Indhold

Spilstrategier

De spiltyper vi skal se på her, er primært spil af følgende type: Spil der spilles af to spillere A og B som skiftes til at trække, A starter, og hvis man ikke kan trække, har man tabt. Der er desuden kun et endeligt antal træk, dvs. spillet vil altid slutte, og det kan ikke ende uafgjort.

Vindende strategi

> **Vindende strategi** At en spiller har en vindende strategi, betyder at spilleren altid kan vinde ligegyldigt hvordan modparten spiller.

I spil der har et endeligt antal træk, og som ikke kan ende uafgjort, kan man i princippet lave en oversigt over alle mulige udfald af spillet. I praksis er der dog ofte alt for mange forskellige udfald til at det kan lade sig gøre. Fordi spillet er deterministisk og altid ender med en vinder, har en af de to spillere en vindende strategi.

Lad os nemlig antage at A ikke har en vindende strategi. Det betyder at ligegyldigt hvordan A spiller, så kan A ikke sikre sig sejren. Da vi ved at spillet ender efter et endeligt antal træk, og at der til slut er en vinder, så betyder det at B kan sikre sig sejren uanset hvordan A spiller. Derfor har B i dette tilfælde en vindende strategi. Altså kan vi konkludere at en af de to spillere altid har en vindende strategi.

I det følgende er der forskellige strategier for hvordan man kan afgøre hvilken af de to spillere der har en vindende strategi i denne type spil.

1 Vindermængde og tabermængde

I det første eksempel og de første opgaver vi skal se på, er strategien at dele alle spilpositioner i to grupper: De spilpositioner hvor første spiller har en vindende strategi hvis hun skal trække, og dem hvor hun ikke har, dvs. dem hvor spiller nummer to har en vindende strategi.

Eksempel

Lad n og k være positive heltal. I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne 1, 2, …, $k-1$ eller k sten fra bordet. Den spiller der tager den sidste sten, har vundet. Spørgsmålet er nu for hvilke værdier af n den første spiller A har en vindende strategi.

Dette kan man finde ud af ved at prøve sig frem med små tal. Det er for eksempel indlysende at for $n \in \{1,2,\dots,k\}$ har spiller A en vindende strategi, mens for $n = k+1$ har hun ikke. Dvs. A har en vindende strategi, hvis hun efter første træk kan efterlade $k+1$ sten på bordet, og det kan hun netop for $n \in \{k+2, k+3, \dots, 2k+1\}$. På denne måde ser man induktivt at A har en vindende strategi, netop når n ikke er et multiplum af $k+1$.

Inden vi argumenterer helt præcist for påstanden, indfører vi noget teori.

Vindermængde og tabermængde

I et spil inddeler vi samtlige spilpositioner i to mængder:

Vindermængden Mængden V af alle spilpositioner hvor spiller A har en vindende strategi når A skal trække, kaldes *vindermængden*.

Tabermængden Mængden T af alle spilpositioner hvor spiller A ikke har en vindende strategi når A skal trække, kaldes *tabermængden*.

Sætning

Vi betragter et spil med to spillere A og B som skiftes til at trække, der gælder samme regler for hvordan A og B må trække, og A starter. Spillet stopper når en af de to spillere ikke længere kan foretage et lovligt træk, og det sker efter et endeligt antal træk.

Hvis man i spillet har inddelt alle mulige spilpositioner i to mængder V og T da er V vindermængden og T tabermængden hvis der gælder følgende:

i) Når man trækker fra en spilposition i V, skal der findes et lovligt træk så man efter trækket opnår en spilposition fra T.

ii) Når man trækker fra en spilposition i T skal man efter et vilkårligt lovligt træk opnå en spilposition fra V, eller det skal være umuligt at trække.

Bevis Antag at mængderne T og V opfylder ovenstående.

Hvis A trækker fra en position i V, kan A altid trække så der opnås en spilsituation fra mængden T. Når modparten B derefter trækker, opnår B lige meget hvilket træk der vælges, en situation fra mængden V, eller også kan B ikke trække og har tabt. Da man altid kan trække fra en spilposition fra V, kan spillet fortsætte på denne måde så A altid har mulighed for at trække. Da spillet ender efter et endeligt antal træk, betyder det at B ender med ikke at kunne trække. Derfor vinder A. Dette viser at A har en vindende strategi for alle spilpositioner fra mængden V.

Hvis A trækker fra en spilposition i mængden T, vil der lige meget hvordan A trækker, opstå en situation fra V. I dette tilfælde har vi lige vist at B der nu skal trække, har en vindende strategi. $\square$

Eksempel fortsat

Nu vender vi tilbage til eksemplet fra før. Først bemærker vi at spillet opfylder de regler der opridses i sætningen, da de to spillere skiftes til at trække, der gælder samme regler for hvordan A og B må trække, og at spillet slutter efter et endeligt antal træk. Vi kan altså benytte sætningen og inddele i vinder- og tabermængde:

Af analysen fremgår det hvordan man deler startmulighederne op i tabermængden

$$T = \{n \in \mathbb{N} | n = m(k+1) \text{ for } m \in \mathbb{N}\}$$

og vindermængden

$$V = \{n \in \mathbb{N} | n \neq m(k+1) \text{ for } m \in \mathbb{N}\}.$$

Vi kan argumentere for at dette faktisk er tabermængden og vindermængden ved at benytte sætningen: Ved en spilposition fra V, dvs. en situation hvor n ikke er et multiplum af $k+1$, kan A efter hvert træk efterlade et bord med et multiplum af $k+1$ sten ved at fjerne den rest man får ved at dividere n med $k+1$ (denne rest er altid blandt $1, 2, \ldots, k$). Ved en spilposition fra T, dvs. hvor n er et multiplum af $k+1$ sten, vil A ligegyldigt hvordan hun trækker, opnå en situation hvor der ikke er et multiplum af $k+1$ sten, da hun skal fjerne mellem 1 og k sten.

Dermed har vi bevist at spiller A har en vindende strategi netop hvis n ikke er et multiplum af $k+1$, mens B har en vindende strategi hvis n er et multiplum af $k+1$.

Prøv at benytte sætningen til at bestemme vinder- og tabermængde i de næste opgaver. Husk at det er en god idé at bygge mængderne op ved at starte med de helt simple tilfælde hvor der kun er få træk til spillet stopper.

Opgave 1.1. I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne m sten fra bordet, hvor $m \in \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\}$. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet. Bestem de værdier af n for hvilke spiller A har en vindende strategi.

Opgave 1.2. I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne p^m sten fra bordet, hvor p er et primtal, og m er et ikke-negativt helt tal. Primtallet p og tallet m må gerne variere fra træk til træk. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet. Bestem tabermængden.

Opgave 1.3. Albert og Benny spiller et spil hvor de starter med en snor af heltallig længde n. Albert starter med at klippe snoren i tre stykker hver med heltallig længde så der er et stykke som er længere end de to andre. De to korteste stykker smides væk, og den længste snor gives videre til modparten, som nu skal klippe denne snor i tre stykker efter de samme regler. Sådan fortsætter spillet indtil det ikke er muligt at klippe snoren i tre stykker efter de givne regler. Den som først ikke kan klippe, har tabt. Bestem samtlige værdier af n for hvilke Albert har en vindende strategi.

Opgave 1.4. Fire bunker med henholdsvis 38, 45, 61 og 70 tændstikker ligger på et bord. To spillere skiftes til at udvælge to bunker og fjerne et antal tændstikker fra hver. (De skal altså fjerne mindst en fra hver bunke, men behøver ikke at fjerne lige mange fra hver.) Den spiller som først ikke kan trække, taber. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? (Baltic Way 1996)

2 Kopier modpartens træk

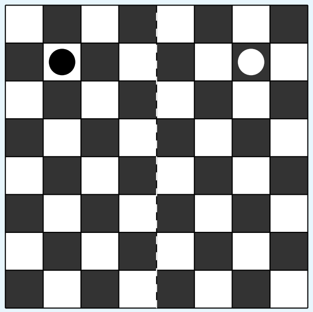
Nu skal vi se på nogle spil som nemt bliver så uoverskuelige at det er umuligt at bestemme taber- og vindermængden. Når man er på jagt efter en vindende strategi, kan man ikke få overblik over alle de situationer der kan opstå i spillet, men man kan ved hjælp af en strategi der bygger på symmetri hvor man så at sige "kopierer"modstanderens træk, sørge for at man kun kommer ud i et overskueligt udvalg af alle disse muligheder.

Eksempel

På et skakbræt skiftes spiller A og B til at placere en springer. Spiller A placerer hvide springere og B sorte. De må kun placere springerne på tomme felter som ikke er truet af en springer af modsat farve. Den spiller som først ikke kan placere en springer, har tabt. Vi skal nu undersøge hvem af A og B der har en vindende strategi, når spiller A starter.

Det er let at se at det bliver fuldstændigt uoverskueligt at opdele samtlige mulige situationer i en vinder- og tabermængde, men hvis vi blot kan finde en vindende strategi for en af spillerne, er det også godt nok.

I dette tilfælde har spiller B en vindende strategi. Hvis hun udnytter den lodretterette symmetriakse midt gennem brættet der parrer felterne to og to, og hver gang spiller A har placeret en springer, placerer en springer på det felt der er parret med det felt hvor spiller A placerede, vil hun altid have mulighed for at trække.



Det følger af at den springer A netop har placeret på et felt, ikke kan true makkerfeltet. Da A kunne sætter sin springer på et felt uden at den blev truet, så kan spiller B derfor tilsvarende sætte sin springer på makkerfeltet uden at den bliver truet, da alle sorte springere er en spejling af alle hvide springere i symmetriaksen.

Her udnytter man altså at felterne kan parres to og to så man hele tiden har mulighed for at kopiere modspillerens træk og dermed sikre sig at hun først står i en situation hvor hun ikke kan trække.

Opgave 2.1. Georg og hans mor spiller et spil hvor der til at starte med er n bunker med lige mange mønter i hver. De har tur på skift, og i hver tur må de fjerne en eller flere mønter fra samme bunke. Den spiller der tager den sidste mønt, har vundet. Georg starter altid. Bestem de værdier af n for hvilke Georg har en vindende strategi.

Opgave 2.2. Alma og Bertha spiller følgende spil på et $n \times 1001$ skakbræt, hvor $n \geq 1001$. På skift farver de for et positivt heltal k alle de k^2 felter i et $k \times k$ kvadrat. Tallet k må gerne variere fra træk til træk, men det er ikke tilladt at kvadratet indeholder felter som allerede er farvede. Den spiller der først ikke kan trække, har tabt. Bestem samtlige værdier af n for hvilke Alma har en vindende strategi når hun starter.

Opgave 2.3. På et uendeligt skakbræt skiftes to spillere til at markere et tomt felt. Den ene spiller markerer med kryds og den anden med bolle. Den der først har udfyldt fire felter som danner et 2×2 kvadrat med sit symbol, har vundet. Har en af de to spillere en vindende strategi? (Baltic Way 1996)

(Bemærk at dette spil afviger fra de andre vi har set på, da det kan fortsætte i det uendelige.)

Opgave 2.4. Tallet 10^{2007} er skrevet på en tavle. Anne og Berit spiller et spil hvor de efter tur foretager en af to operationer:

(i) erstatter et tal x på tavlen med to hele tal a og b større end 1 så $x = ab$;

(ii) sletter det ene eller begge af to ens tal på tavlen.

Spilleren som ikke er i stand til at foretage sit træk, har tabt spillet. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi hvis Anne starter? (NMC 2007)

3 Udnyt modpartens træk

I kapitlet før kopierede vi blot modpartens træk for at vinde. Nu skal vi se på eksempler hvor vi baserer vores træk på modpartens træk uden at det er en kopi af modpartens træk.

Eksempel

Alma og Bertha spiller følgende spil. På et bord ligger 100 runde, 200 trekantede og 200 firkantede brikker. I hvert træk skal en spiller fjerne to brikker, men det må ikke være en trekant og en firkant. Alma starter, og man taber hvis man ikke kan trække, eller der ikke er flere brikker tilbage når man skal trække. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer hende sejren? (Georg Mohr-Konkurrencen 2016)

Vi viser nu at Bertha kan sikre sig sejren ved at basere sit træk på Almas træk: Berthas vindende strategi er at sørge for at der hver gang hun har trukket, er et lige antal af hver af de tre slags brikker.

Først viser vi at det er muligt for Bertha at følge denne strategi. Til at starte med er der et lige antal af hver af de tre slags brikker. Hvis Alma tager to forskellige slags brikker, så tager Bertha de samme slags brikker som Alma. Dette er muligt da der var et lige antal af hver inden Alma trak, og Alma kun har trukket en af hver. Hvis Alma tager to ens brikker, tager Bertha også to ens brikker (men ikke nødvendigvis samme slags som Alma). Dette er muligt så længe der er brikker tilbage, da der efter at Alma har trukket to ens, stadig må være et lige antal af hver slags. På denne måde sikrer Bertha at der er et lige antal af hver af de tre slags brikker når hun har trukket, og hvis hun fortsætter med at følge denne strategi, vil det gælde efter hvert eneste af hendes træk. Bertha kan altså følge denne strategi så længe der er brikker tilbage når hun skal trække.

Nu viser vi at strategien fører til sejr. Bemærk at antallet af brikker til at begynde med er et multiplum af 4. Når Bertha skal trække, vil der derfor altid være mindst to brikker tilbage, og derfor kan Bertha altid trække. Altså taber Alma når Bertha følger denne strategi.

Opgave 3.1. I en skål er der til at starte med 2012 mønter. Spiller A og B spiller følgende spil. I hvert træk har de følgende to valgmuligheder:

a) lægge 1 mønt i skålen;

b) fjerne 4 mønter fra skålen (hvis der er mindst 4 mønter i den).

Den spiller der tager den sidste mønt fra skålen, vinder alle de 2012 mønter der var til at starte med. Det er spiller A der starter, og det antages at begge spillere har et utømmeligt lager af mønter. Vis at en af de to spillere har en vindende strategi, og bestem hvilken spiller.

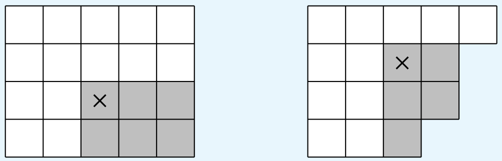
Opgave 3.2. Der er en bunke med 1000 tændstikker. To spillere skiftes til at trække og kan i hvert træk fjerne mellem 1 og 5 tændstikker. Det er også tilladt højst 10 gange i hele spillet at fjerne 6 tændstikker. Hvis fx den første spiller har benyttet dette træk 7 gange, og den anden 3, kan trækket ikke benyttes mere. Den spiller som tager den sidste tændstik, vinder. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? (BW 2010)

4 Strategityveri

I de foregående eksempler og opgaver har vi eksplicit bestemt tabermængden og vindermængden eller fundet en konkret strategi vinderen kunne følge, men det er ikke altid så let. I mange spil kan man alligevel vise at den ene spiller har en vindende strategi, endda uden at man kan vide hvad et eneste træk i denne strategi er!

Eksempel

I et spil er der en chokoladebar som er inddelt i $n \times m$ små chokoladekvadrater, $n, m > 1$. Der er to spillere A og B som skiftes til at trække. I hvert træk skal en spiller vælge et chokoladekvadrat som ikke allerede er spist, og spilleren spiser derefter chokoladekvadratet samt alle chokoladekvadrater der hverken er over eller til venstre for det valgte kvadrat. Hvis man fx vælger det markerede chokoladekvadrat på de to figurer, så spiser man de grå chokoladekvadrater.



Det øverste venstre kvadrat er forgiftet, og den der spiser dette kvadrat, dør. Spiller A starter.

Vi vil nu vise at spiller A har en vindende strategi for alle mulige værdier af n og m, uden at vi har nogen anelse om hvad strategien er! Vi viser det indirekte ved at antage at spiller B har en vindende strategi.

I første træk vælger A det nederste højre kvadrat. Da spiller B har en vindende strategi, kan B trække så B vinder uafhængigt af hvordan A spiller. Den situation der opstår efter at B har trukket, kalder vi S. Nu ser vi på et nyt spil hvor A vælger samme kvadrat som B før valgte, og da A på denne måde spiser de samme kvadrater som B plus det nederste højre kvadrat, så opstår situationen S. Men nu kan A vinde da A så at sige kan stjæle den vindende strategi B havde i første scenarie. Dette er i modstrid med at B har en vindende strategi, og derfor er vores antagelse forkert. Da spillet slutter efter et endeligt antal træk og ikke kan ende uafgjort, må A have en vindende strategi.

Det kan ikke anbefales at spille spillet, selvom man er spiller A, uden først at have fundet selve strategien! Og det kan man faktisk godt.

I dette eksempel så vi hvordan man kan vise noget ved at benytte et argument der handler om at man kan stjæle modstanderens strategi. På engelsk kaldes dette *strategy stealing*

Opgave 4.1. En tændstiksæske indeholder 300 tændstikker. To spillere A og B skiftes til at trække, og i hvert træk skal de fjerne et antal tændstikker fra æsken - mindst én og højst halvdelen. Den som først ikke kan trække, har tabt. Spiller A starter. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? (Løs opgaven ved at benytte strategityveri. Man kan også sagtens finde vindermængde og tabermængde. Det er faktisk ikke særlig svært.)

Opgave 4.2. På en tavle står tallene $1, 2, 3, \dots, n$. To spillere A og B spiller følgende spil. De skiftes til at trække, og i hvert træk skal de fjerne et tal m samt alle dets divisorer. Den som fjerner det sidste tal, har vundet. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi når A starter?

Eksempel

I et spil ligger der til at starte med to bunker sten på bordet. Hvert træk består i at fjerne et antal sten fra den ene bunke eller fjerne samme antal sten fra begge bunker. Den spiller der fjerner den sidste sten, har vundet. En udgangsposition med a sten i den ene bunke og b i den anden betegner vi med (a, b).

Vi ønsker at vise at der findes uendeligt mange udgangspositioner så spiller B har en vindende strategi, men altså ikke bestemme dem. Dette svarer til at vise at tabermængden er uendelig.

Man kan godt pusle sig frem til de første elementer i tabermængden og finde en algoritme for hvordan det næste element fremkommer, og derved vise at den er uendelig, men i dette eksempel skal vi se på et andet trick hvor man overhovedet ikke behøver at bestemme et eneste element i tabermængden.

Vi viser det i stedet indirekte ved at antage at tabermængden er endelig; lidt ligesom før hvor vi stjal modpartens strategi. Da tabermængden er endelig, findes et største element i tabermængden (n, m), $n \geq m$, så ingen andre elementer i tabermængden indeholder en bunke med flere end n sten. Dermed må udgangspositionen $(n+1, 2n+2)$ ligge i vindermængden. Lige meget hvordan man trækker i denne situation, opnår man en situation hvor mindst en af bunkerne indeholder flere end n sten. Ifølge antagelsen findes der fra denne position en vindende strategi da denne position ikke ligger i tabermængden, men det er i modstrid med at $(n+1, 2n+2)$ ligger i vindermængden. Antagelsen er derfor forkert, og tabermængden må være uendelig.

Læg mærke til at vi igen overhovedet ikke har peget på hvilke spilpositioner der ligger i de to mængder. Vi kan faktisk ud fra denne analyse ikke pege på et eneste element i tabermængden selv om vi har vist at den er uendelig.

Opgave 4.3. To personer spiller følgende spil. Der ligger til at starte med n sten på bordet, og hver spiller skiftes til at tage m^2 sten fra bordet, hvor m er et positivt heltal der gerne må variere fra træk til træk. Den spiller der tager den sidste sten, har vundet. Vis at der findes uendeligt mange værdier af n for hvilke spiller nummer to har en vindende strategi. (Baltic Way 1995)

5 Løsningsskitser

Opgave 1.1 Først bemærker vi at spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, at A og B skiftes til at trække, og at der gælder samme regler for hvordan A og B må trække. Påstand: Tabermængden består af alle positive multipla af 3, og vindermængden af alle positive heltal som ikke er et multipla af 3. Argument: Hvis A trækker fra en situation fra V, dvs. antallet af sten ikke er et multiplum af 3, da kan A ved at fjerne 1 eller 2 sten efterlade et multipla af 3 sten til modstanderen. Hvis A derimod trækker fra en situation fra T, dvs. når der ligger et multipla af 3 sten på bordet, da vil A aldrig efterlade et multipla af 3 sten, da $3 \nmid 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Spiller A efterlader derfor altid en situation fra vindermængden.

Opgave 1.2 Først bemærker vi at spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, at A og B skiftes til at trække, og at der gælder samme regler for hvordan A og B må trække. Påstand: Tabermængden er samtlige positive multipla af 6. Det indser vi på følgende måde: Det mindste tal i tabermængden må være $n = 6$ da det er det mindste tal som ikke er en primtalspotens. Ved at overveje tallene $7, 8, 9, 10, 11, 12$ får man hurtigt en idé om at tabermængden er alle multipla af 6. Da ingen primtalspotenser er delelige med 6, vil man fra en udgangsposition med et multiplum af 6 sten på bordet altid efter endt træk ende med et antal sten som ikke er et multiplum af 6. Desuden kan man fra enhver udgangsposition der ikke er delelig med 6, efter endt træk ende med et multiplum af 6 sten på bordet da man kan fjerne 1, 2, 3, 4 eller 5 sten. Dermed består tabermængden af samtlige multipla af 6.

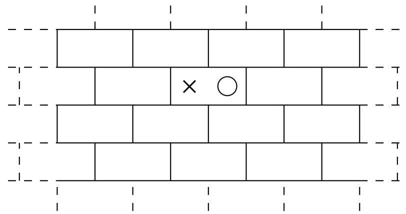
Opgave 1.3 Først bemærker vi at spillet slutter efter et endeligt antal træk. For $n = 1, 2, 3$ kan Albert ikke klippe til at starte med, og han har derfor tabt. For $n = 4, 5, 6, 7$ kan Albert klippe snoren i tre stykker så det længste stykke er 2 eller 3 langt, og dermed vinder han. For $n = 8, 9$ kan Albert kun klippe så det længste stykke er 4, 5, 6 eller 7 langt, og han overlader dermed en vindende situation til Benny. Ved at fortsætte på samme måde kan man se at tabermængden består af alle positive hele tal på formen 3^k og $3^k - 1$, hvor k er et ikke-negativt heltal, og vindermængden består af de resterende positive heltal. Dette beviser vi ved at vise at for hvert element i vindermængden er det muligt at klippe så længden af den længste snor er et element i tabermængden, mens man for ethvert element i tabermængden ender med at længden af den længste snor er et element i vindermængden uanset hvordan man klipper, hvis det altså er muligt at klippe. Lad n være et element i tabermængden. Hvis $n = 3^k$ eller $n = 3^k - 1$ vil den længste snor når man har klippet, have længde mindst $3^{k-1} + 1$ og længde højst $3^k - 2$, dvs. uanset hvordan man klipper, efterlader man en situation fra vindermængden. Hvis n derimod ligger i vindermængden, og $n = 3^k + m$, $0 < m < 2 \cdot 3^k - 1$, kan man klippe så længden af den længste snor er 3^k, hvis $m > 1$, og $3^k - 1$, hvis $m = 1$, og dermed efterlade en snor hvis længde er et element i tabermængden. Vi har nu bevist at Albert netop har en vindende strategi for alle værdier af n som ikke er på formen 3^k eller $3^k - 1$.

Opgave 1.4 Først bemærker vi at spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, at A og B skiftes til at trække, og at der gælder samme regler for hvordan A og B må trække. Påstand: Tabermængden består af alle spilpositioner med henholdsvis a, a, a og b, hvor $b \geq a$, tændstikker i de fire bunker. Vindermængden består af alle de resterende positioner. Argument: Fra et udgangspunkt i V kan man nemlig i et træk komme til en spilposition fra T. Vælg nemlig to bunker som ikke indeholder færrest tændstikker, og fjern tændstikker fra disse så de har samme antal tændstikker som den bunke med færrest. Læg mærke til at der findes to bunker som ikke indeholder samme antal som den med færrest tændstikker, da vi ikke er i en situation fra T. Fra et udgangspunkt i T, dvs. fra en position med a, a, a og b, $b \geq a$, tændstikker i de fire bunker, kan man efter endt træk aldrig ende i en tilsvarende (overvej), man ender derfor altid med en position fra V, eller også kan man slet ikke trække. Dermed har den spiller som starter, en vindende strategi.

Opgave 2.1 Georg har en vindende strategi for ulige n. I første træk skal Georg fjerne en hel bunke. Derefter er der et lige antal bunker med lige mange mønter i hver. Hver gang Georgs mor fjerner x mønter fra en bunke med y mønter, skal Georg gøre det samme. På den måde vil der efter Georgs tur altid være et lige antal bunker der kan sættes sammen i par så to bunker der danner par, indeholder lige mange mønter. Derfor kan Georg altid udføre det beskrevne træk, og Georgs mor kan aldrig vinde. Da der er endeligt mange mønter, vil spillet slutte efter et endeligt antal træk, og derfor vil Georg til sidst vinde. Hvis n er lige, kan Georgs mor vinde ved at følge samme strategi.

Opgave 2.2 Alma har en vindende strategi for samtlige værdier af n. Hvis n er ulige, farvelægger Alma et 1001×1001 kvadrat i midten af brættet i første træk. Nu har hun delt brættet i to symmetriske halvdele, og hun kan nu hver gang kopiere Berthas træk symmetrisk på den modsatte side. Hvis n er lige, starter hun blot med at farvelægge et 1000×1000 kvadrat i midten med en række af små kvadrater forneden. Brættet er endnu engang delt i to symmetriske halvdele hvor man ikke kan tegne et kvadrat der lapper ind over begge, og hun kan nu igen følge samme strategi som før.

Opgave 2.3 Ingen af de to spillere har en vindende strategi. Inddel brættet i vandrette 2×1 brikker så brikkerne i hver række ligger forskudt i forhold til hinanden.



Spiller B kan forhindre spiller A i at vinde ved hele tiden at markere det andet felt i den brik som spiller A netop har markeret i. Dette skyldes at alle 2×2 kvadrater indeholder en hel brik.

På helt tilsvarende måde kan spiller A forhindre spiller B i at vinde: Hvis spiller B sætter kryds i samme brik som A har markeret i, markerer A efterfølgende et vilkårligt felt. Hvis spiller B sætter et kryds i en brik A ikke har markeret i, så sætter A kryds i det andet felt i denne brik. På denne måde sikrer A sig at B aldrig får udfyldt begge felter i en brik.

Ingen af de to spillere har derfor en vindende strategi. Dermed kan spillet fortsætte i det uendelige uden at nogen af de to spillere kan vinde.

Opgave 2.4 Anne har en vindende strategi. I første træk vælger Anne at erstatte 10^{2007} med 2^{2007} og 5^{2007}. På den måde opnår hun to tal med helt de samme egenskaber når vi ser på divisorer, da de begge er på formen p^{2007}, hvor p er et primtal. Herefter kan hun kopiere Berits træk på følgende måde: Lad p og q være primtallene 2 og 5 i en eller ande rækkefølge. Efter første træk efterlader Anne en situation hvor der står præcis de samme potenser af p og q på tavlen.

Hvis Berit vælger et tal p^k, må hun erstatte det med primtalspotenserne p^m og p^{k-m}, for et heltal m som opfylder at $1 \le m < k$. Nu vælger Anne tilsvarende q^k og erstatter det med q^m og q^{k-m}. Hvis Berit vælger at slette et eller begge af to ens tal p^n, væger Anne at slette det ene eller begge af tallene q^n. På denne måde efterlader hun altid en situation til Berit hvor der står præcis de samme potenser af p og q på tavlen. Hun kan derefter altid kopiere Berits træk som beskrevet. Da spillet stopper efter et endeligt antal træk, må Anne vinde hvis hun følger denne strategi.

Opgave 3.1 Spiller A har en vindende strategi. Først bemærker vi at spillet ikke nødvendigvis ender efter et endeligt antal træk, dvs. når vi skal bevise at A har en vindende strategi, skal vi altså også vise at spillet faktisk ender hvis A følger denne strategi.

Først lægger A en mønt i skålen og efterlader 2013 mønter til B. Det interessante i denne sammenhæng er at 2013 er et multiplum af 3. Herefter følger A følgende strategi: Hvis B lægger en mønt i skålen, så tager A fire, og hvis B tager fire mønter, så lægger A en mønt i skålen. Med denne strategi efterlader A i hver runde 3 mønter færre i skålen end hun gjorde i forrige runde. Dermed efterlader hun altid et antal mønter der er et multiplum af 3.

Vi mangler at vise at det er muligt altid at følge denne strategi, og at den fører til sejr. Det er muligt at følge denne strategi, for hvis A skal tage fire mønter, betyder det at B netop har lagt en mønt i en skål der ikke var tom, dvs. skålen indeholder mindst $3+1=4$ mønter når A skal trække. Desuden efterlader B altid et antal mønter der ikke er et multiplum af 3, dvs. B tager aldrig den sidste mønt. Da der efter hvert af A's træk bliver færre mønter i skålen, ender spillet med en vinder, og denne vinder må derfor være A.

Opgave 3.2 Vi kalder de to spillere for A og B hvor A starter. Spiller B kan vinde ved at følge denne strategi: Lad r være antal træk hvor man må fjerne 6 tændstikker. Til at starte med er $r = 10$, men dette antal falder i løbet af spillet for hver gang en spiller tager 6 tændstikker. Bemærk først at $1000 = 6\cdot 155+7\cdot 10$. Så længde der er flere end $7\cdot r$ tændstikker når A skal trække, så gør B følgende: Hvis A trækker x, $x \in \{1,2,3,4,5\}$, tændstikker, så trækker B $6-x$ tændstikker. Hvis A trækker 6 tændstikker, så trækker B 1 tændstik. På den måde efterlader B altid $6\cdot n+7\cdot r$ tændstikker til A, hvor n og r er ikke negative heltal.

Hvis $r = 0$ før der opstår en situation med $7\cdot r$ tændstikker på bordet, så efterlader B herefter altid et antal tændstikker der er et multiplum af 6 til A, og det betyder at A ikke kan vinde. Dermed vinder B.

Hvis der inden $r = 0$ opstår en situation hvor der er $7\cdot r$ tændstikker på bordet når A skal trække, så følger B herefter følgende strategi: Hvis A trækker x, $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ tændstikker, så trækker B $7-x$. Efter r runder vinder B. (Bemærk at denne strategi ikke kræver flere end højst r exceptionelle træk.)

Opgave 4.1 Vi viser indirekte at spiller A har en vindende strategi. Antag at B har en vindende strategi. Først fjerner A en tændstik og efterlader altså 299 tændstikker til B. Spiller B har pr. antagelse en vindende strategi og fjerner nu x tændstikker som led i strategien. Pga. af reglerne må $x \in \{1,2,3,\ldots,149\}$. Når A skal trække i en situation med $299-x$, ved vi at A ikke kan vinde hvis B spiller optimalt. I stedet for at tage én tændstik til at starte med, kan A fjerne $x+1$ tændstikker, da $1 \le 1+x \le \frac{300}{2}$. Nu efterlader A en situation med $299-x$ tændstikker til B, og fra analysen af vores første scenarie ved vi at B ikke kan vinde hvis A spiller optimalt. Men dette er i modstrid med vores oprindelige antagelse. Da spillet slutter efter et endeligt antal træk, og spillet ikke kan ende uafgjort, må A have en vindende strategi.

Opgave 4.2 Spiller A har en vindende strategi, og dette viser vi indirekte. Antag at spiller B har en vindende strategi. Først fjerner spiller A tallet 1, og derefter fjerner spiller B tallet m og dets divisorer. Da spiller B følger sin vindende strategi, efterlader hun en tabende situation til A, og denne situation betegnes S. Men hvis spiller A starter med at fjerne m og alle dets divisorer, da efterlader A situationen S til B og har dermed en vindende strategi hvilket er en modstrid. Dermed kan spiller B ikke have en vindende strategi, og da spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, må A have en vindende strategi.

Opgave 4.3 Vi skal med andre ord vise at tabermængden er uendelig, og dette viser vi indirekte ved at antage at tabermængden er endelig. Lad a være det største tal i tabermængden. Betragt nu udgangspositionen med a^2+a+1 sten. Da $(a+1)^2 > a^2+a+1$, kan første spiller efter et træk ikke ende i tabermængden da der er flere end a sten tilbage ligegyldigt hvordan hun trækker. Dette er en modstrid, og tabermængden er altså uendelig.