Indhold

Polynomier

Disse noter giver en introduktion til polynomier, centrale sætninger om polynomiumsdivision, rødder og koefficienter samt løsningsstrategier. Desuden er der afsnit om polynomier med heltallige koefficienter og deres særlige egenskaber mht. delelighed og irreducibilitet. Der er løsninger til samtlige opgaver bagerst i noterne.

I noterne betegner $\mathbb{Z}$ sædvanligvis mængden af hele tal, $\mathbb{Q}$ mængden af rationale tal, $\mathbb{R}$ mængden af reelle tal og $\mathbb{C}$ mængden af komplekse tal. Desuden betegner $\mathbb{L}$ en af disse fire talmængder. De komplekse tal kan beskrives som mængden af alle tal på formen $a+ib$, hvor $i=\sqrt{-1}$ og a og b er reelle tal. Alle opgaver kan regnes uden brug af komplekse tal.

1 Polynomier

Først skal vi have defineret hvad et polynomium er, og indført nogle centrale begreber.

Polynomium
Et polynomium P er en funktion defineret på de reelle tal med forskriften

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

hvor $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{L}$ og $a_n \neq 0$. Det kaldes yderligere et n'te grads polynomium med koefficienter i $\mathbb{L}$.

Mængden af polynomier med koefficienter i $\mathbb{L}$ betegnes $\mathbb{L}[x]$. (Husk at $\mathbb{L}$ er enten $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.)

Normeret polynomium
Et polynomium kaldes normeret hvis koefficienten til højestegradsleddet er 1.

Rod
Tallet x_0 kaldes en rod i P hvis $P(x_0) = 0$.

Nulpolynomiet
Nulpolynomiet P er polynomiet der er konstant nul, dvs. $P(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og dets grad sættes per definition til $-\infty$.

En hel central egenskab ved polynomier er at opskrivningen af entydig. Det handler de næste to sætninger om.

Sætning 1.1. Nulpolynomiet er netop det polynomium hvor alle koefficienter er 0.

Bevis Antag at der findes et polynomium $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, hvor $a_n \neq 0$, så $P(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. For $n = 0$ er $0 = P(x) = a_0 \neq 0$, hvilket er umuligt.

Antag derfor at $n > 0$. Idéen i beviset er at vælge et A der er så stort at $P(2A)$ ikke er 0. Sæt

$$A = \max\left\{ \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Bemærk at med dette valg af A er $A \geq 1$ og $|a_i A^i| \leq |a_n A^n|$ for alle $i = 0, \ldots, n-1$. Nu fås

$$\begin{aligned}
|P(2A)| &= |a_n(2A)^n + a_{n-1}(2A)^{n-1} + a_{n-2}(2A)^{n-2} + \cdots + a_0| \\
&\geq |a_n(2A)^n| - |a_{n-1}(2A)^{n-1} + a_{n-2}(2A)^{n-2} + \cdots + a_0| \\
&= |a_n A^n 2^n| - |a_{n-1} A^{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} A^{n-2} 2^{n-2} + \cdots + a_0| \\
&\geq |a_n A^n 2^n| - |a_n A^n (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1)| \\
&= |a_n A^n| > 0.
\end{aligned}$$

Altså er $P(2A) \neq 0$ hvilket er en modstrid. □

Entydighedssætningen 1.2. Hvis to polynomier P og Q er identiske, dvs. at $P(x) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, da er deres koefficienter identiske. Opskrivningen af polynomier er altså entydig.

Bevis Antag at $P(x) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Hvis koefficienterne i P og Q ikke er identiske, da er

$$0 = G(x) = P(x) - Q(x) = a_n x^n + \ldots + a_0,$$

hvor $n \geq 0$ og $a_n \neq 0$, for alle $x \in \mathbb{R}$. Men dette er i modstrid med sætning 1.1. Altså er opskrivningen af polynomier entydig.

Lige og ulige polynomier

Et polynomium kaldes for *lige* hvis $P(x) = P(-x)$ for alle reelle tal x.

Et polynomium kaldes for *ulige* hvis $P(x) = -P(-x)$ for alle reelle tal x.

Opgave 1.1. Vis at de lige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af ulige potenser af x er nul. Vis tilsvarende at de ulige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af lige potenser af x er nul.

Eksempel

Det reelle tal a er rod i $P(x) = x^3 - x - 1$. Vi ønsker at bestemme et tredjegradspolynomium med heltallige koefficienter som har a^2 som rod.

Da a er rod i P, ved vi at $a^3 - a - 1 = 0$ og $a^3 - a = 1$. Det udnytter vi til at konstruere et tredjegradspolynomium med a^2 som rod:

$$\begin{aligned}0 &= (a^3 - a - 1)^2 \\ &= a^6 + a^2 + 1 - 2a^4 - 2a^3 + 2a \\ &= (a^2)^3 - 2(a^2)^2 + a^2 + 1 - 2(a^3 - a) \\ &= (a^2)^3 - 2(a^2)^2 + a^2 - 1.\end{aligned}$$

Altså er a^2 er rod i

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Opgave 1.2. Et tredjegradspolynomium $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ har rødderne a, b og c. Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$. (Georg Mohr-Konkurrencen 1994)

Opgave 1.3. Bestem samtlige mulige værdier af $x + \frac{1}{x}$, hvor x tilfredsstiller ligningen

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

og løs denne ligning. (Georg Mohr-Konkurrencen 2000)

Polynomier betragtet som funktioner over de reelle tal er kontinuerte. Her vil vi ikke definere kontinuitet, men vi udnytter flere gange følgende kontinuitetsegenskab som vi ikke beviser.

Mellemværdisætningen 1.3. Lad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, og lad d være et reelt tal mellem $f(a)$ og $f(b)$. Da findes et tal $c \in]a; b[$ så $f(c) = d$.

Eksempel

Når man skal undersøge hvor mange reelle rødder et polynomium har, behøver man ikke nødvendigvis finde de reelle rødder. Man kan i stedet udnytte at et polynomium er en kontinuert funktion, og benytte Mellemværdisætningen.

Fx har fjerdegradspolynomiet

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

fire reelle rødder da $P(-2) = 19$, $P(-1) = -1$, $P(0) = 1$, $P(2) = -1$ og $P(3) = 19$, dvs. der er ifølge Mellemværdisætningen en reel rod i hvert af følgende intervaller $]-2; -1[$, $]-1; 0[$, $]0; 2[$ og $]2; 3[$.

At det ikke kan have flere reelle rødder end dets grad, følger af teorien i de næste kapitler.

Opgave 1.4. Vis at fjerdegradspolynomiet

$$P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

har fire reelle rødder.

Sætning 1.4. Et polynomium af ulige grad med reelle koefficienter har altid mindst en reel rod.

Opgave 1.5. Udnyt Mellemværdisætningen 1.3 til at vise Sætning 1.4.

2 Polynomiumsdivision

Eksempel på polynomiumsdivision

Man dividerer $P(x)=x^3-2x^2+2x-15$ med $Q(x)=x-3$ sådan:

$$
\begin{array}{rr|rrrr|l}
 & x-3 & x^3 & -2x^2 & +2x & -15 & x^2+x+5 \;\leftarrow \text{resultat} \\
(x-3)\cdot x^2 \rightarrow & & x^3 & -3x^2 & & & \\
\hline
 & & & x^2 & +2x & -15 & \\
(x-3)\cdot x \rightarrow & & & x^2 & -3x & & \\
\hline
 & & & & 5x & -15 & \\
(x-3)\cdot 5 \rightarrow & & & & 5x & -15 & \\
\hline
 & & & & & 0 & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Da resten er 0, betyder det at

$$P(x)=x^3-2x^2+2x-15=(x-3)(x^2+x+5).$$

Eksempel på polynomiumsdivision med rest

Man dividerer $P(x)=x^3+3x^2-2x+7$ med $Q(x)=x^2+1$ sådan:

$$
\begin{array}{rr|rrrr|l}
 & x^2+1 & x^3 & +3x^2 & -2x & +7 & x+3 \;\leftarrow \text{resultat} \\
(x^2+1)\cdot x \rightarrow & & x^3 & +0x^2 & +x & & \\
\hline
 & & & 3x^2 & -3x & +7 & \\
(x^2+1)\cdot 3 \rightarrow & & & 3x^2 & +0x & +3 & \\
\hline
 & & & & -3x & +4 & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Her er resten $-3x+4$, og dvs. at

$$P(x)=x^3+3x^2-2x+7=(x^2+1)(x+3)-3x+4$$

Hvis du ikke er fortrolig med polynomiumsdivision, så løs følgende opgave inden du går videre til teorien.

Opgave 2.1. Udfør følgende divisioner:

a) Divider $P(x)=x^4-2x^2+3x-2$ med $Q(x)=x-1$.

b) Divider $P(x)=3x^4+8x^3+12x^2+9x+4$ med $Q(x)=x^2+x+1$.

c) Divider $P(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ med $Q(x)=x-1$.

Sætning om polynomiumsdivision 2.1. Lad P og Q være polynomier i $\mathbb{L}[x]$ af grad henholdsvis n og m med $n,m\geq 0$. Hvis $\mathbb{L}=\mathbb{Z}$, antages yderligere at koefficienten til m'tegradsleddet i Q er ± 1.

Da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ og et entydigt bestemt polynomium R af grad mindre end m, begge med koefficienter i $\mathbb{L}$, så

$$P(x)=Q(x)D(x)+R(x).$$

Polynomiet R kaldes resten af P ved division med Q.

Bevis Lad $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ og $Q(x)=b_mx^m+\ldots+b_0$, hvor $a_n,b_m\neq 0$. Først viser vi eksistensen ved induktion efter n. For $n<m$ er eksistensen oplagt med $D(x)=0$ og $R(x)=P(x)$. Lad $n=N\geq m$, og antag at sætningen er sand for alle $n<N$. Da er

$$P_1(x)=P(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}Q(x)$$

et polynomium af grad mindre end n med koefficienter i $\mathbb{L}$, og dermed findes ifølge induktionsantagelsen polynomier D_1 og R så

$$P_1(x)=Q(x)D_1(x)+R(x)$$

hvor graden af R er mindre end m. Nu er

$$
\begin{aligned}
P(x)&=P_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}Q(x)=Q(x)D_1(x)+R(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}Q(x)\\
&=Q(x)(D_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m})+R(x),
\end{aligned}
$$

dvs. nu har vi vist eksistensen.

Bemærk at koefficienterne i D og R stadig er elementer i $\mathbb{L}$ da $\frac{a_n}{b_m} \in \mathbb{L}$ når $a_n, b_m \in \mathbb{L}$, og vi har forudsat at $b_m = \pm 1$ hvis $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$.

For at vise entydigheden antager vi at der findes polynomier D_1, D_2, R_1 og R_2 i $\mathbb{L}[x]$, hvor R_1 og R_2 har grad mindre end m, så

$$P(x) = Q(x)D_1(x) + R_1(x) = Q(x)D_2(x) + R_2(x).$$

Da er

$$Q(x)(D_1(x) - D_2(x)) + R_1(x) - R_2(x)$$

nulpolynomiet. Da Q har grad m, og $R_1 - R_2$ har grad mindre end m, giver Entydighedssætningen at $D_1 - D_2$ er nulpolynomiet og altså $D_1 = D_2$. Dermed er $R_1 - R_2$ også nulpolynomiet og $R_1 = R_2$, dvs. D og R er entydigt bestemt. □

Denne sætning svarer til sætningen om hele tal der siger at hvis n og m er hele tal, $m \neq 0$, da findes to entydigt bestemte hele tal d og r, $0 \leq r < m$, så at

$$n = dm + r.$$

Her er r resten ved division af n med m. At et polynomium går op i et andet polynomium, vil ligesom for hele tal sige at resten ved division er 0, hvilket følgende definition siger.

Delelighed
Et polynomium Q siges at gå op i P i $\mathbb{L}[x]$, $P, Q \in \mathbb{L}[x]$, hvis der findes et polynomium $D \in \mathbb{L}[x]$ så $P(x) = Q(x)D(x)$.

Reducibilitet
Et polynomium P kaldes reducibelt i $\mathbb{L}[x]$ hvis der findes to polynomier $S, T \in \mathbb{L}[x]$ af grad mindst en så $P(x) = S(x)T(x)$.

Irreducibilitet
Et polynomium P kaldes irreducibelt i $\mathbb{L}[x]$ hvis det ikke er reducibelt i $\mathbb{L}[x]$.

Eksempel
Vi undersøger for hvilke n det gælder at $x^2 + 1$ går op i

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1.$$

Da $P_3(x) = (x^2+1)(x+1)$, må $x^2 + 1$ gå op i

$$x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} = x^m \cdot P_3(x).$$

Dermed vil x^2+1 gå op i $P_{4t+s}(x)$ netop når x^2+1 går op i $P_s(x)$. Da x^2+1 ikke går op i $P_2(x), P_1(x)$ og $P_0(x)$, går $x^2 + 1$ op i $P_n(x)$ netop hvis n har rest 3 ved division med 4.

Eksempel med rester
Hvis vi skal finde resten af

$$P(x) = x^{2011} + 16x^{2007} + 1$$

ved division med $Q(x) = x^2 - 4$ uden at udføre selve divisionen, udnytter vi sætningen om division med rest, dvs. vi ved at der findes et polynomium D med heltallige koefficienter og hele tal a og b så

$$x^{2011} + 16x^{2007} + 1 = (x^2 - 4)D(x) + ax + b.$$

For $x = 2$ er

$$2a + b = 2^{2011} + 16 \cdot 2^{2007} + 1 = 2^{2012} + 1,$$

og for $x = -2$ er

$$-2a + b = (-2)^{2011} + 16(-2)^{2007} + 1 = -2^{2012} + 1.$$

Dermed er resten $ax + b = 2^{2011}x + 1$.

Opgave 2.2. Bestem resten ved division af $x^{100} - 2x^{51} + 1$ med $x^2 - 1$.

Opgave 2.3. Vis at $P(x) = x^2 + 2$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[x]$.

Opgave 2.4. Bestem a og b så $(x-1)^2$ går op i $ax^4 + bx^3 + 1$.

3 Algebraens fundamentalsætning og rødder

En helt central egenskab ved polynomier som vi kommer til at udnytte igen og igen, er følgende:

Sætning om rødder og faktorisering 3.1. Lad P være et n'te grads polynomium med koefficienter i $\mathbb{L}$.

Hvis $x_0 \in \mathbb{L}$ er rod i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-1$ med koefficienter i $\mathbb{L}$ så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Specielt gælder at hvis $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ med koefficienter i $\mathbb{L}$ så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)D(x).$$

Bevis. Antag at x_0 er rod i P og $x_0 \in \mathbb{L}$. Da findes ifølge Sætningen om polynomiumsdivision 2.1 entydigt bestemte polynomier D og R i $\mathbb{L}[x]$, hvor R har grad højst nul, så

$$P(x) = (x - x_0)D(x) + R(x).$$

Dermed er $R(x_0) = 0$, og da R har grad højst nul, må det være nulpolynomiet. Altså findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Bemærk at polynomiet $x - x_0$ er normeret, så Sætningen om polynomiumsdivision 2.1 holder også i tilfældet $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$.

Hvis vi antager at $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i P, fås ved at gentage argumentationen ovenfor at der findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_1)\cdots(x - x_m)D(x).$$

□

Korollar om antallet af rødder 3.2. Et n'te grads polynomium har højst n reelle rødder.

Korollar om entydighed 3.3. Hvis P og Q er to polynomier af grad højst n, og $P(x) = Q(x)$ for $n+1$ forskellige værdier af x, da er $P = Q$.

Bevis. Antag at P og Q er to polynomier af grad højst n, og $P(x) = Q(x)$ for $n+1$ forskellige værdier af x. Da er $P(x) - Q(x)$ et polynomium af grad højst n med $n+1$ rødder, og dermed er $P(x) - Q(x)$ nulpolynomiet. □

Eksempel

Polynomiet $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ har $x_0 = 1$ som rod. Dermed ved vi at $x - 1$ er divisor i polynomiet, og ved division ses at

$$P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - x + 2).$$

Eksempel

Hvis vi betragter polynomiet $P(x) = x^n - a^n$, er det nemt at se at $x_0 = a$ er rod. Dermed går $x - a$ op i P, og ved division ses at

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Opgave 3.1. Find en rod i polynomiet $P(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1}$, og udfør polynomiumsdivision som i eksemplet ovenfor.

Opgave 3.2. En af de to rødder i polynomiet $P(x) = mx^2 - 10x + 3$ er $\frac{2}{3}$ af den anden rod. Bestem samtlige mulige værdier af m.

Eksempel

Hvis et fjerdegradspolynomium med koefficienter i fx $\mathbb{Z}$ er reducibelt i $\mathbb{Z}[x]$ og ikke har nogen heltallige rødder, så ved vi at det ikke er deleligt med et førstegradspolynomium. Derfor må det være produkt af to andengradspolynomier.

Opgave 3.3. Vis at $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Eksempel

For at undersøge for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n - x^{n-2} + 1$, $n > 3$, er deleligt med $Q(x) = x^3 - x + 1$, bemærker vi at Q går op i P netop når Q går op i

$$P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x.$$

De reelle rødder i polynomiet

$$P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x = x(x^2 - 1)(x^{n-3} - 1)$$

er $x = 0$ og $x = \pm 1$. Polynomiet Q har mindst en reel rod da det er et tredjegradspolynomium, og denne reelle rod er ikke $x = 0$ eller $x = \pm 1$. Polynomiet Q går derfor ikke op i $P - Q$ og dermed heller ikke i P for noget n.

Opgave 3.4. Undersøg for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n + x^{n-1} - 1$, $n > 4$, er deleligt med $Q(x) = x^4 + x^3 - 1$.

Opgave 3.5. Bestem alle polynomier P med heltallige koefiicienter hvor

$$(x - 26)P(x + 13) = xP(x).$$

Eksempel

Om et tredjegradspolynomium P vides at $P(-1) = P(0) = P(1) = 7$ og $P(2) = 19$. For at bestemme P indfører vi et nyt polynomium Q der har $x = -1, 0, 1$ som rødder. Sæt

$$Q(x) = P(x) - 7.$$

Da er $x = -1, 0, 1$ alle rødder i tredjegradspolynomiet Q, og vi ved yderligere ifølge sætningen om rødder og faktorisering 3.1 at

$$Q(x) = k(x + 1)x(x - 1) = kx^3 - kx$$

og dermed $P(x) = kx^3 - kx + 7$. Da $P(2) = 19$, fås $19 = k(2^3 - 2) + 7) = 6k + 7$, og altså $k = 2$. Dermed er $P(x) = 2x^3 - 2x + 7$.

Opgave 3.6. Om et fjerdegradspolynomium $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, hvor b, c, d og e er hele tal, gælder at $P(0) = P(1) = P(2) = P(3)$. Bestem samtlige mulige værdier af b.

Opgave 3.7. Lad P være et n'te grads polynomium med $P(k) = \frac{k}{k+1}$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Bestem $P(n+1)$. (*Hint*: Indfør et smart nyt polynomium Q af grad $n + 1$.)

Som afslutning på dette kapitel ser vi på algebraens fundamentalsætning. Den kræver kendskab til komplekse tal og er ikke en sætning vi bruger, men blot ment som perspektivering.

Algebraens fundamentalsætning 3.4. Lad P være et n'te grads polynomium med koefficienter i $\mathbb{C}$. Da har polynomiet n ikke nødvendigvis forskellige rødder $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ så

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Vi beviser ikke algebraens fundamentalsætning da det kræver et rimeligt kendskab til komplekse tal.

Sætning 3.5. Lad P være et polynomium med koefficienter i $\mathbb{R}$ og grad mindst 1. Da kan P faktoriseres i første- og andengradspolynomier med koefficienter i $\mathbb{R}$.

Dette skyldes at de komplekse rødder kommer i par $a+ib$ og $a-ib$, og at $(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = (x^2-2ax+a^2+b^2) \in \mathbb{R}[x]$. Da beviset for dette kræver kendskab til komplekse tal, springes det over.

4 Koefficienter

Andengradspolynomiets koefficienter 4.1. Hvis andengradspolynomiet $P(x) = x^2+bx+c$ har rødderne x_1 og x_2, da er

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2) = x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2,$$

dvs. at $b = -(x_1+x_2)$ og $c = x_1x_2$.

Tredjegradspolynomiets koefficienter 4.2. Hvis tredjegradspolynomiet $P(x) = x^3+bx^2+cx+d$ har rødderne x_1, x_2 og x_3, da er

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

dvs. at $b = -(x_1+x_2+x_3)$, $c = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ og $d = -x_1x_2x_3$.

På samme måde kan man bestemme koefficienterne i polynomier af højere grad ud fra rødderne.

Eksempel

Hvis $P(x) = x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ har rødderne $-3, -1, 1, 3$, da er

$$a_2 = (-3)(-1)+(-3)1+(-3)3+(-1)1+(-1)3+1\cdot 3 = -10.$$

Opgave 4.1. For hele tal a og n har polynomiet $P(x) = x^3-x^2+ax-2^n$ tre heltallige rødder. Bestem a og n.

Opgave 4.2. Lad x_1 og x_2 være rødderne i $P(x) = x^2+ax+bc$ og x_2 og x_3 være rødderne i $Q(x) = x^2+bx+ac$. Vis at hvis $ac \neq bc$, da er x_1 og x_3 rødderne i $R(x) = x^2+cx+ab$.

5 Polynomier med heltallige koefficienter

I dette afsnit er alle tal hele tal, og alle polynomier har heltallige koefficienter.

Sætning om delelighed 5.1. For et polynomium P gælder at når $a \neq b$ så vil
$$a-b \,\Big|\, P(a)-P(b).$$

Bevis Lad $P(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ og $a \neq b$. Da
$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1}),$$
vil $a-b$ gå op i
$$P(a)-P(b)=a_m(a^m-b^m)+a_{m-1}(a^{m-1}-b^{m-1})+\ldots+a_1(a-b).$$
□

Eksempel

For et polynomium P er $P(n)$ lig et trecifret tal for alle $n=1,2,3,\ldots 1998$. Vi vil vise at P ikke har nogle heltallige rødder. (Baltic Way 1998)

For ethvert helt tal m findes et $n \in \{1,2,\ldots,1998\}$ så $1998 \mid n-m$. Dermed vil
$$1998 \mid n-m \mid P(n)-P(m).$$
Da $P(n)$ er et trecifret tal, følger det at $P(m) \neq 0$. Dermed har P ikke nogen heltallige rødder.

Opgave 5.1. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter så der findes to hele tal a og b så $P(a)=1$ og $P(b)=3$. Kan ligningen $P(x)=2$ have to forskellige heltallige løsninger? (Baltic Way 1994)

Opgave 5.2. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter så der findes et helt tal n så $P(-n)<P(n)<n$. Vis at da er $P(-n)<-n$. (Baltic Way 1991)

Opgave 5.3. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter. Vis at der ikke findes tre forskellige hele tal a, b og c så $P(a)=b$, $P(b)=c$ og $P(c)=a$.

Opgave 5.4. Et polynomium P har heltallige koefficienter og grad n. Desuden findes præcis k hele tal som er løsning til ligningen $\big(P(x)\big)^2=1$. Vis at $k-n \leq 2$. (IMO 1974)

6 Mere om polynomier med heltallige koefficienter

I dette afsnit gælder som før at alle tal er hele tal, og alle polynomier har heltallige koefficienter med mindre andet er nævnt.

Sætning om rødder 6.1. Hvis et rationelt tal skrevet som uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$ er rod i polynomiet

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

med heltallige koefficienter, da vil $p \mid a_0$ og $q \mid a_n$.
Specielt vil de eneste rationale rødder i

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

være hele tal.

Opgave 6.1. Bevis sætningen.

Eksempel
For at bestemme samtlige rationale rødder i

$$P(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 6$$

er det altså nok at tjekke de hele tal der går op i 6, dvs. at eneste rationale rod er $x = -1$.

Gauss' lemma 6.2. Hvis P er et polynomium med heltallige koefficienter som er irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$, da er det også irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Bevis Antag at $P(x) = Q(x)R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, hvor $Q, R \in \mathbb{Q}[x]$ har grad mindst 1. Da alle koefficienter i Q er rationale, findes et mindste heltal q så

$$qQ(x) = q_k x^k + \cdots + q_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

og tilsvarende et mindste heltal r så

$$rR(x) = r_m x^m + \cdots + r_0 \in \mathbb{Z}[x].$$

Sæt

$$qrP(x) = qQ(x)rR(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

På baggrund af faktoriseringen

$$qrP(x) = qQ(x)rR(x)$$

vil vi finde en faktorisering af P i $\mathbb{Z}[x]$. Lad p være en primdivisor i q. Da er alle koefficienter i $qrP(x)$ delelige med p. Lad i være det mindste index så p går op i $q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}$, men ikke i q_i. Da

$$q_0 r_i + q_1 r_{i-1} + \cdots + q_i r_0 = a_i \equiv 0 \pmod{p},$$

må p gå op i r_0. Desuden er

$$q_0 r_{i+1} + q_1 r_i + \cdots + q_i r_1 + q_{i+1} r_0 = a_{i+1} \equiv 0 \pmod{p},$$

dvs. r_1 også er delelig med p. Ved at fortsætte på denne måde ser vi at alle koefficienter i R er delelige med p, dvs. at $\frac{r}{p} R \in \mathbb{Z}[x]$. Dermed har vi fået en ny faktorisering

$$\frac{qr}{p} P(x) = qQ(x) \cdot \frac{r}{p} R(x).$$

Ved at fortsætte på denne måde får vi en faktorisering af P med polynomier med heltallige koefficienter. □

Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium 6.3. Lad

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

være et polynomium med heltallige koefficienter, hvor et primtal p går op i $a_0, a_1, \ldots a_k$, for et heltal $0 < k < n$, mens $p \nmid a_{k+1}$ og $p^2 \nmid a_0$. Da har P en irreducibel faktor af grad større end k i $\mathbb{Z}[x]$. Specielt er P irreducibel hvis $k = n - 1$, og i dette tilfælde kaldes kriteriet blot for Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Bevis Antag at $P(x)=Q(x)R(x)$, hvor

$$Q(x)=q_s x^s+\cdots+q_0 \quad \text{og} \quad R(x)=r_m x^m+\cdots+r_0$$

er polynomier med heltallige koefficienter. Da $a_0=q_0 r_0$ er delelig med p, men ikke med p^2, er netop en af q_0 og r_0 delelig med p. Antag wlog at $p \mid q_0$ og $p \nmid r_0$. Da p går op i a_1 og $a_1=r_0 q_1+q_0 r_1$, må $p \mid q_1$. Ved at fortsætte på denne måde ses at p går op i $q_0, q_1, \dots, q_k$, men at $p \nmid q_{k+1}$. Det følger heraf at Q har grad mindst $k+1$. $\square$

Eksempel

For at undersøge om polynomiet $P(x)=x^5+4$ er irreducibelt indenfor $\mathbb{Q}[x]$, kan man bruge Eisenteins irreducibilitetskriterium, men ikke direkte. Bemærk først at $P(x)$ er irreducibelt, netop hvis $P(x+1)$ er irreducibelt. Da $P(x+1)=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+5$, er det irreducibelt ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium med primtallet $p=5$, og dermed er P det også.

Opgave 6.2. Vis at $P(x)=x^6+3x^4+6x^3+9x+3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 6.3. Vis at $P(x)=x^p+p^2x^2+px+p-1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p.

Opgave 6.4. Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være forskellige heltal. Vis at

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)-1$$

er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 6.5. Lad $P(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, hvor $n>1$ er et helt tal. Vis at $P(x)$ ikke kan skrives som et produkt af to polynomier med heltallige koefficienter og grad mindst en. (IMO 1993)

7 Multiple rødder og differentialregning

Multiplicitet

Tallet x_0 siges at være m-dobbelt rod eller rod af multiplicitet m i et polynomium P hvis $(x-x_0)^m$ går op i P. Hvis man tæller antallet af rødder i et polynomium med multiplicitet, betyder det at den m-dobbelte rod x_0 tæller m gange.

Vi udnytter i det følgende at polynomier som funktioner over de reelle tal er differentiable.

Sætning om røddernes multiplicitet 7.1. For et polynomium P gælder at x_0 er m-dobbelt rod i P netop hvis

$$P(x_0)=P'(x_0)=P^{(2)}(x_0)=\ldots=P^{(m-1)}(x_0)=0.$$

Bevis Antag at x_0 er m-dobbelt rod i P, altså at $P(x)=(x-x_0)^m Q(x)$. Da er

$$P'(x)=(x-x_0)^{m-1}\Big(m\cdot Q(x)+(x-x_0)Q'(x)\Big),$$

og x_0 er dermed $(m-1)$-dobbelt rod i P'. Tilsvarende ses at x_0 er $(m-2)$-dobbelt rod i $P^{(2)}$ osv., dvs. at

$$P(x_0)=P'(x_0)=P^{(2)}(x_0)=\ldots=P^{(m-1)}(x_0)=0.$$

Antag omvendt at $P(x_0)=P'(x_0)=P^{(2)}(x_0)=\ldots=P^{(m-1)}(x_0)=0$. Vi viser at hvis x_0 er n-dobbelt rod i et polynomium Q', da er x_0 $(n+1)$-dobbelt rod i den stamfunktion Q til Q' for hvilken $Q(x_0)=0$, da dette giver det ønskede. Antag at x_0 er n-dobbelt rod i Q', og at Q er den stamfunktion til Q' for hvilken $Q(x_0)=0$. Antag at x_0 ikke er $(n+1)$-dobbelt rod i Q. Ifølge algebraens fundamentalsætning kan vi faktorisere

$$Q(x)=(x-x_0)^{n_0}(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k},$$

hvor $1 \le n_0 \le n$. Dermed er

$$Q'(x) = n_0\frac{Q(x)}{x-x_0} + n_1\frac{Q(x)}{x-x_1} + n_2\frac{Q(x)}{x-x_2} + \cdots + n_k\frac{Q(x)}{x-x_k}.$$

Da

$$n_1\frac{Q(x)}{x-x_1} + n_2\frac{Q(x)}{x-x_2} + \cdots + n_k\frac{Q(x)}{x-x_k}$$

er delelig med $(x-x_0)^{n_0}$ mens $n_0\frac{Q(x)}{x-x_0}$ ikke er, er Q' ikke delelig med $(x-x_0)^{n_0}$. Da $n_0 \le n$, er x_0 ikke n-dobbelt rod i Q', hvilket er en modstrid. □

Eksempel

Lad $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Vi vil vise at $(x-1)^2$ går op i P. Ved differentiation får man $P'(x) = (n+1)nx^n - (n+1)nx^{n-1}$, dvs. $P(1) = P'(1) = 0$. Dermed er $x = 1$ dobbeltrod i P, og $(x-1)^2$ går op i P.

Opgave 7.1. Bestem a og b så $x = -1$ er dobbelt rod i $P(x) = ax^n + nx^{n-2} + b$, n ulige.

Opgave 7.2. Lad P være et sjettegradspolynomium som for to reelle tal a og b, $0 < a < b$, opfylder at $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$ samt $P'(0) = 0$. Vis at $P(x) = P(-x)$ for alle reelle tal x. (BW 1998)

Opgave 7.3. I et tredjegradspolynomium $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ er $b < 0$ og $ab = 9c$. Vis at P har tre forskellige reelle rødder. (Baltic Way 1992)

Opgave 7.4. Bestem alle fjerdegradspolynomier P som opfylder følgende:

i) $P(x) = P(-x)$ for alle x.

ii) $P(x) \ge 0$ for alle x.

iii) $P(0) = 1$.

iv) $P(x)$ har præcis to lokale minima i x_1 og x_2 således at $|x_1 - x_2| = 2$.

(Baltic Way 1992)

8 Løsningsskitser

Opgave 1.1 Lad $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ være et lige polynomium, dvs. at $P(x) = P(-x)$. Dermed er

$$0 = P(x) - P(-x) = 2(a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \ldots a_1x),$$

hvor m er det største hele tal så $n \ge 2m+1$. Da det eneste polynomium der er nul for alle $x \in \mathbb{R}$, ifølge sætning 1.1 er nulpolynomiet, består $P(x)$ kun af led af lige potens af x.

At et ulige polynomium kun indeholder led af ulige potens af x, vises på tilsvarende måde.

Opgave 1.2 Bemærk at

$$P(x) = x^3\left(1 + 2\frac{1}{x} - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right)^3\right),$$

dvs. $Q(x) = 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3$ har rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$.

Opgave 1.3 Da $x = 0$ ikke er løsning til ligningen, kan vi dividere begge sider med x^2 og omskrive til en andengradsligning i $x + \frac{1}{x}$.

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Dermed er $x + \frac{1}{x} = -6 \vee x + \frac{1}{x} = 1$. Disse to ligninger omskrives til $x^2 + 6x + 1 = 0 \vee x^2 - x + 1 = 0$. Af første ligning fås $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$, mens den sidste ikke har nogen løsninger.

Opgave 1.4 Polynomiet $P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ har fire reelle rødder da $P(0) > 0$, $P(1) < 0$, $P(3) > 0$, $P(5) < 0$ og $P(7) > 0$, dvs. der er en reel rod i hvert af intervallerne $]0;1[$, $]1;3[$, $]3;5[$ og $]5;7[$.

Opgave 1.5 Lad $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ være et polynomium af ulige grad. Antag wlog at $a_n > 0$. Vælg

$$A = \max\left\{\left|\frac{a_i}{a_n}\right| \mid i = 0, 1, \ldots, n\right\}.$$

Da vil

$$\begin{aligned} P(2A) &= a_n(2A)^n + a_{n-1}(2A)^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &\geq a_n(2A)^n - |a_{n-1}(2A)^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq a_n A^n 2^n - |a_n A^n (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1)| \\ &= a_n A^n > 0. \end{aligned}$$

På tilsvarende måde ses at $P(-2A) < 0$. Ifølge Mellemværdisætningen findes dermed et $c \in \mathbb{R}$ så $P(c) = 0$. Dermed har P en reel rod. Hvis $a_n < 0$ ses på tilsvarende vis at $P(2A) < 0$ og $P(-2A) > 0$.

Opgave 2.1

a) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - x + 2)$.

b) $P(x) = 3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 9x + 4 = (x^2 + x + 1)(3x^2 + 5x + 4)$.

c) $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1)$.

Opgave 2.2 Vi ved at $x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$. Ved at indsætte henholdsvis $x = 1$ og $x = -1$ får man $a + b = 0$ og $-a + b = 4$, dvs. resten er $-2x + 2$.

Opgave 2.3 Antag at polynomiet $P(x) = x^2 + 2$ er reducibelt i $\mathbb{R}[x]$. Da findes to førstegradspolynomier Q og R med koefficienter i $\mathbb{R}$ så $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. Førstegradspolynomierne Q og R har hver en reel rod (de er ikke nødvendigvis forskellige), og disse er derfor også rødder i P. Men det er en modstrid, for $P(x) = x^2 + 2 > 0$ for alle reelle tal x. Dermed er P irreducibelt i $\mathbb{R}[x]$.

Opgave 2.4 Sæt $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$. Antag at $(x-1)^2$ går op P. Da findes et polynomium Q med heltallige koefficienter så

$$P(x) = (x-1)^2 Q(x).$$

Altså er $x = 1$ rod i P. Det betyder at $0 = P(1) = a + b + 1$ og altså $b = -a - 1$. Ved division ses at $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1 = (x-1)(ax^3 - x^2 - x - 1)$. Dermed er $(x-1)Q(x) = ax^3 - x^2 - x - 1$. Altså er $x = 1$ også rod i $ax^3 - x^2 - x - 1$, dvs. at $a - 3 = 0$. Dette giver samlet $a = 3$ og $b = -4$.

Opgave 3.1 Bemærk først at $x_0 = -a$ er rod i $P(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1}$. Dermed går $x + a$ op i P. Ved division ses at

$$P(x) = (x+a)(x^{2n} - ax^{2n-1} + a^2x^{2n-2} - \cdots - a^{2n-1}x + a^{2n}).$$

Opgave 3.2 Kald rødderne i P for $2a$ og $3a$. Da er

$$P(x) = m(x - 2a)(x - 3a) = mx^2 - 5max + 6ma^2.$$

Altså er $5ma = 10$ og $6ma^2 = 3$. Ved at løse ligningssystemet fås $a = \frac{1}{4}$ og $m = 8$.

Opgave 3.3 Bemærk først at $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2+1)(x^2+x) + 1 > 0$ for alle hele tal x, dvs. at $P(x)$ ikke har nogle heltallige rødder. Hvis der findes et polynomium med heltallige koefficienter som går op i $P(x)$, må det altså være et andengradspolynomium. Antag at $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, hvor $b = d = \pm 1$ og $a, c \in \mathbb{Z}$. Hvis vi ser på koefficienten til tredjegradsleddet, ses at $1 = a + c$. Ved yderligere at se på koefficienten til førstegradsleddet fås $1 = bc + ad = b(a + c) = b$, dvs. $b = d = 1$. Nu er koefficienten til andengradsleddet $1 = b + d + ac = 2 + ac$, og altså $ac = -1$. Dette er umuligt når $a + c = 1$ og a og c er hele tal. Altså er polynomiet irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 3.4 Polynomiet $Q(x) = x^4 + x^3 - 1$ går op i $P(x) = x^n + x^{n-1} - 1$ netop hvis $Q(x)$ går op i $P(x) - Q(x) = x^n + x^{n-1} - x^4 - x^3 = x^3(x-1)(x^{n-4} - 1)$. Polynomiet Q har en reel rod mellem 0 og 1 da $Q(0) = -1$ og $Q(1) = 1$, men denne rod er ikke rod i $P(x) - Q(x)$. Dermed går Q ikke op i P for noget n.

Opgave 3.5 Sæt først $x = 0$ i ligningen

$$(x - 26)P(x + 13) = xP(x).$$

Da er $26P(13) = 0$, dvs. $x = 13$ er rod i P. Ved at indsætte $x = 13$ i ligningen fås $-13P(26) = 13P(13) = 0$. Dermed er $x = 26$ også en rod i P. Ifølge Sætningen om rødder og faktorisering 3.1 findes et polynomium Q med heltallige koefficienter så

$$P(x) = (x - 13)(x - 26)Q(x).$$

Den oprindelige ligning kan dermed omskrives til

$$(x - 26)x(x - 13)Q(x + 13) = x(x - 13)(x - 26)Q(x)$$

for alle $x \in \mathbb{Q}$. Dermed er $Q(x + 13) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0, 13, 26\}$, og altså Q konstant. Dermed er de eneste polynomier P der opfylder det ønskede

$$P(x) = k(x - 13)(x - 26),$$

hvor $k \in \mathbb{Z}$.

Opgave 3.6 Vi ved at $e = P(0) = P(1) = P(2) = P(3)$. Dermed har

$$Q(x) = P(x) - e = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

rødderne 0, 1, 2 og 3, dvs.

$$Q(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Her af ses at $b = -6$.

Opgave 3.7 Da $P(k) - \frac{k}{k+1} = 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, vil $n+1$'te grads polynomiet $Q(x) = P(x)(x+1) - x$ have rødderne $0, 1, 2, \ldots, n$. Dermed er

$$Q(x) = a(x-0)(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Da $Q(-1) = 1$, må $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, og dermed

$$P(n+1) = \frac{Q(n+1)+n+1}{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2} = \begin{cases} 1 & \text{for ulige } n \\ \frac{n}{n+2} & \text{for lige } n \end{cases}.$$

Opgave 4.1 Kald de heltallige rødder for x_1, x_2 og x_3. Da er $x_1x_2x_3 = 2^n$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$ og $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Af sidste ligning ses at en eller tre af rødderne skal være ulige, og da $x_1x_2x_3 = 2^n$ kan vi uden tab af generalitet antage at $x_1 = \pm 1$. Hvis $x_1 = 1$, skal $x_2 + x_3 = 0$ og $x_2x_3 = 2^n$ hvilket er umuligt. Altså er $x_1 = -1$ og $x_2x_3 = -2^n$, $x_2 + x_3 = 2$ og $-2 + x_2x_3 = a$. Heraf ses let at x_2 og x_3 er henholdsvis 4 og -2, dvs. $a = -10$ og $n = 3$.

Opgave 4.2 Oplysningerne giver at $a = -(x_1 + x_2)$, $bc = x_1x_2$, $b = -(x_2 + x_3)$ og $ac = x_2x_3$, og vi skal vise at $c = -(x_1 + x_3)$ og $ab = x_1x_3$. Af ligningerne ses at $a - b = x_3 - x_1$ og $c(a-b) = x_2(x_3 - x_1)$. Da $ac \neq bc$, får vi at $c = x_2$, $a = x_3$ og $b = x_1$. Sluttelig fås let at $c = -(x_1 + x_3)$.

Opgave 5.1 Da $a \neq b$ vil $b - a \mid P(b) - P(a) = 3 - 1 = 2$. Antag at $P(c) = 2$. Da vil $c - a \mid P(c) - P(a) = 1$ og $b - c \mid P(b) - P(c) = 1$. Vi ved altså at $c = a \pm 1$, $c = b \pm 1$ samt at $a = b \pm 2$ eller $a = b \pm 1$. Der findes højst et tal c der opfylder dette.

Opgave 5.2 Vi ved at $2n = n - (-n) \mid P(n) - P(-n)$, dvs. at $P(n) - P(-n) \geq 2n$. Dermed er $P(n) - 2n \geq P(-n)$, og vi ved yderligere at $P(n) < n$. Samlet giver dette $P(-n) \leq P(n) - 2n < n - 2n = -n$.

Opgave 5.3 Antag at der findes tre forskellige hele tal a, b og c så $P(a) = b$, $P(b) = c$ og $P(c) = a$. Lad fx uden tab af generalitet $a - c$ være den numerisk største differens mellem de tre tal, dvs. at $|a - c| > |b - a|$. Vi har nu at $a - c$ går op i $P(a) - P(c) = b - a$, hvilket er en modstrid.

Opgave 5.4 Bemærk først at $\big(P(x)\big)^2 = 1 \Leftrightarrow \big(P(x) - 1\big)\big(P(x) + 1\big) = 0$. Antag at $P(a) = 1$ og $P(b) = -1$ for to hele tal a og b. Da vil $a - b \mid P(a) - P(b) = 2$, dvs. at $b = a \pm 1 \vee b = a \pm 2$.
Antag nu at m er den mindste heltallige løsning til $\big(P(x) - 1\big)\big(P(x) + 1\big) = 0$, og antag fx at $P(m) - 1 = 0$. Da findes højst to heltallige løsninger til $P(x) + 1 = 0$, nemlig $m + 1$ og $m + 2$. Polynomiet $P(x) - 1$ er af n'te grad og har derfor højst n rødder. Dermed har $\big(P(x) - 1\big)\big(P(x) + 1\big) = 0$ højst $n + 2$ heltallige løsninger.

Opgave 6.1 Antag at $\frac{p}{q}$ er rod i P, og at $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Da er

$$q^n P\Big(\frac{p}{q}\Big) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_0 q^n = 0,$$

og derfor må q gå op i $a_n p^n$ og dermed i a_n, og desuden må p gå op i $a_0 q^n$ og dermed i a_0.

Opgave 6.2 Polynomiet $P(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium, hvor man benytter $p = 3$.

Opgave 6.3 Polynomiet $P(x) = x^p + p^2x^2 + px + p - 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p, netop hvis

$$P(x+1) = (x^p + \binom{p}{p-1} x^{p-1} + \ldots + \binom{p}{1} x + 1) + p^2(x^2 + 2x + 1) + (px + p) + p - 1$$

er irreducibelt. Da $\binom{p}{i}$ er delelig med p for alle $i = 1, 2, \ldots, p-1$, når p er et primtal, er alle koefficienterne på nær højestegradskoefficienten til $P(x+1)$ delelige med p. Desuden er konstantleddet $p^2 + 2p$ ikke delelig med p^2, når p er et ulige primtal. Dermed er $P(x+1)$, og altså også $P(x)$, irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Opgave 6.4 Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, hvor Q og R er polynomier med heltallige koefficienter. Da er $Q(x_i) = -R(x_i) = \pm 1$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$. Dermed er $Q(x) + R(x)$ et polynomium med n forskellige rødder $x_1, x_2, \dots, x_n$, dvs. enten har $Q(x) + R(x)$ grad mindst n, eller også er det nulpolynomiet. Antag at $Q(x) + R(x)$ er nulpolynomiet. Da er $P(x) = -Q(x)^2$ i modstrid med at koefficienten til højestegradsleddet i P er 1. Dermed har $Q(x) + R(x)$ grad mindst n, dvs. en af dem har grad mindst n. Da $P(x) = Q(x)R(x)$ er et polynomium af grad n, følger at enten Q eller R har grad n. Dermed er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$ og ifølge Gauss' lemma også i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 6.5 Ifølge Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium med $p = 3$ og $k = n-2$ har P en irreducibel faktor i $\mathbb{Z}[x]$ af grad mindst $n-1$. Dvs. hvis P er reducibelt, må det have en rod. En rod i P er et helt tal som går op i 3, og det ses derfor nemt at P ikke har nogen heltallig rod. Dermed er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 7.1 Når $x = -1$ er dobbelt rod i $P(x) = ax^n + nx^{n-2} + b$, n ulige, er $0 = P(-1) = -a - n + b$ og $0 = P'(-1) = an + n(n-2)$, dvs. $a = 2 - n$ og $b = 2$.

Opgave 7.2 Polynomiet $Q(x) = P(x) - P(-x)$ har grad højst fem samt fem forskellige rødder $-b$, $-a$, 0, a og b. Desuden er $Q'(0) = 0$, hvilket viser at 0 er dobbeltrod. Dermed må $Q(x)$ være nulpolynomiet, dvs. at $P(x) = P(-x)$ for alle x.

Opgave 7.3 For $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ vil diskriminanten være positiv da $b < 0$, dvs. $P'(x)$ har to forskellige reelle rødder x_1 og x_2. Da $P(x)$ er et tredjegradspolynomium, vil det have tre forskellige reelle rødder netop hvis $P(x_1)$ og $P(x_2)$ har forskellige fortegn, dvs. netop hvis $P(x_1)P(x_2) < 0$ (overvej). Ved at udnytte at $ab = 9c$, får man ved division af $P(x)$ med $P'(x)$ at resten er $x(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2)$. Da

$$P(x) = P'(x)\frac{1}{3}x + x(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2)$$

og $x_1 x_2 = \frac{b}{3} < 0$, er

$$P(x_1)P(x_2) = x_1 x_2(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2)^2 < 0.$$

Opgave 7.4 Lad $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Ifølge i) er $b = d = 0$, og ifølge iii) er $e = 1$. Yderligere giver ii) at $a > 0$, dvs. $P(x) = ax^4 + cx^2 + 1$, hvor $a > 0$.

Da $P(x)$ har to lokale minima, må $P'(x) = 4ax^3 + 2cx = 2x(2ax^2 + c)$ have tre forskellige reelle rødder, og da $a > 0$ giver dette at $c < 0$. Rødderne i $P'(x)$ er $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{-c/(2a)}$, dvs. at $2\sqrt{-c/(2a)} = 2$ og dermed $c = -2a$. Endelig giver ii) at $P(x) = ax^4 - 2ax^2 + 1 = a(x^2-1)^2 + 1 - a > 0$, dvs. at $0 < a \leq 1$. Det er nemt at tjekke at alle sådanne polynomier opfylder de fire betingelser.