Ligninger med reelle løsninger

Når man løser ligninger, er der nogle standardmetoder som er vigtige at kende. Her er der en kort introduktion til forskellige teknikker efterfulgt af opgaver hvor man kan træne teknikkerne.

Vurdering af antallet af løsninger

Ligningen

$$\sqrt{3-\sqrt{x+3}}=x$$

har oplagt løsningen $x=1$.

For at undersøge om der findes andre løsninger, er det en god ide at se på monotoniforhold for funktionerne

$$f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x+3}} \quad \text{og} \quad g(x)=x.$$

Da f er en aftagende funktion af x, og g er en voksende funktion af x, har ligningen maksimalt en løsning, og den har vi allerede fundet. Den eneste løsning til ligningen er altså $x=1$.

Omskrivning til andengradsligning

Mange ligninger kan omskrives til en andengradsligning og derefter løses. I dette eksempel vil vi bestemme alle reelle tal x som opfylder at

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=14.$$

Dette er ikke en andengradsligning i x, men hvis vi omskriver, kan vi opnå en andengradsligning i en anden variabel. Bemærk først at

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{49-48}=1.$$

Ved at gange på begge sider med $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x$ får vi andengradsligningen

$$\left(\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x\right)^2-14\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x+1 \quad = \quad 0$$

Løsningsformlen for andengradsligningen giver

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=\frac{14\pm\sqrt{192}}{2}=7\pm\sqrt{48}.$$

Nu kan vi som i eksemplet før vurdere antallet af løsninger, for da

$$f(x)=\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x$$

er en aftagende funktion, er der samlet højst to løsninger. Det er let at se at $x=\pm 2$ løser ligningen.

Omskrivning til kvadrat

En anden ofte anvendt metode til at løse ligninger er at omskrive ligningen til en sum af kvadrater som er lig nul.

Vi ønsker at bestemme alle reelle talpar (x,y) så

$$x^2+2x+10-12y+4y^2=0.$$

Vi omskriver venstresiden til en sum af kvadrater og får

$$(x+1)^2+(3-2y)^2=0.$$

Løsningerne opfylder dermed at $x+1=0$ og $3-2y=0$, dvs. den eneste løsning er $(-1,\frac{3}{2})$.

Vurdering af de variable

Når man skal vise at ligningssystemet

$$y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}} \quad \text{og} \quad x=\sqrt{y-\sqrt{1+y}}$$

ikke har nogen reelle løsninger, er det ofte en god idé at antage at der er en løsning, og vise at det leder til en modstrid. Modstriden kan i en del tilfælde opnås ved at vurdere de variable.

Antag at ligningssystemet har mindst en reel løsning x og y. Da må $0\leq y$ og $0\leq x\leq 1$. Ved at udnytte at $0\leq x\leq 1$, får vi

$$y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}}\leq\sqrt{x+1}\leq\sqrt{2}.$$

Da vi ikke kan have lighedstegn i begge uligheder samtidig, må $y<\sqrt{2}$. Af ligningen

$$x=\sqrt{y-\sqrt{1+y}}$$

ses at $y\geq\sqrt{y+1}$ hvilket betyder at $y\geq 1$, og dermed at

$$y\geq\sqrt{y+1}\geq\sqrt{2}$$

hvilket er en modstrid. Altså har ligningssystemet ingen reelle løsninger.

Substitution

Nu ser vi på et ligningssystem hvor der er tre ubekendte og tre udtryk som er lig hinanden. Vi ønsker at bestemme alle tripler (x,y,z) af forskellige reelle tal som opfylder

$$x(y+1)=y(z+1)=z(x+1).$$

Bemærk først at hvis en af de tre ubekendte er 0 da må de to andre også være 0. Det samme er tilfældet med -1, og dermed findes ingen løsninger hvor 0 eller -1 indgår, da x, y og z skal være forskellige.

Da vi i denne ligning har tre ubekendte og tre udtryk som er lig hinanden, ønsker vi at reducere antallet af ligninger og ubekendte som vi skal arbejde med. Først indfører vi alligevel en ny størrelse k:

$$k=x(y+1)=y(z+1)=z(x+1).$$

Vi vil nu reducere til en ligning hvor kun k og x indgår vha. substitution. Da $z=\frac{k}{x+1}$ og $y=\frac{k}{x}-1=\frac{k-x}{x}$ substituerer vi z og y med de fundne udtryk i ligningen $k=y(z+1)$ for at få en ligning der kun indeholder x og k.

$$k=y(z+1)=\Big(\frac{k-x}{x}\Big)\Big(\frac{k+x+1}{x+1}\Big).$$

En omskrivning af ligningen giver

$$k(x^2+x)=k^2-x^2+k-x=k(k+1)-(x^2+x)\Leftrightarrow(k+1)(x^2+x-k)=0,$$

dvs. at $k=-1$ eller $x^2+x=k$. Antag at $k=-1$. Dette giver triplerne

$$(x,\frac{-1-x}{x},\frac{-1}{x+1}),$$

hvor $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$, og disse er alle løsninger.

Antag i stedet at $k\neq -1$, dvs. at $x^2+x=k$. Af symmetrigrunde må y og z også opfylde denne ligning, men da den højst har to løsninger, kan de ikke alle tre være forskellige. Dermed er samtlige løsninger

$$(x,\frac{-1}{x}-1,\frac{-1}{x+1}),$$

hvor $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$.

Opgaver

Opgave 1. Bestem alle reelle tal x så

$$5 = \sqrt{x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{x+7}.$$

Opgave 2. Bestem alle reelle tal x så

$$3^{2+x} + 3^{2-x} = 82.$$

Opgave 3. Bestem alle reelle tal x så

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Opgave 4. Bestem alle reelle tal x, y og z som opfylder ligningssystemet

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \quad \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \quad \text{og} \quad \frac{4z^2}{1+4z^2} = x.$$

Opgave 5. Bestem alle reelle talpar (x, y) som opfylder ligningen

$$(x+y)^2 + (x+3y)^2 - 4(x+y) - 10(x+3y) + 29 = 0.$$

Opgave 6. De positive reelle tal x, y og z opfylder ligningssystemet

$$x + 2y = \frac{100}{x}, \quad y + 2z = \frac{96}{y}, \quad z + 2x = \frac{93}{z}.$$

Bestem $x + y + z$. (Abelkonkurrencen, 2. runde 2006-2007)

Opgave 7. Bestem antallet af reelle løsninger til ligningen

$$0 = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}.$$

(NMC 2001)

Opgave 8. De reelle tal x, y og z er ikke alle ens og opfylder at

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k.$$

Bestem samtlige mulige værdier af k. (NMC 2006)

Løsninger

Opgave 1 Da

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{x+7}$$

er en voksende funktion, er der maksimalt en løsning, og det ses let at $x = 2$ løser ligningen.

Opgave 2 Vi omskriver til en andengradsligning:

$$\begin{aligned} 3^{2+x} + 3^{2-x} &= 82 \\ 9 \cdot 3^x + \frac{9}{3^x} &= 82 \\ 9(3^x)^2 - 82(3^x) + 9 &= 0 \\ (9 \cdot 3^x - 1)(3^x - 9) &= 0 \end{aligned}$$

Her af ses at $x = \pm 2$.

Opgave 3 Udnyt at

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$$

til at omskrive ligningen til

$$8(2^x + 2^{-x})^2 - 54(2^x + 2^{-x}) + 85 = 0.$$

Dette er en andengradsligning i $2^x + 2^{-x}$, og dermed er

$$2^x + 2^{-x} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{27 \pm 7}{8}.$$

Hvis

$$2^x + 2^{-x} = \frac{17}{4},$$

får vi en andengradsligning

$$(2^x)^2 - \frac{17}{4} 2^x + 1 = 0$$

i 2^x, dvs. $2^x = 4 \vee 2^x = \frac{1}{4}$.

Hvis

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2},$$

får vi på samme måde at $2^x = 2 \vee 2^x = \frac{1}{2}$. Samlet er $x = \pm 1, \pm 2$.

Opgave 4 Bemærk først at x, y og z ikke kan være negative, samt at enten er de alle nul, eller også er ingen nul. Antag derfor at x, y og z er positive reelle tal. Vi bemærker nu at

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} \leq x$$

med lighedstegn netop når $x = \frac{1}{2}$, da uligheden kan omskrives til $0 \leq (2x-1)^2$. Dermed er

$$x = \frac{4z^2}{1+4z^2} \leq z = \frac{4y^2}{1+4y^2} \leq y = \frac{4x^2}{4x^2+1} \leq x,$$

dvs. at $x = y = z = \frac{1}{2}$. Samlet ses at $x = y = z = 0$ og $x = y = z = \frac{1}{2}$ er de eneste løsninger.

Opgave 5 Omskriv til sum af kvadrater

$$(x + y - 2)^2 + (x + 3y - 5)^2 = 0.$$

Heraf ses at $x + y - 2 = 0$ og $x + 3y - 5 = 0$. Ved at løse de to lineære ligninger med to ubekendte får vi at den eneste løsning er $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Opgave 6 Hvis vi multiplicerer ligningerne med henholdsvis x, y og z, får vi

$$x^2 + 2xy = 100, \quad y^2 + 2yz = 96, \quad z^2 + 2xz = 93.$$

Adderer vi disse ligninger, får vi

$$289 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yx = (x + y + z)^2.$$

Dvs. at $x + y + z = \sqrt{289} = 17$.

Opgave 7 For at kunne vurdere højresiden omskriver vi til

$$\begin{aligned} 0 &= x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} \\ &= x(x-1)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4) + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

For $x \leq 0$ og $x \geq 1$ fremgår det af omskrivningen at højresiden er positiv. For $0 < x < 1$ er

$$0 > x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4},$$

og

$$x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4 < 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Samlet giver dette at

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} > -\frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{5}{2} = 0,$$

dvs. at ligningen ikke har nogen reelle rødder.

Opgave 8 Først eliminerer vi x og z så vi får en ligning i y og k. Da $x + \frac{1}{y} = k$, er $\frac{1}{x} = \frac{y}{ky-1}$, og da $y + \frac{1}{z} = k$, er $z = \frac{1}{k-y}$ (Bemærk at $ky - 1 \neq 0$ og $k - y \neq 0$). Ved at udnytte dette omformes ligningen $z + \frac{1}{x} = k$ til

$$\frac{1}{k-y} + \frac{y}{ky-1} = k.$$

Yderligere omskrivninger giver

$$ky - 1 + y(k-y) = k(k-y)(ky-1),$$

og hvis $k^2 \neq 1$, får vi en andengradsligning i y

$$y^2(1-k^2) + y(k^3 - k) + 1 - k^2 = 0.$$

Af symmetrigrunde skal x og z opfylde præcis den samme andengradsligning, og dermed må mindst to af x, y og z være ens, men dette giver ifølge den oprindelige ligning at alle tre er ens. Dermed må $k = \pm 1$. Begge disse værdier af k er mulige: For $x = 2$, $y = -1$ og $z = \frac{1}{2}$ er $k = 1$. Ved at ændre fortegn ser man at $k = -1$ også er mulig.