriver jeg »linjestykket AB«.

2 Projektiv transformation

En afbildning som 1) fører det projektive plan over i *hele* det projektive plan og afbilder 2) forskellige punkter i *forskellige* punkter og 3) linjer i linjer, kaldes en *projektiv transformation*. Egenskaberne 1) og 2) indebærer at afbildningen har en omvendt afbildning med de samme egenskaber. Den omvendte afbildning opfylder også 3) og er dermed selv en projektiv transformation. Hvis A', B' er forskellige punkter på en linje l' i det projektive plan og billeder af A, B, afbildes $l = AB$ nemlig i en linje som indeholder A', B' og dermed er lig med l'. Billedet af l' ved den omvendte afbildning er så linjen l. Det kan vises at *hvis ikke tre af punkterne A, B, C, D og ikke tre af punkterne A', B', C', D' ligger på en linje, findes der netop én projektiv transformation som fører A, B, C, D over i A', B', C', D'*. Beviset er omstændeligt.[2]

[1] Blå skrift angiver link. Eksterne link kræver internetadgang.

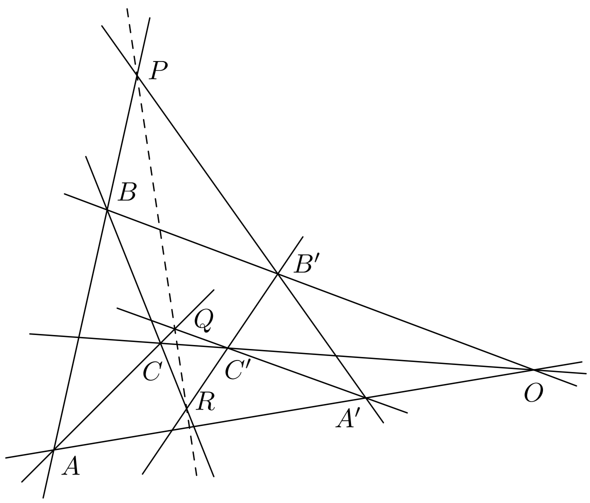
[2] Det bygger på betragtning af det geometriske plan som plan i rummet. Når punkterne og linjerne i det geometriske plan forbindes med et punkt O uden for planet, dannes der for hvert punkt en linje og for hver linje et plan. Det projektive plans uendelig fjerne punkter og uendelig fjerne linje danner linjerne og planet gennem O parallelle med det geometriske plan. Alt i alt svarer det projektive plans punkter og linjer én til én til rummets linjer og planer gennem O og kan så beskrives med analytisk rumgeometri. I beviset indgår at $f(x) = 0$ og $f(x) = x$ er de eneste samtidige løsninger med reelle tal til funktionalligningerne $f(x + y) = f(x) + f(y)$ og $f(xy) = f(x)f(y)$.

Projektive transformationer kan være nyttige i beviser fordi man somme tider kan transformere en figur til et særtilfælde hvor beviset er nemmere end i det almene tilfælde.

2.1 Eksempel: Desargues' sætning

> *Antag at hverken punkterne A, B, C, punkterne A', B', C', tre af punkterne A, B, A', B', tre af punkterne A, C, A', C' eller tre af punkterne B, C, B', C' ligger på linje. Hvis så AA', BB', CC' har et fælles punkt, ligger $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$ på linje.*

(»To trekanter som har et perspektivcentrum, har en perspektivakse.«)



Bevis Når tre punkter ikke ligger på linje, er de forskellige, for hvis to af dem var det samme, ville der gå en linje gennem dette og det tredje punkt. Derfor findes de linjer sætningen omtaler. Også $P = AB \cap A'B'$ findes, for hvis AB og $A'B'$ var samme linje, ville A, B, A', B' ligge på denne linje i modstrid med antagelserne. Tilsvarende findes $Q = AC \cap A'C'$ og $R = BC \cap B'C'$.

Der gælder $P \neq A, B$ fordi A eller B ellers lå på $A'B'$. Tilsvarende $Q \neq A, C$, og vi har så $P \neq Q$ fordi B, C ellers lå på AP sammen med A. Punktet A kan ikke ligge på PQ fordi B, C så lå på PQ, og B eller C kan ikke kan ligger på PQ fordi A så lå på PQ. Altså ligger intet af punkterne A, B, C på PQ, og tilsvarende ligger intet af punkterne A', B', C' på PQ.

Da alle de sammenhænge der indgår i sætningen, er uændrede ved en projektiv transformation, er det tilstrækkeligt at vise et tilfælde som kan nås fra alle andre ved en sådan transformation. Dén kan vælges så P, Q bliver uendelig fjerne. Så ligger A, B, C, A', B', C' efter det foregående i det geometriske plan. Da P er uendelig fjernt, og A ikke ligger på $A'B'$, har vi $AB \parallel A'B'$. Tilsvarende $AC \parallel A'C'$. Hvis så AA', BB', CC' har et fælles punkt O, er $ABC, A'B'C'$ forbundet gennem en multiplikation ud fra O hvis O ligger i det geometriske plan, og en parallelforskydning hvis O er uendelig fjernt. I begge tilfælde følger $BC \parallel B'C'$. Dermed er R disse linjers uendelig fjerne punkt og ligger så på den uendelig fjerne linje sammen med P, Q.

2.2 Øvelse

Vis at sætningen medfører følgende omvendte sætning:

> *Med de samme antagelser gælder det at hvis $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$ ligger på linje, har AA', BB', CC' et fælles punkt.*

(»To trekanter som har en perspektivakse, har et perspektivcentrum.«)

Gør rede for at den omvendte sætning er ensbetydende med den man får når man i den direkte bytter om på »punkt« og »linje« og »ligger på« og »går gennem«, og altså er dual til den direkte. [Hjælp: Når tre punkter ikke ligger på linje, er de hjørner i en trekant. Dén er også givet ved de tre linjer som indeholder siderne, og som ikke har noget punkt fælles. Vis først at sætningernes fælles antagelser kan udtrykkes symmetrisk i hjørner og sider af trekanterne ABC og $A'B'C'$].

Med den samme ombytning af begreber i beviset i øvelse 2.2 får man et bevis for at den direkte sætning følger af den omvendte. Sætningerne er altså ensbetydende, og Desargues' sætning er dual til sig selv.

2.3 Øvelse: Pappos' sætning

Vis *Pappos' sætning*:

> *Hvis forskellige punkter A, B, C ligger på en linje l, og forskellige punkter A', B', C' på en anden linje m, og $A, B, C, A', B', C' \neq l \cap m$, så ligger $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$, $BC' \cap B'C$ på linje.*

(»To trekanter som er dobbelt perspektiviske ($BB'Q, C'CP$ med $P = AB' \cap A'B, Q = AC' \cap A'C$), er tredobbelt perspektiviske.«)

Gør rede for at sætningen er dual til sig selv.

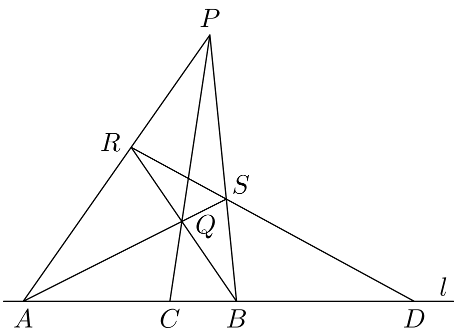
De *affine transformationer* er projektive transformationer som ikke flytter den uendelig fjerne linje. De afbilder så det geometriske plan i sig selv, kan ses som transformationer af dette alene og er da kendetegnet ved at *parallelle linjer afbildes i parallelle linjer*. Udvidelsen til det projektive plan er entydig fordi hvert uendelig fjernt punkt er skæringpunkt mellem den uendelig fjerne linje og en linje i det geometriske plan. Det følger af definitionen at en affin transformations omvendte transformation selv er affin. Det geometriske plan kaldes også det *affine plan*.

En affin transformation er bestemt ved hvordan den afbilder tre punkter i det geometriske plan som ikke ligger på linje. Lad nemlig A, B, C være tre sådanne punkter, og A', B', C' deres billeder. Lad D, E, D', E' være de uendelig fjerne punkter på $AB, AC, A'B', A'C'$, og lad F og F' være bestemt ved at $ABFC$ og $A'B'F'C'$ er parallelogrammer. Når afbildningen er affin, afbildes D i D', E i E', og dermed F i F'. Da ikke tre af punkterne A, D, E, F ligger på linje, er transformationen bestemt ved afbildningen af disse fire punkter. De og deres billeder er givet entydigt ved A, B, C, A', B', C'. Da konstruktionen er mulig for vilkårlige A, B, C, A', B', C' hvis ikke A, B, C eller A', B', C' ligger på linje, findes der i hvert sådant tilfælde en affin transformation som afbilder A, B, C i A', B', C'.

3 Harmonisk konjugation

Hvis A, B, C, D er forskellige punkter på en linje l, siges D at være C's *harmonisk konjugerede med hensyn til A og B* hvis der findes en projektiv transformation som afbilder l i en linje som ikke er den uendelig fjerne, D i denne linjes uendelig fjerne punkt og C i midtpunktet af linjestykket AB. Vælger man to forskellige punkter P og Q uden for l så C, P, Q ligger på linje, og sætter $AP \cap BQ = R$ og $AQ \cap BP = S$, er $l \cap RS$ efter denne transformation punktet D. Dét gælder så også før transformationen. Påstanden følger af at affiniteten[3] med akse CP, retning l og forvandlingstal -1 afbilder R og S i hinanden så $RS \cap l$ er uændret, og det uendelig fjerne punkt D er det eneste punkt på l med denne egenskab foruden C.

[3] En *affinitet* med akse l, retning m og forvandlingstal k, hvor $l \nparallel m$ er linjer og $k \neq 0$ et tal, er dén affine transformation som afbilder linjer parallelle med m i sig selv og ganger punkters afstand fra l regnet med fortegn med k.



Omvendt er C og D harmonisk konjugerede med hensyn til A og B hvis de indgår i en figur som vist. Den kan nemlig transformeres projektivt så D og P bliver uendelig fjerne, hvorefter de øvrige punkter ligger i det geometriske plan. Derved bliver $ABSR$ et parallelogram. I dette parallelogram ligger diagonalernes skæringspunkt Q midt mellem siderne AR og BS. Da CQ er parallel med disse sider, er C så midtpunkt af linjestykket AB.

Figuren kan konstrueres og D dermed bestemmes ud fra vilkårlige forskellige punkter A, B, C på en linje l. For sådanne punkter er netop ét af l's punkter derfor harmonisk konjugeret C med hensyn til A og B. Definitionen er symmetrisk i A og B. Sammenhængen er også symmetrisk i C og D fordi triplerne C, P, Q og D, R, S indgår ens i figuren. Punkterne C og D kan derfor kaldes *harmonisk konjugerede med hensyn til A og B*. Den er desuden symmetrisk i parrene $\{A, B\}$ og $\{C, D\}$, som derfor kan kaldes *harmonisk konjugerede*. Ved en en projektiv transformation hvor B og P bliver uendelig fjerne, bliver S nemlig også uendelig fjernt. De øvrige punkter ligger så i det geometriske plan, og der gælder $QR \parallel l$. Dermed er $CARQ$ og $ADRQ$ parallelogrammer, og vi har $CA = QR = AD$, som medfører at A er midtpunkt af linjestykket CD.

Hvis A, B, C, D ligger i det geometriske plan, og P er uendelig fjernt, får man af ensvinklede trekanter

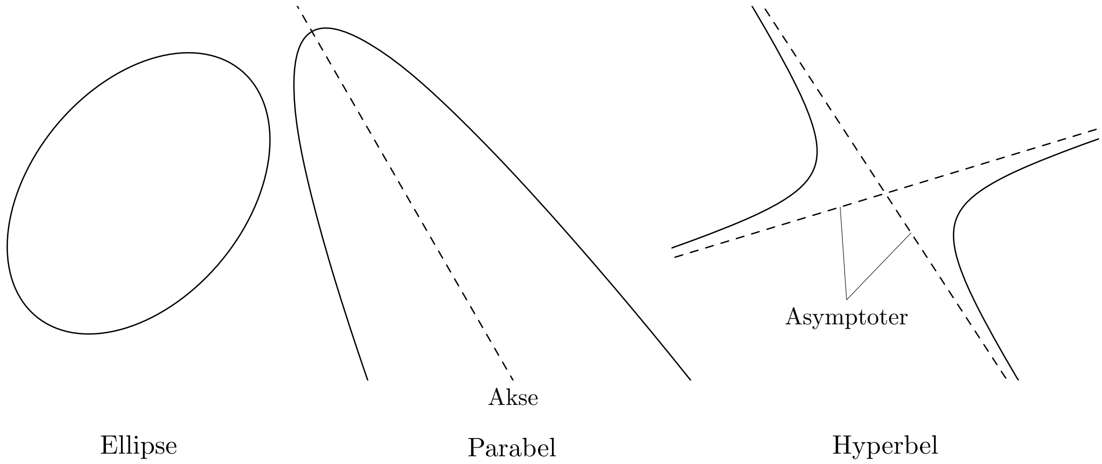
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{SQ}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{SB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

Da netop ét punkt D på l for givne A, B, C opfylder den resulterende ligning $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{BD}$, *karakteriserer denne ligning harmonisk konjugerede punktpar i det geometriske plan.* Det er nemt at vise at forholdene $f = \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC}$ og $g = \overrightarrow{CA}/\overrightarrow{DA}$ adlyder $(f-1)(g-1) = 2$. Uden bevis nævner jeg at de punkter P som opfylder $|AP| : |BP| = k = |AC| : |BC|$, danner en cirkel med diameter CD, *forholdscirklen ud fra A og B med forhold k*. I trekanter ABT med T på denne cirkel, og kun dem, er TC og TD vinkelhalveringslinjer, den ene indre, den anden ydre. Cirklen med diameter CD er vinkelret på enhver cirkel med korde AB, herunder specielt dén med diameter AB (*apollonske cirkler*).

4 Keglesnit

Billedet af en cirkel ved en projektiv transformation kaldes et *keglesnit*. Afhængig af om dén linje som ved den projektive transformation bliver til den uendelig fjerne, skærer cirklen i ingen, ét eller to punkter, kaldes keglesnittet en *ellipse*, *parabel* eller *hyperbel*. Skæringspunkternes billeder er de uendelig fjerne punkter på parablens akse og hyperblens asymptoter. Fordi enhver cirkel kan dannes af enhver anden cirkel ved en affin transformation sat sammen af en flytning og en multiplikation ud fra cirklens centrum, kan ethvert keglesnit dannes af ethvert andet keglesnit ved en projektiv transformation.

En linje kaldes *tangent* til keglesnittet hvis den har netop ét punkt fælles med det, og punktet kaldes tangentens *røringspunkt*. Et punkt siges at ligge *inden i* keglesnittet hvis det ikke ligger på keglesnittet, og enhver linje gennem punktet har mindst ét punkt fælles med det. (Der er så altid to fælles punkter). Det siges at ligge *uden for* keglesnittet hvis der findes en linje gennem punktet som ikke har noget punkt fælles med det. Det ses at ethvert punkt har netop én af de egenskaber at ligge på, inden i eller uden for keglesnittet. Da sammenhængene i disse definitioner er uændrede ved en projektiv transformation, afbildes et keglesnits tangenter og deres røringspunkter og indre og ydre punkter i tilsvarende linjer og punkter med hensyn til det transformerede keglesnit. Et keglesnit har én tangent i hvert af sine punkter fordi dette gælder for en cirkel. Med dén teori som er skitseret i fodnote 2, kan man vise at netop ét keglesnit indeholder fem vilkårlige punkter hvoraf ikke tre ligger på linje. En tangent og dens røringspunkt kan træde i stedet for to af punkterne hvis tangenten ikke indholder nogen af de øvrige punkter.



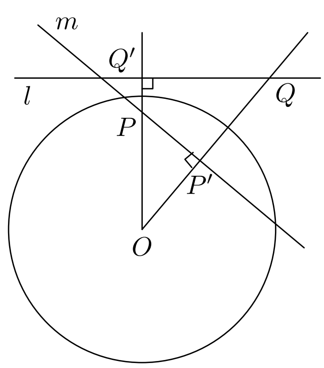
5 Polar og pol

Lad der være givet en cirkel med centrum O og et punkt P som hverken er O eller uendelig fjernt. Linjen vinkelret på OP gennem P's inverse punkt med hensyn til cirklen kaldes P's *polar*. Læg mærke til at *et punkt på cirklen har tangenten i punktet som polar*. Polaren til O defineres som den uendelig fjerne linje, og polaren til et uendelig fjernt punkt P som linjen gennem O vinkelret på OP.

5.1 Øvelse

Vis at enhver linje er polar til netop ét punkt.

Dette punkt kaldes linjens *pol*, og punktet og linjen siges at være *reciprokke*.



Lad Q være et punkt på P's polar l, og lad m være Q's polar. Antag foreløbig at P ikke er O eller uendelig fjernt. Lad Q' være P's inverse punkt og P' projektionen af P på linjen OQ. Så har vi $OQQ' \sim OPP'$. For $Q \neq Q'$ følger dette af at trekanterne er ensvinklede, og for $Q = Q'$ af at der så også gælder $P' = P$. Ligedannetheden medfører

$$|OQ| \cdot |OP'| = |OP| \cdot |OQ'| = r^2\,,$$

hvor r er cirklens radius. Altså er P' det inverse punkt til Q, og P ligger på m. Hvis $P = O$, er l den uendelig fjerne linje, og Q dermed et uendelig fjernt punkt. Så går m gennem O, og P ligger på m. Hvis P er et uendelig fjernt punkt, har vi $OQ \perp OP$ eller $Q = O$. Dermed er m enten parallel med OP eller den uendelig fjerne linje. I begge tilfælde ligger P på m. Alment gælder altså:

5.2 Sætning

Hvis Q ligger på P's polar, ligger P på Q's polar.

To punkter som P og Q i figuren som ligger på hinandens polarer, kaldes *konjugerede* med hensyn til cirklen. Særlig er inverse punkter altså konjugerede. Læg mærke til at når $\{P, Q\}$ ikke er O og et uendelig fjernt punkt, er P og Q konjugerede hvis og kun hvis

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = r^2.$$

5.3 Øvelse

Gør rede for at dualitet følger af sætning 5.2. Hvilke egenskaber ved et punkts polar svarer til at punktet ligger på, inden i og uden for cirklen?

Hvis P ligger uden for cirklen, og tangenterne gennem P rører cirklen i punkterne Q og R, ligger P på både Q's og R's polar. *Dermed går P's polar gennem Q og R og er så linjen QR.*

5.4 Øvelse

Vis at *hvis en linje gennem et punkt P skærer cirklen i punkterne Q og R, skærer cirklens tangenter i Q og R hinanden på P's polar.*

Sætning 5.2 indebærer at hvis to par af et hjørne og dets modstående side i en trekant er reciprokke med hensyn til en cirkel, gælder dette også det tredje par. En sådan trekant kaldes en *polartrekant* med hensyn til cirklen. *I en polartrekant ligger ét af hjørnerne inden i og to af dem uden for cirklen.* Dette indses sådan: Intet hjørne kan ligge på cirklen, for så ville de to andre ligge på tangenten i dette punkt og hele trekanten dermed på en linje. Hvis et hjørne ligger inden i cirklen, ligger hele dets polar uden for cirklen. Særlig ligger de to andre hjørner så uden for cirklen. Antag at hjørnet P ligger uden for cirklen, og lad X og Y være røringspunkterne for tangenterne gennem P. Så er XY polar til P ifølge iagttagelsen efter øvelse 5.3, og de to andre hjørner Q og R ligger på XY. Højst ét af dem kan ligge inden i cirklen. Antag uden tab af almenhed at Q ligger uden for cirklen. Så ligger hele PQ uden for cirklen, og R ligger inden i cirklen.

5.5 Sætning

En polartrekant med hensyn til en cirkel kan ved en projektiv transformation som lader cirklen uændret, afbildes så det indre hjørne bliver cirklens centrum og de ydre hjørner uendelig fjerne punkter på vinkelrette linjer.

Bevis Lad P være det indre hjørne i polartrekanten PQR, lad O være cirklens centrum, lad X og Y være PQ's skæringspunkter med cirklen, og lad Z være ét af PR's skæringspunkter med cirklen. Da ikke tre af punkterne R, X, Y, Z ligger på en linje, findes der en projektiv transformation som afbilder R i et uendelig fjernt punkt R', punkterne X og Y i endepunkter X' og Y' af cirklens diameter vinkelret på OR' og punktet Z i et skæringspunkt Z' mellem OR' og cirklen. Ved denne transformation afbildes cirklen i det keglesnit som går gennem X', Y', Z' og har tangenter i X' og Y' som er parallelle med OR'. Dette keglesnit er cirklen selv. Punktet P afbildes i $X'Y' \cap R'Z' = O$, og punktet Q i OR''s pol, som er det uendelig fjerne punkt på $X'Y'$.

Af sætning 5.5 følger umiddelbart:

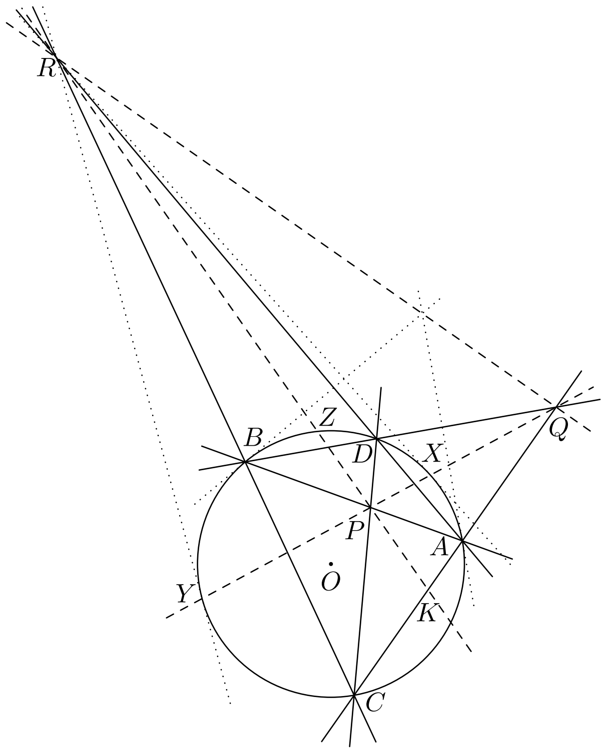
5.6 Sætning

Hvis punkterne P og Q er konjugerede med hensyn til en cirkel, og PQ skærer cirklen i X og Y, så er punktparrene $\{P, Q\}$ og $\{X, Y\}$ harmonisk konjugerede. Dette gælder særlig i det tilfælde hvor PQ går gennem cirklens centrum så P og Q er inverse og XY en diagonal.

Bevis Da PQ skærer cirklen i to punkter, ligger PQ's pol R uden for cirklen. Da PQR er en polartrekant, kan vi så uden tab af almenhed antage at P ligger inden i cirklen. Når polartrekanten transformeres som i sætning 5.5, bliver P og Q henholdsvis midtpunktet af diameteren XY og det uendelig fjerne punkt på linjen XY.

Det følger af det foregående at reciprocitet med hensyn til en cirkel mellem et ydre punkt P og en linje l kan beskrives ved at P er skæringspunktet for to tangenter, og l er linjen gennem deres røringspunkter. Reciprocitet mellem et indre punkt P og en linje l kan ifølge sætning 5.2 beskrives ved at l består af polerne til linjerne gennem P, og P er fælles punkt for l's punkters polarer. Tidligere har vi set at reciprocitet mellem et punkt P på cirklen og en linje l kan beskrives ved at l rører cirklen i P. I alle tre tilfælde kan reciprocitet altså beskrives ved sammenhænge som er uændrede ved en projektiv transformation. Denne beskrivelse kan tages som definition af reciprocitet med hensyn til et vilkårligt keglesnit. Par af et punkt og en linje som er reciprokke med hensyn til et keglesnit, afbildes så ved en projektiv transformation i par som er reciprokke med hensyn til det transformerede keglesnit.

6 MacLaurins konfiguration



Lad A, B, C, D være forskellige punkter på en cirkel med centrum O, og lad der gælde $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$. Uden tab af almenhed kan vi antage at A, B, C, D ligger på cirklen i rækkefølgen $ACBD$. Så ligger P inden i cirklen, og Q og R uden for cirklen. Lad X og Y være cirklens skæringspunkter med R's polar og Z ét af dens skæringspunkter med PR, og lad os anvende den samme projektive transformation defineret ved afbildningen af punkterne R, X, Y, Z som i beviset for sætning 5.5. Ved denne transformation afbildes P i $X'Y' \cap R'Z' = O$. Billedet $A'C'B'D'$ af firkant $ACBD$ er så et rektangel hvor siderne $A'D'$ og $B'C'$ er parallelle med OR' og siderne $A'C'$ og $B'D'$ dermed parallelle med $X'Y'$. Billedet Q' af punktet Q er da det uendelig fjerne punkt på $X'Y'$. Dermed er $OQ'R'$ og så også PQR en polartrekant. Der gælder altså:

6.1 Sætning

Hvis A, B, C, D er forskellige punkter på en cirkel, og der gælder $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$, så er PQR en polartrekant med hensyn til cirklen.

Det ses af beviset at *en indskrivelig konveks firkant altid kan transformeres til et rektangel ved en projektiv transformation som lader den omskrevne cirkel uændret.* Da punkterne A, C, B, D kan være cirklens røringspunkter med en vilkårlig konveks firkant omskrevet cirklen, og tangenterne i A', C', B', D' danner en rombe, gælder der også at *en omskrivelig konveks firkant altid kan transformeres til en rombe ved en projektiv transformation som lader den indskrevne cirkel uændret.*

Det følger af øvelse 5.4 at for eksempel skæringspunktet mellem tangenterne i A og B ligger på QR. Den følgende øvelse uddyber dette.

6.2 Øvelse

Lad med betegnelserne i sætning 6.1 a, b, c, d være tangenterne i A, B, C, D, og lad der gælde $l = (a \cap b)(c \cap d)$, $m = (a \cap c)(b \cap d)$, $n = (a \cap d)(b \cap c)$. Vis $l = QR$, $m = PR$, $n = PQ$.

Linjerne l, m, n danner altså en polartrekant med hensyn til cirklen. Gør rede for at dette resultat er dualt til sætning 6.1.

Punktparrene $\{P, Q\}$ og $\{X, Y\}$ er harmonisk konjugerede ifølge sætning 5.6. Punktpar som $\{A, C\}$ og $\{K, Q\}$, hvor K er skæringspunktet mellem AC og PR, er også harmonisk konjugerede. Dette er åbenlyst i den transformerede figur. Det ses også af også af at $BPDR$ er en firkant som firkant $PRQS$ i figuren side 4. Endelig følger det af sætning 5.6 fordi K ligger på Q's polar og dermed er konjugeret til Q.

Da sammenhængene i disse sætninger er uændrede ved projektiv transformation, gælder de i forbindelse med ikke blot cirkler men vilkårlige keglesnit. Figuren kaldes somme tider *MacLaurins konfiguration.*

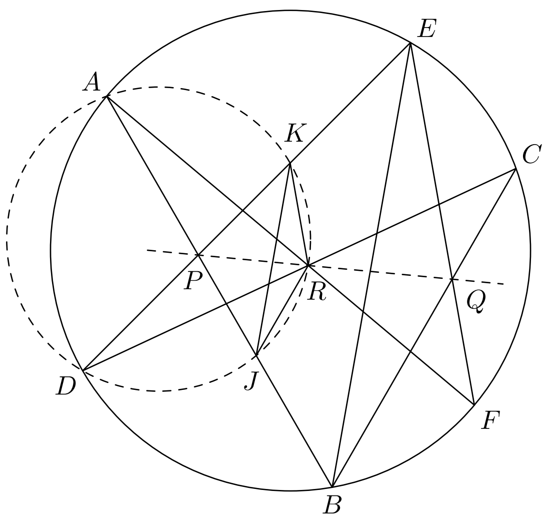
7 Pascals og Brianchons sætninger

7.1 Pascals sætning

Hvis A, B, C, D, E, F er forskellige punkter på en cirkel, ligger $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CD \cap FA$ på linje.

Linjen kaldes sekskant $ABCDEF$'s *pascallinje.* Sætningen står uden bevis i en kort artikel *Blaise Pascal* fik trykt som 16-17-årig i 1640. Beviser har været kendt længe; jeg har ikke kunnet opspore af hvem og hvornår det første blev offentliggjort. Det følgende meget simple, som til forskel fra de tidligere i teksten her ikke bygger på projektiv transformation til et særtilfælde, fandt *Jan van Yzeren* så sent som i 1993.

Bevis Antag først at to af punkterne P, Q, R, lad os sige Q og R, er uendelig fjerne, altså $BC \parallel EF$ og $CD \parallel FA$. Dette er ensbetydende med $\overset{\curvearrowright}{EC} = \overset{\curvearrowright}{BF}$ og $\overset{\curvearrowright}{CA} = \overset{\curvearrowright}{FD}$, hvor $\overset{\curvearrowright}{}$ angiver buelængde på cirklen regnet med fortegn og modulo cirklens omkreds. Summen af disse ligninger er $\overset{\curvearrowright}{EA} = \overset{\curvearrowright}{BD}$, som er ensbetydende med $AB \parallel DE$. Dermed ligger P sammen med Q og R på den uendelig fjerne linje.



Hvis højst ét af punkterne P, Q, R er uendelig fjernt, kan vi uden tab af almenhed forudsætte at Q og R ligger i det geometriske plan. Lad AB skære cirkel ADR igen i J, og lad DE skære cirkel ADR igen i K. Det følger så af $\angle AJR = \angle ADR = \angle ADC = \angle ABC$, $\angle DKR = \angle DAR = \angle DAF = \angle DBF$ og $\angle KJR = \angle KDR = \angle EDC = \angle EBC = \angle EBQ$, hvor vinklerne er regnet med fortegn og modulo 180°, at trekanterne EBQ og JKR har parvis parallelle sider. De er da forbundet ved en multiplikation ud fra $JB \cap KE = P$ hvis P ligger i det geometriske plan, og en parallelforskydning hvis P er uendelig fjernt. Dermed ligger P, Q, R på linje. (At de ensvinklede og ens orienterede trekanter EBQ og JKR har et »perspektivcentrum«, er alternativt det særtilfælde af Desagues' omvendte sætning, øvelse 2.2, hvor »perspektivaksen« er uendelig fjern).

7.2 Øvelse: Brianchons sætning

Hvilken sætning er dual til Pascals?

Denne sætning kaldes *Brianchons* sætning, og det punkt hvis eksistens den slår fast, den omhandlede sekskants *brianchonpunkt*.

Pascals sætning bevarer sin gyldighed i grænsen $B \to A$ når siden AB i denne grænse forstås som tangenten i A. Dét gælder også hvis mere end ét par af nabohjørner vokser sammen på denne måde. Hvis for eksempel $AB = DE$, så skæringspunktet ikke er defineret, findes der et fælles punkt for AB og DE som ligger på samme linje som et fælles punkt for BC og EF og et fælles punkt for CD og FA. Det tilsvarende gælder Brianchons sætning når $a \cap b$ i grænsen $b \to a$ forstås som det fælles røringspunkt. Se også bemærkning 2) side 20 til løsningen til opgave 9.7.

Da sammenhængene i disse sætninger er uændrede ved en projektiv transformation, gælder de for ikke blot cirkler men vilkårlige keglesnit. Hvis keglesnittet erstattes med to linjer, får man Pappos' sætning. Dette er forventet fordi to linjer med et fælles punkt i det geometriske plan kan ses som en »uendelig spids« hyperbel. Tilfældene hvor linjerne er parallelle eller den ene af dem uendelig, fås som grænsetilfælde af denne figur. Betingelserne i Pascals og Brianchons sætninger er desuden ikke blot tilstrækkelige men også nødvendige: Hvis punkterne A, B, C, D, E, F er forskellige, og ikke tre af dem ligger på en linje, og $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CD \cap FA$ ligger på samme linje, så ligger A, B, C, D, E, F på samme keglesnit. Dette kan udnyttes til at konstruere et keglesnit ud fra fem af dets punkter, jævnfør de afsluttende bemærkninger i afsnit 4: Når A, B, C, D, E og dermed $P = AB \cap DE$ ligger fast, og Q og R bevæger sig på BC og CD så P, Q, R ligger på en linje, beskriver $F = AR \cap EQ$ keglesnittet gennem A, B, C, D, E. Den duale sætning lyder at hvis linjerne a, b, c, d, e, f er forskellige, og ikke tre af dem går gennem samme punkt, og hvis linjerne $(a \cap b)(d \cap e)$, $(b \cap c)(e \cap f)$, $(c \cap d)(f \cap a)$ går gennem samme punkt, rører a, b, c, d, e, f samme keglesnit.

8 Litteratur

I Milivoje Lukić: *Projective Geometry* indføres *dobbeltforhold* (også kaldet *anharmonisk forhold*, engelsk *cross ratio*) og *perspektivisk afbildning* (engelsk *perspectivity*), som ofte mødes i litteratur om projektiv geometri men ikke er anvendt her. En del af sætningerne i det foregående bliver dér bevist ved regning med dobbeltforhold.

9 Opgaver

9.1 Opgave

I firkant $ABCD$ ligger punktet M_1 på linjen AB, og der gælder $M_2 = BC \cap DM_1$, $M_3 = CD \cap AM_2$ og så videre med cyklisk ombytning af A, B, C, D. Vis $M_{13} = M_1$.

(Lukić 7[4])

9.2 Opgave

I trekant ABC ligger punkterne K og N på linjen BC, punktet L på linjen AB, og punktet M på linjen AC. Alle de nævnte punkter er forskellige. Linjerne KM og LN skærer hinanden i et punkt O som hverken er L eller M. Linjerne CO og LK skærer hinanden i et punkt B_1, og linjerne BO og MN i et punkt C_1. Vis at AO, BB_1, CC_1 har et fælles punkt.

(Kasakhisk olympiade 2002-2003 almengjort).

9.3 Opgave

I trekant ABC er D og E punkter på siderne AB og AC så $DE \parallel BC$ og P et indre punkt i trekant ADE. Linjerne BP og CP skærer DE i F og G. Vis at A ligger på cirklerne PDG's og PFE's radikalakse.

(Lukić 9)

9.4 Opgave

Lad der være givet en trekant ABC og to punkter X og Y som ikke er A, B eller C. Linjerne AX, AY, BX, BY, CX, CY er forskellige. Lad der gælde $P_A = BX \cap CY$ og $Q_A = BY \cap CX$, og lad P_B, Q_B, P_C, Q_C være defineret tilsvarende med cyklisk ombytning af A, B, C. Vis at P_AQ_A, P_BQ_B, P_CQ_C har et fælles punkt.

(Del af Crux 2469 og 2470 almengjort)

9.5 Opgave

Lad A, B, C være forskellige punkter på en linje og P, Q, R, S forskellige punkter uden for linjen så C, P, Q ligger på en linje og C, R, S på en linje. Lad der gælde $E = AP \cap BQ$, $F = AQ \cap BP$, $G = AR \cap BS$, $H = AS \cap BR$. Vis at AB, EF, GH har et fælles punkt.

(Lukić 5 almengjort)

[4] Opgavenumre i Milivoje Lukić: *Projective Geometry*, henviser til en tidligere udgave, som ikke længere er tilgængelig.

9.6 Opgave

Lad A, B, C, D være forskellige punkter på en linje og E, F, G, H forskellige punkter på en linje. Lad O være et punkt uden for begge linjer så $\{O, A, E\}, \{O, B, F\}, \{O, C, G\}$, $\{O, D, H\}$ ligger på hver sin linje. Vis at hvis $\{A, B\}$ og $\{C, D\}$ er harmonisk konjugerede, så er $\{E, F\}$ og $\{G, H\}$ harmonisk konjugerede.

Bemærkning: Afbilningen af A, B, C, D i E, F, G, H er et eksempel på en *perspektivisk afbildning* fra en linje til en anden. Resultatet viser at harmonisk konjugation bevares ved perspektivisk afbildning. Mere alment bevares *dobbeltforhold* (se Lukić' noter) ved perspektivisk afbildning.

9.7 Opgave

Trekant ABC's indskrevne cirkel rører siderne BC, CA, AB i punkterne M, N, P. Vis med en projektiv transformation at linjerne AM, BN, CP har et fælles punkt. Hvad er det duale resultat?

(Lukić 17 udvidet)

Bemærkning: Det første af de to resultater kan også – og måske nemmere – udledes af Cevas sætning. Punktet er trekantens *Gergonnepunkt*.

9.8 Opgave

Lad MN med midtpunkt P være korde i en cirkel, og lad AB og CD være korder gennem P så alle de nævnte punkter er forskellige, og $AC \nparallel MN$. Vis at AC og BD skærer MN i punkter som ligger lige langt fra P.

(Sommerfuglesætningen, Lukić 8)

9.9 Opgave

Find det geometriske sted for P som bevæger sig så P's polarer med hensyn til tre ikke skærende cirkler har et fælles punkt.

(Universitetsoptagelsesprøve 1940 gengivet i Crux 23, 129 (1997)).

9.10 Opgave

Lad $\mathscr{C}$ være en cirkel med centrum O og diameter AB, og lad M være et punkt på AB's forlængelse så $MA > MB$. En linje gennem M som ikke er linjen AB, skærer $\mathscr{C}$ i C og D så $MC > MD$. Trekanterne OAC's og OBD's omskrevne cirkler skærer hinanden i O og K. Vis $OK \perp MK$.

(Iransk olympiade 1997).

9.11 Opgave

Lad i en indskrivelig firkant $ABCD$ med $AD \neq BC$ diagonalerne AC og BD skære hinanden i E og linjerne AD og BC hinanden i F. Midtpunkterne af AB og CD er G og H. Vis at EF rører cirklen gennem punkterne E, G og H.

(Opgave G4 i IMO-kortlisten 2009)

Følgende spørgsmål leder gennem en variant af kortlistens løsning 3 med brug af resultater fra teksten her.

1. Lad X og Y være E's spejlbilleder i G og H. Gøre rede for at EF rører cirkel EGH hvis den rører cirkel EXY.
2. Brug Pappos' sætning, øvelse 2.3, til at vise at F, X, Y ligger på en linje. Gør rede for at EF så rører cirkel EXY hvis $XF \cdot YF = EF^2$.
3. Ifølge sætning 6.1 er E og F konjugerede med hensyn til cirkel $ABCD$. Brug dette til at vise $XF \cdot YF = EF^2$.

9.12 Opgave

Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med centrum O. Linjerne AB og CD skærer hinanden i punktet E, og linjerne AC og BD hinanden i punktet F. Trekanterne ADF's og BCF's omskrevne cirkler mødes foruden i F i et punkt H som ikke er O. Vis $EH \perp FH$.

(Lukić 20)

9.13 Opgave

En konveks firkant $ABCD$ er både indskrivelig og omskrivelig, og siderne AB, BC, CD, DA rører den indskrevne cirkel i punkter P, Q, R, S. Vis at den om- og indskrevne cirkels centre, diagonalernes skæringspunkt og skæringspunktet mellem linjerne PR og QS ligger på en linje.

(Crux 3256)

9.14 Opgave

I den indskrivelige konvekse firkant $ABCD$ er P skæringspunktet mellem $\angle DAB$'s og $\angle ABC$'s halveringslinjer. Punkterne Q, R, S er defineret tilsvarende med cyklisk ombytning af A, B, C, D, og det antages at punkterne P, Q, R, S er forskellige. Vis: a) Firkant $PQRS$ er indskrivelig. b) Diagonalernes skæringspunkt i firkant $ABCD$ og centrene for firkanterne $ABCD$'s og $PQRS$'s omskrevne cirkler ligger på en linje. c) $PR \perp QS$.

(Crux 2978).

9.15 Opgave

Cirklerne $\mathscr{C}_1$ og $\mathscr{C}_2$ skærer hinanden i A og B. Deres fælles ydre tangenter skærer hinanden i O. En linje l gennem O skærer $\mathscr{C}_1$ i P og et andet punkt og $\mathscr{C}_2$ i Q og et andet punkt, hvor P og Q hver for sig er tættere på O end det andet skæringspunkt. Lad $M = AP \cap BQ$, $N = AQ \cap BP$, og lad C være et punkt på l så $|CM| = |CN|$. Vis at følgende ikke afhænger af l.

1) $\angle AMB$.

2) $|MN|$.

3) $|CM|$ medmindre l går gennem centrene af $\mathscr{C}_1$ og $\mathscr{C}_2$.

(Viking Battle 2016, her med det danske holds løsning).

9.16 Opgave

En trekant ABC og et punkt T som ikke er B eller C, er givet. Lad P og Q betegne projektionerne af T på AB og AC og R og S projektionerne af A på BT og CT. Alle de nævnte punkter er forskellige. Vis at PS og QR mødes på linjen BC.

(Lukić 11)

9.17 Opgave

En linje gennem et punkt M skærer siderne BC, CA, AB i en trekant ABC i punkter A_1, B_1, C_1, og linjerne AM, BM, CM skærer ABC's omskrevne cirkel i punkter A_2, B_2, C_2. Alle de nævnte punkter er forskellige, og ingen af linjerne A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 er tangent til den omskrevne cirkel eller indeholder andre af de nævnte punkter. Vis at disse linjer har et fælles punkt som ligger på den omskrevne cirkel.

(Lukić 12)

9.18 Opgave

I trekant ABC, som ikke er ret, er BE og CF højder. To cirkler gennem punkterne A og F rører linjen BC i forskellige punkter P og Q. Vis at linjerne PE og QF skærer hinanden på trekant AEF's omskrevne cirkel.

(Opgave G4 i IMO-kortlisten 2008 let almengjort)

Løs opgaven ved at anvende Pascals sætning på trekant AEF's omskrevne cirkel. Dette er kortlistens løsning 2.

10 Løsninger

Øvelse 1.1

Gennem to forskellige punkter A og B i det geometriske plan går der netop én linje. Hvis A ligger i det geometriske plan, og B er uendelig fjernt, ligger B på en linje l som ikke er den uendelig fjerne. En linje i det geometriske plan går gennem A og B hvis og kun hvis den går gennem A og er parallel med l. Dette opfylder netop én linje i det geometriske plan, og den uendelig fjerne linje går ikke gennem A. Hvis A og B begge er uendelig fjerne, går den uendelig fjerne linje gennem dem begge, og det gør ingen linje i det geometriske plan fordi den kun har ét uendelig fjernt punkt.

Hvis to forskellige linjer l og m i det gemetriske plan ikke er parallelle, har de netop ét fælles punkt i det geometriske plan, og deres uendelig fjerne punkter er forskellige. Er de parallelle, har de ingen fælles punkter i det geometriske plan og samme uendelig fjerne punkt. Hvis l ligger i det geometriske plan, og m er den uendelig fjerne linje, er l's uendelig fjerne punkt eneste fælles punkt for de to linjer.

Øvelse 2.2

De to første afsnit af beviset for den direkte sætning gælder uændret. Dermed findes punkterne P, Q, R som defineret dér. Hvis P lå på BB', lå A, A' også på BB'. Altså ligger B, B', P ikke på linje, og tilsvarende ligger C, C', Q ikke på linje. Hvis P lå på BC, lå også A på BC. Altså ligger B, C, P ikke på linje, og tilsvarende ligger hverken punkterne B, C, Q, punkterne B', C', P eller punkterne B', C', Q på linje. Dermed opfylder B, B', P, C, C', Q det samme som antaget om A, B, C, A', B', C'. Hvis P, Q, R ligger på linje, har $BC, B'C', PQ$ det fælles punkt R. Ifølge den direkte sætning ligger $BP \cap CQ = A, B'P \cap C'Q = A', O = BB' \cap CC'$ så på linje, og AA', BB', CC' har det fælles punkt O.

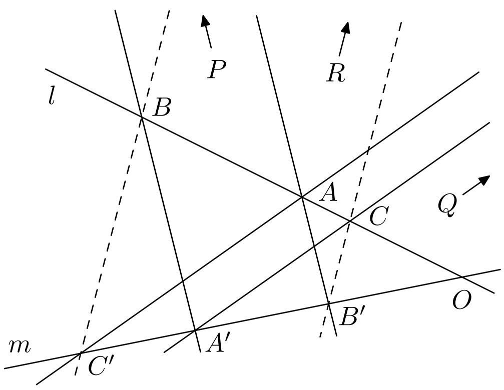
Så til spørgsmålet om dualitet: Lad os sige at tre punkter A, B, C som ikke ligger på linje, og tre linjer a, b, c som ikke har noget fælles punkt, *hører til samme trekant* hvis A og a, B og b, C og c er par af modstående hjørner og sider i en trekant. Dette er en tilordning én til én mellem alle tripler A, B, C af punkter som ikke ligger på linje, og alle tripler a, b, c af linjer som ikke har noget fælles punkt. Dermed er hvert udsagn om tre punkter som ikke ligger på linje, samtidig et udsagn om tre linjer som ikke har noget fælles punkt, og omvendt. Det ses også at sammenhængen mellem tripler A, B, C og a, b, c hørende til samme trekant er givet ved $a = BC, b = AC, c = AB$ (1) eller $A = b \cap c, B = a \cap c, C = a \cap b$ (2), som svarer til hinanden ved den duale ombytning af »punkt« og »linje« og »ligger på« og »går gennem«. (Bevis for at tilordnngen findes og er én til én mellem alle tripler af hver slags, gemmer jeg til sidst). Fra nu af er det underforstået at punkterne A, B, C og linjerne a, b, c hører til samme trekant, og A', B', C' og a', b', c' hører til samme trekant.

At for eksempel A, B, A' ikke ligger på linje, vil sige at A' ikke ligger på c. Derfor kan dén antagelse at hverken tre af punkterne A, B, A', B', tre af punkterne A, C, A', C' eller tre af punkterne B, C, B', C' ligger på linje, også udtrykkes sådan her: For intet par (X, x') eller (X', x), hvor X står for A,B eller C, og x for a, b eller c, og X og x ikke svarer til hinanden som stort og lille bogstav, ligger X på x. Her er der symmetri mellem punkter og linjer, så antagelsen kan også udtrykkes sådan her: Hverken tre af linjerne a, b, a', b', tre af linjerne a, c, a', c' eller tre af linjerne b, c, b', c' har noget fælles punkt. Antagelsen er altså den samme hvad enten den udtrykkes i den oprindelige eller den duale form, og den omvendte til Desargues' sætning kan udtrykkes sådan at det med denne antagelse gælder at hvis $a \cap a', b \cap b', c \cap c'$ ligger på linje, har CC', BB', AA' et fælles punkt. Da A, B, C fås af a, b, c og A', B', C' af a', b', c' med tilordningen (2), er denne sætning den duale til Desargues'.

Jeg slutter med bevis for at tilordningen givet ved (1) eller (2) findes og er én til én mellem alle tripler A, B, C af punkter som ikke ligger på linje, og alle tripler a, b, c af linjer som ikke har noget fælles punkt. Til det formål kalder jeg sådanne tripler for *trekanttripler*. Når A, B, C er et trekanttripel, er A, B, C forskellige, for hvis to af dem var det samme, ville der gå en linje gennem dette og det tredje punkt. Dermed findes linjerne i (1). Hvis a, b, c havde et fælles punkt X, ville der enten gælde $A = B = C = X$ så A, B, C lå på enhver linje gennem X, eller vi ville for eksempel have $A \neq X$. Da b, c så ville indeholde både A og X, ville b, c være identiske med AX, og B, C ville ligge på AX sammen med A. Altså er a, b, c et trekanttripel. Når vi i det foregående bytter om på »punkt« og »linje« og »ligger på« og »går gennem«, ser vi at tilordningen (2) findes og giver et trekanttripel A, B, C. Da B, C givet ved (2) er forskellige og ligger på a, har vi $BC = a$ og tilsvarende $AB = c, AC = b$. For hvert trekanttripel a, b, c giver (2) altså et trekanttripel A, B, C som giver a, b, c med (1). Dermed fås hvert trekanttripel a, b, c med (1) af ét og kun ét trekanttripel A, B, C, og (2) er den omvendte tilordning.

Øvelse 2.3

Da $A \neq B$, ville A' ligge på $AB = l$ hvis A, B, A' lå på linje. Da A' også ligger på m, ville vi så have $A' = l \cap m$. Altså ligger A, B, A' ikke på linje. Alment ligger hverken tre af punkterne A, B, A', B', tre af punkterne A, C, A', C' eller tre af punkterne B, C, B', C' på linje. Med argumenter som i de to første afsnit af beviset for Desargues' sætning med linjer som AB skiftet ud med linjer som AB' og tripler som A, B, C skiftet ud med tripler som A, B', C' finder man så at $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C, R = BC' \cap B'C, PQ$ findes og er forskellige, og intet af punkterne A, B, C, A', B', C' ligger på PQ. (Gå selv de to afsnit igennem for at se hvad der skal skiftes ud).



Som i beviset for Desargues' sætning er det tilstrækkeligt at se på det tilfælde hvor P, Q er uendelig fjerne, og A, B, C, A', B', C' så ligger i det geometriske plan. Da P er uendelig fjernt, og $AB', A'B$ skærer l i forskellige punkter A, B, har vi $AB' \parallel A'B$. Dermed fås linjestykket AB' af linjestykket BA' ved en afbildning $\mathscr{T}_1$ som er en multiplikation ud fra O hvis O ligger i det geomtriske plan, og en parallelforskydning langs en line gennem O hvis O er uendelig fjernt. Tilsvarende fås linjestykket CA' af linjestykket AC' ved en sådan afbildning $\mathscr{T}_2$. Når disse to afbildninger udføres efter hinanden, afhænger resultatet ikke af rækkefølgen, og den sammensatte afbildning er af samme slags. Afbildningen $\mathscr{T}_1$ efterfulgt af afbilningen $\mathscr{T}_2$ fører B over i C, og afbildningen $\mathscr{T}_2$ efterfulgt af afbilningen $\mathscr{T}_1$ fører C' over i B'. Den sammensatte afbildning fører så linjestykket BC' over i linjestykket $B'C$, og vi har $BC' \parallel CB'$. Dermed ligger punktet R på den uendelig fjerne linje sammen med P, Q.

Den duale til Pappos' sætning lyder: *Hvis forskellige linjer a, b, c går gennem et punkt L, og forskellige linjer a', b', c' gennem at andet punkt M, og $a, b, c, a', b', c' \neq LM$, så har $(a \cap b')(a' \cap b)$, $(a \cap c')(a' \cap c)$, $(b \cap c')(b' \cap c)$ et fælles punkt.* Dette vil blive vist at følge af Pappos' sætning. Når man i beviset bytter op på »punkt« og »linje« og »ligger på« og »går gennem«, har man så et bevis for at Pappos' sætning følger af den duale. Dermed er de to sætninger ensbetydende. Pappos' sætning er med andre ord dual til sig selv.

Bevis for den duale ud fra Pappos' sætning: Med de duale argumenter til dem i første afsnit finder vi at hverken tre af linjerne a, b, a', b', tre af linjerne a, c, a', c' eller tre af linjerne b, c, b', c' har et fælles punkt, og at $X = a \cap b', Y = a' \cap b, Z = a \cap c', W = a' \cap c, U = b \cap c', V = b' \cap c$, $p = XY, q = YZ, r = UV, N = p \cap q$ findes. Hvis L lå på både a og a', ville L være fælles punkt for a, b, a'. Derfor har vi $L \neq a \cap a'$ og tilsvarende $M, X, Y, Z, W \neq a \cap a'$. Da M så ikke ligger på a, og $ML, b' = MX, c' = MZ$ er forskellige, er L, X, Z forskellige. Tilsvarende er M, W, Y forskellige. Altså opfylder L, X, Z, M, W, Y antagelserne i Pappos' sætning, og N ligger på UV så p, q, r har punktet N fælles.

Øvelse 5.1

Hvis en linje l hverken er den uendelig fjerne linje eller går gennem O, er l kun polar til et punkt P som hverken er O eller uendelig fjernt. Hvis Q så er P's inverse punkt, gælder $l \perp OP$ hvis og kun hvis $l \perp OQ$. Dette og at l går gennem Q, er opfyldt af netop ét punkt Q nemlig O's projektion på l, og dermed af netop ét punkt P. Den uendelig fjerne linje er polar for O og ikke for noget punkt i det geometriske plan. Hvis l går gennem O, kan l kun være polar til et uendelig fjernt punkt. Dette punkt P har l som polar hvis og kun hvis der gælder $l \perp OP$, og dette opfylder netop ét uendelig fjernt punkt P nemlig det uendelig fjerne punkt på linjen gennem O vinkelret på l.

Øvelse 5.3

Hvis man i en sætning skifter ethvert punkt ud med sin polar, og enhver linje med sit pol, gælder ifølge sætning 5.2 ethvert »ligger på« eller »går gennem« i den nye, »duale«, sætning hvis det tilsvarende »går gennem« eller »ligger på« gælder i den oprindelige sætning. Hvis en sætning gælder, gælder derfor også den duale sætning.

Hvis punktet P ikke er cirklens centrum O eller det uendelig fjerne punkt, ligger P's inverse punkt Q på, uden for og inden i cirklen hvis P ligger på, inden i og uden for cirklen. Dermed har P's polar l ét, ingen og to punkter fælles med cirklen i de tre tilfælde. Hvis der gælder $P = O$, er l den uendelig fjerne linje og har så ingen punkter fælles med cirklen. Hvis P er et uendelig fjernt punkt, går l gennem O og har så to punkter fælles med cirklen. Alt i alt har l dermed ét, ingen og to punkter fælles med cirklen når P ligger på, inden i og uden for cirklen. Særlig er, som også er indset tidligere, l tangent til cirklen hvis P ligger på cirklen.

Øvelse 5.4

Tangenternes skæringspunkt er pol til QR, som indeholder P. Ifølge sætning 5.2 ligger det så på P's polar.

Øvelse 6.2

I den transformerede figur er det åbenlyst fordi den er spejlsymmetrisk om OQ' og OR'. Et mere formelt argument, som samtidig viser dualiteten mellem sætning 6.1 og det at l, m, n danner en polartrekant, er dette: Tangenterne a, b, c, d er polarer til punkterne A, B, C, D. Tangenternes skæringspunkter er så poler til sekanterne $AB, AC, \dots$, og linjerne l, m, n polarer til sekanternes skæringspunkter P, Q, R. Dermed er l, m, n siderne i polartrekanten PQR.

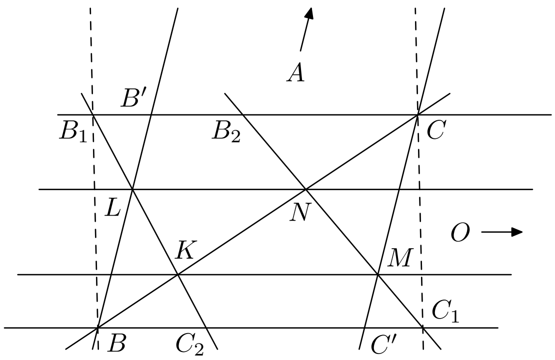
Øvelse 7.2

For en vilkårlig sekskant $ABCDEF$ omskrevet cirklen er sidernes røringspunkter hjørner i en indskrevet sekskant $GHIJKL$. Hjørnerne i $ABCDEF$ er så poler til siderne i $GHIJKL$, og linjerne gennem modstående hjørner i $ABCDEF$ polarer til skæringspunkterne mellem modstående sider i $GHIJLKL$. Da disse skæringspunkter ligger på en linje ifølge Pascals sætning, mødes linjerne gennem modstående hjørner i $ABCDEF$ i denne linjes pol. Som dual til Pascals sætning har vi dermed *Brianchons sætning: Hvis sekskant $ABCDEF$ er omskrevet en cirkel, har diagonalerne AB, CD, EF et fælles punkt.* At $ABCDEF$ er »omskrevet« en cirkel betyder i denne forbindelse kun at for eksempel *linjen* AB rører cirklen. Røringspunktet behøver ikke være indre punkt af *linjestykket* AB.

Opgave 9.1

Da enhver firkant kan transformeres projektivt til et parallelogram (endda et kvadrat), kan $ABCD$ uden tab af almenhed antages at være et parallelogram. Vi kan så betragte linjen AB som en talakse med begyndelsespunkt A og enhedspunkt B og definere tallet x_1 som M_1's koordinat på denne akse. Det uendelig fjerne punkt på AB kan tilskrives koordinaten ∞. Vi kan definere $x_2, x_3, \dots$ tilsvarende med cyklisk ombytning af A, B, C, D. Af ensvinklede trekanter fås så $x_{n+1} = (x_n - 1)/x_n$ for $x_n \neq 0, 1, \infty$. Simple geometriske overvejelser giver $x_{n+1} = \infty, 0, 1$ for $x_n = 0, 1, \infty$. Heraf følger i alle tilfælde $x_{n+3} = x_n$ og dermed $x_{13} = x_1$ fordi $13 - 1$ er deleligt med 3. Fordi $13 - 1$ er deleligt med 4, ligger M_{13} og M_1 begge på AB. Dermed $M_{13} = M_1$.

Opgave 9.2



Punktet O ligger ikke på AB, for så ville N ligge på AB og dermed være det samme punkt som B. Tilsvarende ligger O ikke på AC. Punktet O ligger heller ikke på BC, for så ville enten L eller M også ligge på BC og dermed være det samme punkt som B eller C. Med en projektiv transformation kan punkterne A og O lægges uendelig fjernt. Da O ikke liggger på AB eller AC, ligger B og C så i det geometriske plan. Det samme gør L og M fordi de er punkter på AB og AC som ikke er A, og K og N fordi de er punkter på MO og LO som ikke er O. Med $B' = AB \cap CO$ og $C' = AC \cap BO$ har vi så $BB' \parallel CC'$ og $BC' \parallel CB' \parallel KM \parallel NL$. Vi kan desuden indføre $B_2 = NM \cap CO$ og $C_2 = KL \cap BO$. Siderne af trekanterne BKC_2 og $C'MC_1$ på BO forholder sig da til siderne af trekanterne CKB_1 og CMB_2 på CO som de to førstnævntes fælles højde til de to sidstnævntes. Vi har så

$$\frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{C'C_1}}{\overrightarrow{B_2C}}, \quad \text{eller} \quad \overrightarrow{C'C_1} \cdot \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{BC_2} \cdot \overrightarrow{B_2C}.$$

Af trekanterne CNB_2, $B'LB_1$, BNC_1, BLC_2 fås tilsvarende $\overrightarrow{B_1B'} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{B_2C} \cdot \overrightarrow{BC_2}$ så vi har

$$\overrightarrow{C'C_1} \cdot \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_1B'} \cdot \overrightarrow{BC_1}.$$

Når begge sider af denne ligning trække fra $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}$, får man

$$\overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B'C} \cdot \overrightarrow{BC_1},$$

og da der gælder $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{B'C}$, følger heraf

$$\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{BC_1}.$$

Dette medfører $BB_1 \parallel CC_1$ så BB_1 og CC_1 mødes på den uendelig fjerne linje AO.

Bemærkning: Ifølge Desargues' sætning og dens omvendte anvendt på trekanterne BB_1B' og CC_1C' er opgavens påstand ensbetydende med at $BC, B_1C_1, B'C'$ har et fælles punkt. Også dette følger i den transformerede figur af $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{BC_1}$. Punktet er dér BC's midtpunkt. Det ses at være harmonisk konjugeret til skæringspunktet mellem BC og AO, som er BC's uendelig fjerne punkt i den transformerede figur, med hensyn til B og C.

Opgave 9.3

Da F ligger på korden DG i cirkel PDG, er F et indre punkt i cirklen, og dén og cirkel PFE skærer hinanden i et punkt Q foruden P. Det skal så vises at A, P, Q ligger på en linje. Med $J = BP \cap DQ$ og $K = CP \cap EQ$ følger dette af Desargues' sætning anvendt på trekanterne BDJ og CEK hvis vi kan vise $JK \parallel DE$. Lad os dertil indføre $T = DE \cap PQ$. Da T ligger på cirklernes radikalakse PQ, har vi

$$|TD| \cdot |TG| = |TE| \cdot |TF|, \quad \text{eller} \quad \frac{|TF|}{|TD|} = \frac{|TG|}{|TE|}.$$

Punktet F deler altså linjestykket TD i samme forhold som punktet G deler linjestykket TE i. Den affinitet med akse PQ og retning DE som afbilder D i E, afbilder så F i G og dermed J i K. Heraf følger $JK \parallel DE$.

Opgave 9.4

Da AX og AY er forskellige, er AXY en ikke udartet trekant. Dermed er X og Y forskellige, og XY forskellig fra AX og AY. Tilsvarende er XY forskellig fra BX, BY, CX, CY. Påstanden følger så umiddelbart af Pappos' sætning i dens duale form anvendt på de to sæt af linjer (AX, BX, CX) og (AY, BY, CY).

Opgave 9.5

Med $K = AB \cap EF$ og $L = AB \cap GH$ følger det af afsnit 3 at både K og L er C's harmonisk konjugerede med hensyn til A og B. Dermed $K = L$.

Opgave 9.6

Lad p være den linje som indeholder A, B, C, D, lad q være den linje som indeholder E, F, G, H, lad k være den linje som indeholder O, A, E, lad l være den linje som indeholder O, B, F, lad m være den linje som indeholder O, C, G, og lad n være den linje som indeholder O, D, H. Uden tab af almenhed kan vi antage at n er den uendelig fjerne linje. Da O ikke ligger på p, er D så det eneste uendelig fjerne punkt på p. Tilsvarende er H det eneste uendelig fjerne punkt på q.

Linjerne k, l, m er så ikke uendelig fjerne. Da de har det uendelig fjerne punkt O fælles, er de da parallelle. Hvis $\{A, B\}$ og $\{C, D\}$ er harmonisk konjugerede punktpar, er C så midtpunktet af linjestykket AB. Dermed ligger m midt mellem k og l, så G er midtpunktet af linjestykket EF, og $\{E, F\}$ og $\{G, H\}$ er harmonisk konjugerede punktpar.

Opgave 9.7

Lad $A'B'C'$ være en ligesidet trekant omskrevet ABC's indskrevne cirkel og M', N', P' cirklens røringspunkter med $B'C', C'A', A'B'$. En projektiv transformation afbilder A, M, N, P i A', M', N', P'. Derved afbildes cirklen i det keglesnit som rører $A'B'$ i P' og $C'A'$ i N' og går gennem M', altså cirklen selv. Cirklens tangent BC i M afbildes i cirklens tangent $B'C'$ i M'. Dermed afbildes $B = AB \cap BC$ i $B' = A'B' \cap B'C'$. Tilsvarende C. Alt i alt afbildes A, B, C, M, N, P så i A', B', C', M', N', P'. Da $A'M', B'N', C'P'$ går gennem cirklens centrum O, går AM, BN, CP så gennem O's billede ved den omvendte transformation.

Ved at erstatte punkter med deres polarer og linjer med deres poler ser man at det duale resultat er at $AB \cap MN$, $BC \cap NP$, $CA \cap PM$ ligger på en linje. Her er det benyttet at NP, PM, MN er polarer til A, B, C ifølge iagttagelsen efter øvelse 5.3.

Bemærkninger: 1) Løsningen viser at *enhver trekant kan transformeres til en ligesidet trekant med en projektiv transformation som lader den omskrevne cirkel uændret*, og *enhver trekant kan transformeres til en ligesidet trekant med en projektiv transformation som lader den indskrevne cirkel uændret*. Transformationerne er forskellige medmindre trekanten er ligesidet. 2) Resultaterne kan ses som grænsetilfælde af Brianchons og Pascals sætninger hvor par af punkter på cirklen ligger uendelig tæt.

Opgave 9.8

Hvis E er midtpunkt af én af cirkelbuerne MN, findes der en projektiv transformation som afbilder korden MN i en diameter XY parallel med MN, punktet E i sig selv og P's inverse punkt Q i PE's uendelig fjerne punkt Z. Denne transformation afbilder cirklen i det keglesnit som går gennem X, Y, E og har tangenter i X og Y parallelle med PE, altså cirklen selv. Hvis figuren spejles i PE før og efter transformationen, afbildes igen M, N, E, Q i X, Y, E, Z. Denne sammensatte transformation er så den samme som den oprindelige, så par af punkter som er hinandens spejlbilleder i PE, afbildes i sådanne par af punkter, og dette gælder da også for den omvendte transformation. Hvis A', B', C', D' er billederne af A, B, C, D ved den oprindelige transformation, går $A'B'$ og $C'D'$ gennem P's billede, som er skæringspunktet mellem PE og XY, altså cirklens centrum O. Dermed er XY, $A'B'$ og $C'D'$ diametre så de afbildes i sig selv ved en 180° drejning om O. Ved denne drejning afbildes XY's skæringspunkter med $A'C'$ og $B'D'$ i hinanden og er da hinandens spejlbilleder i PE. Heraf følger påstanden.

Opgave 9.9

Opgaven diskuteres uden indskrænkning til det tilfælde hvor cirklerne ikke skærer hinanden, og det underforstås at alle de punkter der omtales i det følgende, ligger i det geometriske plan. Lad C og r være centrum og radius for én af cirklerne. Punkterne P og Q er konjugerede med hensyn til denne cirkel hvis og kun hvis Q's projektion Q' på CP er P's inverse punkt, altså $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = |CP| \cdot |CQ'| = r^2$. Dette kan skrives som $|CM|^2 - |MP|^2 = r^2$, hvor M er PQ's midtpunkt.

For at denne ligning er opfyldt for alle tre cirkler, er det nødvendigt at M's potens $|CM|^2 - r^2$ har samme værdi p med hensyn til dem alle. Hvis dét er opfyldt, og der gælder $|MP|^2 = p$, er ligningen opfyldt for alle cirklerne. Dermed er P's spejlbillede i M så konjugeret til P med hensyn til dem alle. Altså har P et fælles konjugeret punkt med hensyn til alle cirklerne hvis og kun hvis der findes et punkt M med samme potens p med hensyn til alle cirklerne, og der gælder $|MP|^2 = p$.

Et punkt har samme potens med hensyn til alle cirklerne hvis og kun hvis det er fælles for to radikalakser. Det ligger så også på den tredje radikalakse. Lad os først antage at netop ét punkt M opfylder dette. Dét er tilfældet hvis og kun hvis to radikalakser er forskellige og ikke parallelle, altså hvis og kun hvis cirklernes centre ikke ligger på en linje. Lad p være cirklernes potens i M. For $p > 0$ har P så et fælles konjugeret punkt med hensyn til alle cirklerne hvis og kun hvis P ligger på cirklen med centrum M og radius $\sqrt{p}$. For $p = 0$ er det opfyldt for $P = M$ og ikke af andre punkter P, og for $p < 0$ er det ikke opfyldt af noget punkt P. For $p > 0$ ligger M uden for cirklerne, for $p = 0$ går cirklerne gennem M, og for $p < 0$ ligger M inden i cirklerne. Det er tilstrækkeligt til men ikke nødvendigt for at M ligger uden for cirklerne, at intet punkt er fælles for to af dem, fordi radikalaksen for hvert par af cirkler så ligger uden for disse to cirkler.

Hvis cirklernes centre ligger på en linje l, er radikalakserne vinkelrette på l. Hvis to af dem er forskellige, findes der så intet punkt M med samme potens med hensyn til alle tre cirkler og dermed intet punkt P som har et fælles konjugeret punkt med hensyn til dem alle. Antag at en linje m er radikalakse for to par af cirkler og dermed for det tredje par. Lad os indføre et koordinatsystem med førsteakse på l og andenakse på m og kalde begyndelsespunktet for O og cirklernes fælles potens i O for p_0. Et punkt M har samme potens p med hensyn til alle cirklerne hvis og kun det ligger på m og altså har koordinater af formen $(0, a)$, og der gælder så $p = p_0 + a^2$. Hvis P's koordinater betegnes med (x, y), kan ligningen $MP^2 = p$ skrives $x^2 + (y - a)^2 = p_0 + a^2$, eller $2ay = x^2 + y^2 - p_0$. For $y \neq 0$ har denne ligning en løsning med hensyn til a. For $y = 0$ bliver den til $x^2 = p_0$ og har så to, én eller ingen løsninger med hensyn til x afhængig af p_0's fortegn. Puntet P har altså et fælles konjugeret punkt med hensyn til alle cirklerne hvis det ikke ligger på l. Desuden gælder det for to, ét eller ingen punkter på l afhængig af p_0's fortegn. For $p_0 > 0$ er intet punkt fælles for to af cirklerne. Dét ses af at en cirkels skæringspunkter med førsteaksen har førstekoordinater x_1 og x_2 som opfylder $x_1 x_2 = p_0$. For $p_0 = 0$ er O fælles tangent for alle cirklerne, og for $p_0 < 0$ er punkterne $(0, \pm\sqrt{-p_0})$ fælles punkt for dem alle.

Opgave 9.10

Linjerne AC og BD skærer hinanden i et punkt N i det geometriske plan. Ifølge sætning 6.1 er M og N konjugerede med hensyn til $\mathscr{C}$. Da N har samme potens med hensyn til cirklerne $\mathscr{C}$ og OAC og samme potens med hensyn til cirklerne $\mathscr{C}$ og OBD, har N samme potens med hensyn til alle tre cirkler og ligger så på radikalaksen OK for cirklerne OAC og OBD. Af $OK \cdot ON = ON^2 - KN \cdot ON = ON^2 - (ON^2 - r^2) = r^2$, hvor r er $\mathscr{C}$'s radius, ses det at K og N er inverse med hensyn til $\mathscr{C}$. Dermed er MK polar til N, og står så vinkelret på OK.

Opgave 9.11

1. Da cirkel EXY fås af cirkel EGH ved multiplikation i forholdet 2:1 ud fra E, har de to cirkler fælles tangent i E.

2. Anvendt på triplerne A, C, U og B, D, V, hvor U og V er de uendelig fjerne punkter på AC og BD, siger Pappos' sætning at F, X, Y ligger på en linje. (Læg mærke til at det ikke benyttes af firkant $ABCD$ er indskrivelig. Den behøver heller ikke være konveks eller egentlig. Da

midtpunktet af linjestykket EF og G og H er forbundet med F, X, Y gennem multiplikationen i punkt 1, er resultatet ensbetydende med anvendelsen af lemmaet i kortlistens løsning 2 på den uegentlige firkant $ADBC$). Ligningen $XF \cdot YF = EF^2$ udtrykker så at F har potens EF^2 med hensyn til cirkel EXY, altså at EF rører cirklen.

3. (Først her benyttes det at firkant $ABCD$ er indskrivelig). Lad O og r være centrum og radius for cirkel $ABCD$, og lad $\vec{P}$ betegne vektoren $\overrightarrow{OP}$ for et hvilket som helst punkt P. Der gælder så $AE \cdot CE = \vec{E}^2 - r^2$ og de tilsvarende. Da E og F er konjugerede med hensyn til cirklen, gælder desuden $\vec{E} \cdot \vec{F} = r^2$ som vist i løsningen til opgave 9.9. Dermed har vi

$$
\begin{aligned}
XF \cdot YF - EF^2 &= (\vec{X} - \vec{F}) \cdot (\vec{Y} - \vec{F}) - (\vec{E} - \vec{F})^2 \\
&= (\vec{A} + \vec{B} - \vec{E} - \vec{F}) \cdot (\vec{C} + \vec{D} - \vec{E} - \vec{F}) - (\vec{E} - \vec{F})^2 \\
&= (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{C} + \vec{D}) - (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) \cdot (\vec{E} + \vec{F}) + (\vec{E} + \vec{F})^2 - (\vec{E} - \vec{F})^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\vec{A} - \vec{E}) \cdot (\vec{C} - \vec{E}) + (\vec{B} - \vec{E}) \cdot (\vec{D} - \vec{E}) \\
&\quad + (\vec{A} - \vec{F}) \cdot (\vec{D} - \vec{F}) + (\vec{B} - \vec{F}) \cdot (\vec{C} - \vec{F}) - 2(\vec{E}^2 + \vec{F}^2) + 4\vec{E} \cdot \vec{F} \\
&= |AE| \cdot |CE| + |BE| \cdot |DE| + |AF| \cdot |DF| + |BF| \cdot |CF| - 2(\vec{E}^2 + \vec{F}^2) + 4r^2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Opgave 9.12

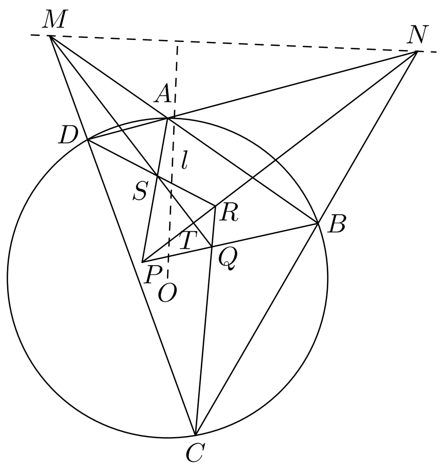
Lad $ABCD$'s, ADF's og BCF's omskrevne cirkler være betegnet med $\mathscr{C}, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$. Når vinkler regnes med fortegn modulo 180° får man af periferivinkler i $\mathscr{C}_1$ at der gælder $\angle AHF = \angle ADF = \angle ADB$. Af $\mathscr{C}_2$ og $\mathscr{C}$ fås tilsvarende $\angle FHB = \angle ACB = \angle ADB$. Vi har så $\angle AHB = \angle AHF + \angle FHB = 2\angle ADB = \angle AOB$. Dermed ligger A, B, H, O på en cirkel $\mathscr{C}_3$. Tilsvarende ligger C, D, H, O på en cirkel $\mathscr{C}_4$.

Da E ligger på radikalaksen AB for cirkelparret $\{\mathscr{C}, \mathscr{C}_3\}$ og radikalaksen CD for $\{\mathscr{C}, \mathscr{C}_4\}$, ligger E på radikalaksen OH for $\{\mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4\}$. Af cirklerne $\mathscr{C}, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ fås tilsvarende at $G = AD \cap BC$ ligger på FH. Ifølge sætning 6.1 er E pol til FG. Heraf $OE \perp FG$ og dermed $EH \perp FH$.

Opgave 9.13

Hvis begge par af modstående sider i firkant $ABCD$ er parallelle, er firkanten et rektangel fordi den er indskrivelig, og en rombe fordi den er omskrivelig. Den er så et kvadrat. Diagonalernes skæringspunkt, $PR \cap QS$ og den om- og indskrevne cirkels centre ligger da alle i kvadratets centrum og dermed på en vilkårlig linje gennem kvadratets centrum. Antag herefter uden tab af almenhed at AB og CD ikke er parallelle. Da $ABCD$'s sider er tangenter til $PQRS$'s omskrevne cirkel i denne firkants hjørner, går diagonalerne AC og BD gennem $PR \cap QS$ følge øvelse 6.2. Dermed er diagonalernes skæringspunkt og $PR \cap QS$ det samme punkt E. Lad os indføre $F = AB \cap CD$ og $G = BC \cap DA$. Med hensyn til $ABCD$'s omskrevne cirkel er E så pol til FG ifølge sætning 6.1. Med hensyn til $ABCD$'s indskrevne cirkel er PR polar til F og QS polar til G ifølge iagttagelsen efter øvelse 5.3. Dermed er $E = PR \cap QS$ pol til FG med hensyn til til den indskrevne cirkel. Da AB og CD ikke er parallelle, ligger F ikke på den uendelig fjerne linje, og FG er så ikke den uendelig fjerne linje. Linjen gennem E vinkelret på FG går da gennem centrene for begge cirkler.

Opgave 9.14



Da punkterne P, Q, R, S er forskellige, har de brudte linjer APB og DRC enten to skæringspunkter, som så er S og Q, eller de skærer ikke hinanden. Hvis de ikke skærer hinanden, ligger S på forlængelserne af linjestykkerne AP og DR, og Q på forlængelserne af linjestykkerne BP og CR, og de brudte linjer ASD og BQC skærer så hinanden i punkterne P og R. Vi kan derfor uden tab af almenhed antage at de brudte linjer APB og DRC skærer hinanden. Vinklerne P og R i trekanterne APB og CRD er så modstående vinkler i firkant $PQRS$. Alle vinklerne i de to trekanter er $2 \cdot 180°$ tilsammen, og alle vinklerne undtagen de to nævnte er $360°/2$ tilsammen. Dermed er de to vinkler $2 \cdot 180° - 360°/2 = 180°$ tilsammen, og firkant $PQRS$ er indskrivelig. Dette opfylder a). Resultatet gælder for enhver konveks firkant, indskrivelig eller ej.

Hvis der gælder $AB \parallel DC$ eller $AD \parallel BC$, er $ABCD$ et ligebenet trapez. Punktet $AC \cap BD$ og centrene for cirklerne $ABCD$ og $PQRS$ ligger så på trapezets spejlingsakse. Dermed er b) opfyldt. Egenskaben c) følger af at enten PR eller QS ligger på spejlingsaksen.

Vi kan herefter antage at AB og DC mødes i et punkt M og AD og BC i et punkt N, og uden tab af almenhed kan vi antage at M og N ligger på linjestykkerne BA's og DA's forlængelser ud over A. Så er Q skæringspunkt for to indre vinkelhalveringslinjer i trekant BCM, og S er skæringspunkt for to ydre vinkelhalveringslinjer i trekant ADM. Dermed ligger Q og S på $\angle BMC$'s halveringslinje. Der gælder $\angle BAD = \angle ABC + \angle BMC$ fordi begge sider af denne ligning er supplementvinkler til $\angle BCD$. Halvering af alle ligningens vinkler giver $\angle BAS = \angle ABQ + \angle BMQ$, hvor højre side er supplementvinkel til $\angle BQS$. Dermed er firkant $ABQS$ indskrivelig. Punktet M har så samme potens med hensyn til cirklerne $ABCD$ og $PQRS$, og ligger da på deres radikalakse. På samme måde ligger punkterne P og R på $\angle CND$'s halveringslinje, og et tilsvarende argument viser at N ligger på radikalaksen for cirklerne $ABCD$ og $PQRS$. Radikalaksen er så MN. Centrum O for cirkel $ABCD$ og centrum for cirkel $PQRS$ ligger da begge på linjen l gennem O vinkelret på MN. Ifølge sætning 6.1 er $AC \cap BD$ pol til MN og ligger så også på l. Dette opfylder b).

Hvis T er skæringspunktet mellem PR og QS, har vi $\angle MTN = \angle MAN - \angle BMC/2 - \angle CND/2 = \angle BAD - (180° - \angle ABC - \angle BCD)/2 - (180° - \angle BCD - \angle ADC)/2 = \angle BAD + \angle BCD + (\angle ABC + \angle ADC)/2 - 180° = 180° + 180°/2 - 180° = 90°$. Dette opfylder c).

Opgave 9.15

Uden tab af almenhed antages $\mathscr{C}_1$ at være den mindste af de to cirkler. Med A', B' betegnes det andet skæringspunkt mellem OA, OB og $\mathscr{C}_1$.

1) Af $MB \parallel PB'$ følger $\angle AMB = \angle APB' = \angle AA'B'$, som ikke afhænger af l. Denne vinkel betegnes med v.

2) Tilsvarende fås $\angle ANB = \angle BB'A' = v$, hvor den sidste ligning følger af symmetrien i A og B. Dermed tilhører M, N mængden af punkter X på samme side af AB som O som opfylder $\angle AXB = v$. Denne mængde er en del af en cirkel $\mathscr{C}_3$ gennem A, B. Af $AQ \parallel A'P$ følger

$\angle MAN = \angle PAQ = \angle APA' = \angle ABA'$, som ikke afhænger af l. Dermed er længden af korden MN i $\mathscr{C}_3$ uafhængig af l.

3) Lad a betegne linjen gennem centrene af $\mathscr{C}_1$ og $\mathscr{C}_2$. Når $l \neq a$, kan vi uden tab af almenhed antage at P og Q ligger på samme side af a som A. Vi har da $|AQ| < |BQ|$, hvoraf $\angle ABM = \angle ABQ < \angle BAQ = \angle BAN$, så MN skærer AB i et punkt R på samme side af a som A. Da l skærer MN i et punkt S mellem M og N og dermed på samme side af AB som O, og S også ligger mellem P og Q og dermed på samme side af a som R, er $\angle OSR$ stump. Dermed har l netop ét punkt C fælles med midtnormalen n til linjestykket MN.

Da C ligger på R's polar l med hensyn til $\mathscr{C}_3$ og på n, er C pol til MN. Da $|MN|$ er konstant, er $|CM|$ (og $|CN|$) så konstante.

Opgave 9.16

Punkterne P, Q, R, S ligger alle på cirklen med diameter AT, og der gælder $AP \cap RT = B$, $AQ \cap ST = C$. Påstanden følger så af Pascals sætning anvendt på punkterne P, A, Q, R, T, S.

Opgave 9.17

Da A_1A_2 ikke er tangent til den omskrevne cirkel, skærer den cirklen i et punkt X foruden A_2, og da A_1A_2 ikke indeholder nogen af de øvrige punkter som er nævnt i opgaven, og alle punkter nævnt i opgaven er indbyrdes forskellige, er punkterene C, B, B_2, X, A_2, A indbyrdes forskellige. Af Pascals sætning anvendt på disse punkter følger det så at B_2X skærer AC i et punkt på A_1M, altså i B_1. Dermed går B_1B_2 gennem X. Tilsvarende går C_1C_2 gennem X

Opgave 9.18

Fordi trekant ABC ikke er retvinklet, findes trekant AEF's omskrevne cirklen $\mathscr{C}$. Den går gennem højdernes skæringspunkt H, og E, F, H ligger ikke på BC. Dermed findes linjerne PE og QF, og de har højst ét fælles punkt. Da der gælder $BP^2 = BA \cdot BF = BQ^2$, er B midtpunkt af PQ og dermed forskelligt fra P og Q. Lad U og S betegne $\mathscr{C}$'s skæringspunkter med PA og PE bortset fra at vi sætter $S = E$ hvis PE rører $\mathscr{C}$. Da FA og HE mødes i B, og AU og ES i P, følger det så af Pascals sætning anvendt på sekskant $FAUHES$ at UH og SF mødes i et punkt på BP. Dette punkt er entydigt fordi hverken H eller F ligger på BP. Hvis vi kan vise at HU går gennem Q, kan vi så slutte at SF går gennem Q, og dermed at PE og QF skærer hinanden i S, som ligger på $\mathscr{C}$.

Vi skal altså vise at HU går gennem Q. Lad AD være højde i trekant ABC. Da denne ikke er retvinklet, er B og D forskellige. Vi har allerede indset at F og H ikke ligger på BC. Særlig følger $D \neq H$, og da cirklerne med diametre AD og AH så ikke begge kan gå gennem F, er P forskelligt fra D. Dermed er U forskelligt fra P og ligger så heller ikke på BC; ellers ville $\mathscr{C}$ være identisk med cirkel AFP, og der ville gælde $D = P$. Altså findes firkanterne $PUHD$ og $DHBF$. Da disse firkanter er indskrivelige, har vi

$$|PA| \cdot |UA| = |DA| \cdot |HA| = |BA| \cdot |FA| .$$

Når dette kombineres med $|PA| \cdot |UA| = |AP|^2 - |PA| \cdot |PU|$ og $|BA| \cdot |FA| = |AB|^2 - |BA| \cdot |BF| = |AB|^2 - |BP|^2$, får vi

$$|PA| \cdot |PU| = |AP|^2 + |BP|^2 - |AB|^2 = 2\,\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2\,|PD| \cdot |PB| = |PD| \cdot |PQ| .$$

Trekanterne PAD og PQU er så ensvinklede. Da både QU og HU dermed er vinkelrette på PA, går HU gennem Q som ønsket.