Skuffeprincippet

Skuffeprincippet benytter de fleste helt intuitivt, og det hører egentlig ikke hjemme under noget bestemt emne, men benyttes i mange forskellige opgavetyper. Skuffeprincippet går ud på at hvis man har $n+1$ bolde som man placerer i n skuffer, så findes der mindst en skuffe med mindst to bolde. Tilsvarende gælder at hvis man har $kn+1$ bolde som man placerer i n skuffer, så findes mindst en skuffe med $k+1$ bolde.

Eksempel 1. Skuffeprincippet kan bruges i mange forskellige sammenhænge. Et klassisk eksempel er at hvis 1100 mennesker er forsamlet, så vil mindst fire ifølge skuffeprincippet have fødselsdag samme dag. Der er 366 mulige dage man kan have fødselsdag. Hvis der er mindst $3 \cdot 366 + 1 = 1099$ mennesker forsamlet, vil der ifølge skuffeprincippet være mindst fire personer der har fødselsdag samme dag.

Eksempel 2. Skuffeprincippet kan også bruge hvis man har et endeligt antal skuffer og et uendeligt antal bolde. Betragt følgen $1,3,6,0,9,5,4,\ldots$ hvor det næste tal i følgen, fra og med det fjerde, er sidste ciffer i summen af de tre foregående. Da der kun findes endeligt mange kombinationer af tre cifre, og følgen fortsætter i det uendelige, må der ifølge skuffeprincippet på et eller andet tidspunkt komme tre tal som tidligere har stået i samme rækkefølge, og derfor må følgen være periodisk fra et vist trin.

Eksempel 3. Det er ikke altid helt oplagt hvad man skal vælge som skuffer og bolde. Hvis vi ser på en vilkårlig delmængde af mængden $M = \{1,2,3,\ldots,100\}$ med 15 elementer, så vil vi gerne vise at der findes to talpar fra delmængden med samme differens. I dette tilfælde må de mulige differenser være skufferne og de mulige talpar være boldene da vi ønsker at vise at der findes mindst to talpar med samme differens. Hvis skuffeprincippet skal virke, skal vi altså vise at der er flere talpar end differenser. I en delmængde af M med 15 elementer er der i alt $\binom{15}{2} = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$ forskellige talpar hvis differens er et helt tal mellem 1 og 99, dvs. der er 99 mulige differenser. Dermed siger skuffeprincippet at der findes mindst to talpar med samme differens.

Her er nogle eksempler på meget forskellige opgavetyper hvor man kan anvende skuffeprincippet, men det er absolut ikke altid oplagt hvordan man skal konstruere sine skuffer og bolde.

Opgave 1. Ti venner sender hinanden julekort så hver sender fem julekort til fem forskellige venner. Vis at der findes et par af venner som har sendt hinanden et julekort.

Opgave 2. Vis at hvis et 2×2 kvadrat indeholder 10 punkter, da vil der findes to punkter med afstand mindre end en.

Opgave 3. Der er n personer i en facebookgruppe. Vis at der findes mindst to af de n personer som har samme antal facebookvenner i gruppen.

Opgave 4. Om et kæmpe rundt bord der kan drejes, sidder der 100 personer. Alle har bestilt forskellig forret. Da de trætte tjenere har placeret en forret foran hver person, er der ingen der har den rigtige forret på deres plads. Vis at bordet kan drejes så mindst to personer har den rigtige forret på deres plads.

Opgave 5. På Gammelkøbing skole går der 20 elever, og to vilkårlige elever har en fælles bedstefar. Vis at der findes en mand som er bedstefar til mindst 14 elever på skolen.

Opgave 6. Lad A være en vilkårlig mængde af 23 positive hele tal mellem 1 og 1000. Vis at der findes to disjunkte delmængder af A hvis elementer har samme sum. (*Disjunkte* betyder at delmængderne ikke har nogen fælles elementer).

Opgave 7. Vis at blandt tallene $a, 2a, \ldots, (n-1)a$, hvor $a \in \mathbb{R}$, er der mindst et af tallene der har en afstand på højst $\frac{1}{n}$ til et helt tal.

Opgave 8. Under en matematikforelæsning sover fem matematikere præcis to gange hver. De var alle vågne da forelæsningen startede, og for hvert par af matematikere var der et tidspunkt hvor de begge sov. Vis at der på et tidspunkt var mindst tre matematikere der sov samtidig.

Opgave 9. Vis at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet) som indeholder mindst 3 af de 15 punkter. (Georg Mohr 91)

Opgave 10. I et kvadrat med sidelængde 1 er der 101 røde punkter hvoraf ikke tre ligger på linje. Vis at der findes en trekant med tre røde hjørner hvis areal ikke er større end $\frac{1}{100}$.

Løsningsskitser

Opgave 1 Der er $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 45$ par af venner, og da der sendes 50 julekort, må der være mindst et par af venner der har udvekslet to julekort ifølge skuffeprincippet. Da ingen sender to julekort til samme ven, må de to have sendt julekort til hinanden.

Opgave 2 Kvadratet deles op i 9 kvadrater med sidelængde $\frac{2}{3}$ og diagonallængde $\frac{\sqrt{8}}{3} < 1$. Ifølge skuffeprincippet må der være to punkter som ligger i samme kvadrat, og afstanden mellem disse to punkter er mindre end en.

Opgave 3 Man kan have mellem 0 og $n-1$ facebookvenner i gruppen. Hvis en person har 0 venner, findes ingen som har alle andre i gruppen som ven, dvs. der findes ingen med $n-1$ facebookvenner i gruppen. Derfor er der højst $n-1$ forskellige muligheder for hvor mange facebookvenner hver enkelt har i gruppen. Da der er n personer i gruppen, må mindst to af dem have samme antal facebookvenner.

Opgave 4 Der er 100 forskellige placeringer af bordet når vi drejer det, hvor der er en forret på hver plads. Lad hver placering repræsentere en skuffe så vi har 100 skuffer. Hver forret står rigtigt i netop en placering, dvs. der er 100 forretter som vi hver lægger i den skuffe der repræsenterer den placering hvor forretten er på den rigtige plads. Da der i udgangsplaceringen ikke er en eneste forret der står rigtigt, er mindst en af skufferne tom. Altså findes der en skuffe med to forretter, dvs. mindst en placering hvor mindst to forretter er placeret rigtigt.

Opgave 5 Betragt en elev som har bedstefædrene A og B. Hvis alle andre har A som bedstefar, er det ønskede vist. Det samme gælder for B. Antag derfor at hverken A eller B er bedstefar til alle 20 børn på skolen. Da findes et barn som ikke har A som bedstefar, og dermed må han have B som bedstefar og endnu en bedstefar som vi kalder for C. Desuden findes et barn som ikke har B som bedstefar, men da barnet har en fælles bedstefar med alle andre børn, må barnet have bedstefædrene A og C.

På denne måde ses at samtlige børn har to bedstefædre blandt bedstefædrene A, B og C. Da 20 elever har 40 bedstefædre, må enten A, B eller C ifølge skuffeprincippet være bedstefar til mindst 14 elever på skolen.

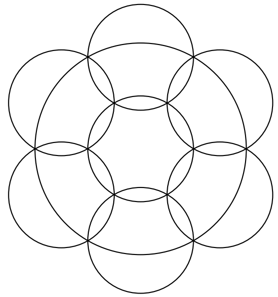
Opgave 6 Den størst mulige sum af elementerne i en delmængde af A er summen af elementerne i A, og denne sum er maksimalt $978 + 979 + 980 + \cdots + 1000 < 23000$. Nu laver vi 23000 skuffer nummereret $1, 2, \ldots, 23000$, og hver ikke-tom delmængde af A puttes ned i den skuffe hvis nummer er summen af elementerne i delmængden. Der er $2^{23} - 1$ forskellige ikke−tomme delmængder af A, og da dette tal er langt større end 23000, findes mindst en skuffe med to delmængder som vi kalder B og C. Da mængderne er forskellige, og elementerne i dem har samme sum, er $B_1 = B \setminus C$ og $C_1 = C \setminus B$ to disjunkte ikke−tomme delmængder af A, og summen af elementerne i B_1 er lig summen af elementerne i C_1. (Mængdesymbolet $X \setminus Y$ betyder mængden af alle de elementer i X som ikke ligger i Y).

Opgave 7 For et reelt tal x betegner $\{x\}$ brøkdelen af x, dvs. x minus det mindste hele tal som ikke er større end x. Fx er $\{2{,}34\} = 0{,}34$ og $\{-2{,}91\} = 0{,}09$. Vi inddeler nu tallinjen fra 0 til 1 i n intervaller af længde $\frac{1}{n}$.

Lad nu M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, være den delmængde af $\{a, 2a, \ldots, (n-1)a\}$ som indeholder netop de elementer hvis brøkdel ligger i det i'te interval på vores tallinje, dvs. i $[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}]$. Hvis M_1 eller M_n ikke er tom, har vi et tal med den ønskede egenskab. Antag at M_1 og M_n er tomme. Da må en af mængderne $M_2, \ldots, M_{n-1}$ indeholde to elementer, lad os sige ba og ca, hvor $b < c$. Da afstanden mellem $\{ba\}$ og $\{ca\}$ er mindre end $\frac{1}{n}$, må $(c-b)a$ tilhøre enten M_1 eller M_n, hvilket er en modstrid.

Opgave 8 Der er $\binom{5}{2} = 10$ par af matematikere som har sovet samtidig, og disse par opstår netop når en matematiker falder i søvn. Dette sker 10 gange, men den første gang opstår der ingen par der har sovet samtidig. Derfor må der ifølge skuffeprincippet på mindst et af de ni tidspunkter hvor en matematiker faldt i søvn (fraregnet første gang) opstå mindst to nye par, dvs. på dette tidspunkt må mindst tre matematikere have sovet samtidig.

Opgave 9 Cirklen med radius 2 kan dækkes af 7 cirkler med radius 1 som vist på figuren. (Overvej hvordan de skal konstrueres.)



Ifølge skuffeprincippet findes derfor en cirkel med radius 1 som indeholder mindst 3 punkter.

Opgave 10 Inddel kvadratet i 50 rektangler med sidelængder 1 og $\frac{1}{50}$. Ifølge skuffeprincippet findes et rektangel med mindst tre røde punkter. Disse tre røde punkter udgør en trekant hvis areal højst er halvdelen af rektanglets areal, dvs. højst $\frac{1}{100}$.