Kombinatorik

Kombinatorik går ud på at tælle antallet af kombinationer af et eller andet, og for at kunne tælle antallet af kombinationer smart har man brug for forskellige tællestrategier. I noterne introduceres helt grundlæggende måder at tælle på som fx multiplikationsprincippet, binomialkoefficienten $\binom{n}{r}$ der er et udtryk for på hvor mange måder man kan vælge r ud af n, samt mere om binomialkoefficienter og Pascals trekant. I de senere kapitler introduceres desuden væsentligt mere komplicerede måder at tælle på som fx at tælle rekursivt, tælle vha. princippet om inklusion og eksklusion eller at tælle vha. frembringerfunktioner.

I noterne er der hele tiden fokus på tællestrategier, og der er mange opgaver da det er helt nødvendige selv at bruge strategierne for at forstå de forskellige principper og senere kunne anvende dem på andre problemstillinger. Noterne har fokus på opgavetyper som ofte stilles til internationale matematikkonkurrencer.

Der løsningsskitser til samtlige opgaver bagerst, og der er desuden et hint til de opgaver der er markeret med *Hint*.

Indhold

1 Kombinationer

Multiplikationsprincippet 1.1. Ved et valg der består af n forskellige delvalg med henholdsvis $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valgmuligheder, er der i alt

$$m_1 m_2 \ldots m_n$$

valgmuligheder.

Eksempel 1.2. Når man fx skal udfylde en tipskupon, skal man træffe 13 valg da man skal sætte 13 krydser, et i hver række. I hver række er der tre muligheder for at sætte et kryds, dvs. man kan udfylde en tipskupon på $3^{13} = 1.594.323$ måder.

Eksempel 1.3. Man kan også bruge multiplikationsprincippet til at bestemme hvor mange forskellige delmængder der findes af en mængde med n elementer. Når man skal udtage en delmængde, skal man for hvert element afgøre om det skal med eller ikke med, der er altså to muligheder for hvert element. Derfor er der 2^n forskellige delmængder af en mængde med n elementer. Her er både den tomme mængde og mængden selv talt med.

Tællestrategi 1.4. Når man skal tælle hvor mange blandt nogle kombinationer der opfylder en bestemt betingelse, skal man *altid* overveje om det er nemmest at tælle dem der opfylder betingelsen, eller dem der ikke gør. Formuleret med mængder: Hvis T er en delmængde af en mængde M, og man skal bestemme antallet af elementer i T, skal man *altid* overveje om det er nemmest at tælle antallet af elementer i T eller antallet af elementer i M som ikke ligger i T. Det ene er som regel temmelig vanskeligt, mens det andet er overkommeligt.

Eksempel 1.5. Til en multiple choice-konkurrence er der 20 spørgsmål hver med svarmulighederne a, b, c, d og e. På hvor mange måder kan man svare på de 20 spørgsmål så der er mindst to spørgsmål i træk hvor man har sat kryds ved samme svarmulighed?

Hvis vi forsøger at tælle de kombinationer hvor man sætter kryds ved samme svarmulighed ved to på hinanden følgende spørgsmål, bliver det hurtigt meget kompliceret. Vi kunne fx starte med at tælle de kombinationer hvor vi svarede det samme på de to første spørgsmål. Dem er der 5^{19} af. Tilsvaende er der 5^{19} kombinationer hvor vi svarer det samme i spørgsmål 2 og 3, osv. Problemet er bare at vi her tæller de samme kombinationer med flere gange, og det bliver temmelig kompliceret at holde styr på hvor mange gange den enkelte kombination egentlig tælles med.

Hvis vi i stedet siger at der er 5^{20} svarmuligheder i alt, og trækker de kombinationer fra hvor der *ikke* svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, så bliver det meget lettere. Der er $5 \cdot 4^{19}$ kombinationer hvor der ikke svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, fordi vi har fem muligheder for at svare på spørgsmål 1, og derefter fire muligheder for at svare på hvert af de følgende spørsmål, da vi blot ikke må svare det samme som på det foregående. Dermed er der i alt

$$5^{20} - 5 \cdot 4^{19}$$

måder at svare på de 20 spørgsmål så der findes to på hinanden følgende spørgsmål hvor man har svaret det samme.

Opgave 1.1. En perleplade består af 10×10 perler. Georg har fem forskellige farver perler. Hvor mange forskellige perleplader kan Georg lave når han vil have at den yderste kant er ensfarvet?

Opgave 1.2. a) Hvor mange forskellige syvcifrede positive heltal findes der som ikke indeholder cifferet 7? b) Hvor mange ticifrede positive heltal er der som ikke indeholder to ens nabocifre? c) Hvor mange sekscifrede positive heltal findes der som er delelige med 9, og som ikke indeholder cifferet 0? d) Hvor mange ottecifrede tal findes der som består af cifrene 1, 2, 3 og 4, og som indeholder to ens nabocifre?

Opgave 1.3. Tallene fra 1 til 100 skal fordeles i tre disjunkte delmængder så ingen af mængderne er tomme, og ingen mængde indeholder to på hinanden følgende tal. (At to mængder er disjunkte betyder at de ikke har nogen elementer tilfælles.) På hvor mange måder kan det gøres?

Opgave 1.4. Tyve kugler nummereret $1, 2, \dots, 20$ skal fordeles i fire forskellige skåle, en rød, en blå, en gul og en grøn. På hvor mange måder kan det gøres hvis der i mindst en af skålene skal være to kugler hvis numre har differens 1 eller 2?

Opgave 1.5. En mængde M består af n elementer. Bestem antallet af par af delmængder af M som ikke har nogen elementer tilfælles. (Tilfældet hvor begge delmængder er tomme, tælles med).

Eksempel 1.6. I kombinatorik ønsker man ofte at bestemme antallet af måder man kan udtage noget på i en bestemt rækkefølge.

Til et stævne er der 14 hold der kæmper om guld, sølv og bronze. Når man skal bestemme på hvor mange forskellige måder medaljerne kan fordeles, har man 14 muligheder for at uddele guld, 13 for sølv og 12 for bronze, dvs. der er i alt $14 \cdot 13 \cdot 12$ måder at fordele medaljerne på.

Udtag med rækkefølge 1.7. Hvis man skal udtage r ud af n elementer så rækkefølgen af de r elementer har betydning, kan man gøre det på

$$n(n-1)\dots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

måder.

Bevis Man har n muligheder for at vælge det første element, $n-1$ muligheder for det næste, osv. Til slut har man $n-(r-1))$ muligheder for at vælge det r'te element. Formlen følger derfor af multiplikationsprincippet.

Udtag uden rækkefølge 1.8. Symbolet $\binom{n}{r}$ betegner antallet af måder hvorpå man kan udtage r elementer ud af n uden hensyntagen til rækkefølgen af de elementer man udtager, og det kaldes en binomialkoefficient. Altså antallet af måder hvorpå man kan udtage en delmængde med r elementer ud af en mængde med n elementer.

Der gælder at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Nogle benytter betegnelsen $K(n, r)$ i stedet for $\binom{n}{r}$. Bemærk at $0! = 1$ per definition, og at formlen derfor også gælder for $r = 0$. Hvis $r < 0$ eller $r > n$, er $\binom{n}{r} = 0$ pr. definition.

Bevis I første omgang husker vi på at man kan udtage r elementer i rækkefølge på $\frac{n!}{(n-r)!}$ måder. Desuden kan r elementer ordnes i $r!$ forskellige rækkefølger, dvs. hver delmængde er talt med $r!$ gange, hvis vi udtager de r elementer i rækkefølge. Derfor er

$$\binom{n}{r} = \frac{\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

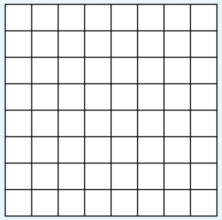
Eksempel 1.9. Sætningen kan bruges i et utal af sammenhænge, når man skal afgøre på hvor mange måder man kan udvælge noget. Fx kan de syv vindertal i lotto, når der er 36 tal at vælge imellem, udtrækkes på $\binom{36}{7} = 8.347.680$ forskellige måder. Når man har fundet antallet af kombinationer, kan dette benyttes til at beregne sandsynligheden for at opnå noget som fx at få syv rigtige i lotto. Alle kombinationer af syv vindertal er i lotto lige sandsynlige, og dermed er sandsynligheden for at få syv rigtige $\frac{1}{8.347.680}$.

Eksempel 1.10. Man kan også bruge sætningen til at udregne på hvor mange måder man kan udtage syv kort af et sæt almindelige spillekort med 52 kort, så man netop har et par, altså to kort med samme talværdi og fem kort med fem andre talværdier. Der er 13 forskellige talværdier, dvs. vi kan udvælge den talværdi parret har, på $\binom{13}{1} = 13$ måder. Desuden kan vi vælge de fem talværdier de fem sidste kort skal have, på $\binom{12}{5} = 792$ måder. For hver talværdi er der fire kort, dvs. vi nu kan vælge de to kort der indgår i vores par, på $\binom{4}{2} = 6$ måder. Desuden kan vi vælge hvert af de fem andre kort på $\binom{4}{1} = 4$ måder. I alt er der altså ifølge multiplikations-princippet

$$\binom{13}{1}\binom{12}{5}\binom{4}{2}\binom{4}{1}^5 = 63.258.624$$

måder at udtage syv kort på, så man netop har et par.

Eksempel 1.11. På et skakbræt med 8×8 felter kravler en myre fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne. Den kravler kun på stregerne mellem felterne eller langs kanten af brættet, og den sørger for at turen bliver så kort så mulig.



Vi skal nu regne ud hvor mange forskellige ruter myren kan vælge. Først bemærker vi at den samlet skal gå otte felter op og otte felter til højre, hvis vi forestiller os at den starter i nederste venstre hjørne. Den skal med andre ord vælge præcis hvilke otte af de 16 "skridt"der skal være lodrette, dvs. den har $\binom{16}{8} = 12.870$ forskellige ruter at vælge imellem.

Opgave 1.6. Hvor mange firecifrede positive heltal findes der, hvor cifrene står i stigende rækkefølge fra venstre mod højre, og alle fire cifre er forskellige?

Opgave 1.7. En forsamling på 25 personer vil nedsætte et udvalg med fem medlemmer, hvor et af de fem medlemmer er formand for udvalget. På hvor mange måder kan dette gøres?

Opgave 1.8. Bestem på hvor mange måder man kan udtage seks kort fra et sæt spillekort, så man netop har to par.

Opgave 1.9. Fra et kortspil trækkes fire kort. Hvor stor er sandsynligheden for at der blandt de fire kort ikke er et par?

Opgave 1.10. I en by har man et centrum der kun består af veje der går nord-syd og øst-vest. Der er syv veje nord-syd og fem veje øst-vest, men pga. vejarbejde er vejkrydset mellem den midterste vej nord-syd og den midterste vej øst-vest totalt spærret så man ikke kan passere det. Jonatan står i det sydvestlige hjørne af centrum og skal til det nordøstlige hjørne, og han ønsker at gå så kort så muligt. Hvor mange forskellige ruter kan han vælge imellem?

Opgave 1.11. I en skål er der fem røde bolde, tre blå og to grønne. Hvad er sandsynligheden for at der er en rød, en blå og en grøn bold tilbage i skålen, hvis man fjerner syv tilfældige bolde?

Opgave 1.12. Lad m, n og k være positive heltal så $n \geq k$ og $m \geq k$. På et $n \times m$ skakbræt skal placeres k tårne (højst et på hvert felt) så ingen tårne truer hinanden. Vis at det kan gøres på $\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$ måder.

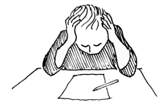
Opgave 1.13. I en konveks n-polygon indtegnes samtlige diagonaler, og det antages at der ikke findes tre diagonaler som skærer hinanden i samme punkt. (Her er en diagonal et linjestykke der forbinder to af polygonens hjørner, men polygonens sider er dog ikke diagonaler.)

a) Vis at antallet af diagonaler er $\binom{n}{2} - n$.

b) Vis at antallet af skæringspunkter mellem diagonaler er $\binom{n}{4}$. (*Hint*)

c) Vis at antallet af områder som diagonalerne deler polygonen i, er $1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$. (*Hint*)

d) Vis at antallet af trekanter, hvis hjørner er polygonens hjørner eller en skæring mellem to diagonaler, og hvis sider ligger på polygonens sider og diagonaler, er $\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} + \binom{n}{6}$. (*Hint*)



Opgave 1.14. På en cirkel er markeret 10 punkter. Hvor mange konvekse polygoner findes der hvis hjørner er en delmængde af de ti punkter? (*Hint*)

Opgave 1.15. I en papkasse ligger et stort antal løse sokker. Nogle af sokkerne er røde; de øvrige er blå. Det oplyses at det samlede antal sokker ikke overstiger 1993. Endvidere oplyses det at sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve, når man på tilfældig måde udtrækker to sokker fra kassen, er $\frac{1}{2}$. Hvad er efter de foreliggende oplysninger det største antal røde sokker der kan befinde sig i kassen? (GM1993) (*Hint*)

At vælge r elementer ud af n svarer til at splitte de n elementer op i to bunker: en med r elementer og en med $n-r$ elementer. Nogle gange har man imidlertid brug for at fordele de n elementer i mange flere bunker. Eller formuleret med delmængder; dele en mængde i disjunkte delmængder som tilsammen indeholder samtlige elementer.

Sætning 1.12. Symbolet $\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_m}$ betegner antallet af måder hvorpå man kan dele en mængde med n elementer i m disjunkte delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer i hver delmængde, så $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. Der gælder at

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_m!}$$

Bevis Når vi skal dele en mængde med n elementer i m disjunkte delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer i hver delmængde, så $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$, kan vi tænke på udvælgelsen således: Først vælges A_1 blandt de n elementer. Det kan vi gøre på $\binom{n}{r_1}$ måder. Derefter vælges A_2 blandt de resterende $n-r_1$ elementer. Det kan vi gøre på $\binom{n-r_1}{r_2}$. Vi fortætter på denne måde indtil vi til slut vælger A_m blandt de resterende $n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{m-1}$ elementer. Dermed er

$$\begin{aligned}\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} &= \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}}{r_m} \\ &= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\,\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\cdots\frac{(n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1})!}{r_m!(n-r_1-r_2-\cdots-r_m)!} \\ &= \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_m!}.\end{aligned}$$

Eksempel 1.13. En klasse med tolv elever skal deles i tre grupper med fire i hver. På hvor mange måder kan dette gøres? Hvis grupperne betegnes A, B og C, kan de tolv elever ifølge sætningen fordeles i grupperne A, B og C med fire i hver på $\binom{12}{4,4,4} = 34650$ måder. Men i spørgsmålet havde de tre grupper ingen betegnelse og var altså ikke ordnede, dvs. vi har talt hver kombination med $3! = 6$ gange. Der er dermed $\frac{34650}{6} = 5775$ måder at dele klassen på.

Opgave 1.16. En kube er sammensat af $3 \times 3 \times 3$ små enhedskuber. På hvor mange måder kan man komme fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne, når man kun må gå langs kanterne af enhedskuberne og skal vælge en rute der er så kort så mulig?

Opgave 1.17. I en urne ligger ni bolde nummereret $1, 2\ldots, 9$. Tre personer trækker tilfældigt tre bolde hver. Hvad er sandsynligheden for at de alle får en ulige sum når de lægger deres tre boldes numre sammen?

Opgave 1.18. Vis at $\big((mn)!\big)^2$ er delelig med $(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}$ for alle positive hele tal n og m. (*Hint*)

2 Pascals trekant og binomialkoefficienter

Binomialkoefficienterne $\binom{n}{r}$ viser sig at kunne frembringes på en interessant måde, og for at vise dette har vi behov for følgende formel.

Sætning 2.1. Lad n og k være ikke negative heltal med $n \geq k$. Da er

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bevis Hvis man skal udtage $k+1$ elementer ud af $n+1$, kan man enten udtage $k+1$ ud af de n første af de $n+1$ elementer, eller man kan udtage k elementer blandt de n første samt udtage det sidste ud af de $n+1$ elementer. Dermed er

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bemærk at man når frem til lighedstegnet ved at tælle det samme på to forskellige måder. Dette er en meget anvendelig metode når man fx skal vise at to udtryk er lig hinanden, men mere om det i et senere afsnit.

Alternativt kan man også blot regne, men det er ikke helt så elegant:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\big((n-k)+(k+1)\big) \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Pascals trekant 2.2. Binomialkoefficienterne kan derfor opstilles i det man kalder Pascals trekant så en binomialkoefficient hele tiden er summen af de to ovenfor:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & & \\
 & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & & \\
 & & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & \\
 & & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & & \\
 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} & \\
\binom{8}{0} & & \binom{8}{1} & & \binom{8}{2} & & \binom{8}{3} & & \binom{8}{4} & & \binom{8}{5} & & \binom{8}{6} & & \binom{8}{7} & & \binom{8}{8}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Binomialformlen 2.3. Lad n være et ikke negativt heltal. Da er

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Det er denne sammenhæng der skyldes at binomialkoefficienter hedder binomialkoefficienter. Et *binom* er en to-leddet størrelse, og binomialkoefficienterne er dermed netop koefficienterne der fremkommer når man tager en potens af en to-leddet størrelse.

Bevis Når man ganger $(x+y)^n$ ud, får man netop $x^{n-k}y^k$ ved at gange x'et fra $n-k$ af parenteserne med y'et fra de resterende k parenteser. Dette kan man gøre på $\binom{n}{k}$ måder.

Sætning 2.4. Lad n være et ikke negativt heltal. Da er

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Bevis Ifølge binomialformlen er

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Sættes $x = y = 1$ fås

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Rigtig mange sammenhænge om binomialkoefficienter kan vises ved at se på koefficienter i polynomier.

I dette tilfælde og mange andre med binomialkoefficienter kan man også benytte tricket med at tælle det samme på to forskellige måder, da begge sider af lighedstegnet angiver antallet af delmængder af en mængde med n elementer: Vi har tidligere set at der findes netop 2^n delmængder af en mængde med n elementer. Man kan også tælle delmængderne ved at summere antal delmængder med henholdsvis $0, 1, \ldots, n$ elementer, og det er netop det der står på højresiden.

Sætning 2.5. Der gælder desuden følgende om binomialkoefficienter:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

c) $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$

d) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

e) $\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n} = 2^{2n}$

f) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

g) For et primtal p er $\binom{p}{k}$ delelig med p for $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Opgave 2.1. Vis sætningen

3 Skillevægge

Binomialkoefficienterne fortæller på hvor mange måder man kan udtage r elementer ud af n elementer. Man kan også med binomialkoefficienter lave en formel for på hvor mange måder man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse. Da objekterne er ens, er det lige meget hvilke der havner i hvilke bokse; det interessante er kun hvor mange der er i hver boks.

Sætning 3.1. Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

måder, hvis nogle af boksende gerne må være tomme.

Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på

$$\binom{n-1}{m-1}$$

måder, hvis alle bokse skal indeholde mindst et objekt.

Bevis Sæt de n objekter op på en række. At fordele dem i m nummererede bokse svarer til at sætte $m-1$ skillevægge op i rækken, så man putter objekterne før den første skillevæg i første boks osv. Det svarer til at fordele n objekter og $m-1$ skillevægge på en række med $n+m-1$ pladser, hvilket kan gøres på

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

måder.

Opgave 3.1. Bevis sidste del af sætningen hvor alle bokse skal indeholde mindst et objekt.

Sætning 3.2. Sætning 3.1 er ækvivalent med:

Antallet af m-tuppler $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, hvor x_i er et ikke-negativt heltal, og hvor $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, er

$$\binom{n+m-1}{m-1}.$$

Antallet af m-tuppler $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, hvor x_i er et positivt heltal, og hvor $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, er

$$\binom{n-1}{m-1}.$$

Eksempel 3.3. I et supermarked er der fem forskellige slags slikposer. Når man skal udregne på hvor mange måder man kan vælge ti slikposer, kan man bruge sætning 3.1. Det svarer nemlig til at fordele ti objekter i fem nummererede bokse der hver repræsenterer en bestemt slags slikpose, dvs. ifølge sætningen er der $\binom{10+5-1}{5-1} = 1001$ måder at vælge på.

Eksempel 3.4. I en isbutik sælger de vaffelis med op til fem kugler, og de har vanille-, jordbær- og chokoladeis. Når man skal udregne hvor mange forskellige vaffelis man kan lave, kan man bruge sætningen om at fordele n objekter i m bokse. Vi antager at kuglernes rækkefølge er underordnet. Antallet af vaffelis svarer nu til at fordele fem kugler i fire bokse hvor den ene boks repræsenterer vanille, den anden jordbær, den tredje chokolade og den fjerde ingenting. På denne måde får man alle kombinationer inklusiv den uden kugler. Hvis man trækker den fra, er der derfor

$$\binom{5+4-1}{4-1} - 1 = \binom{8}{3} - 1 = 55$$

forskellige kombinationer.

Opgave 3.2. I et supermarked er der fem forskellige slags slikposer at vælge imellem, men supermarkedet har kun seks poser tilbage af tre af slagsene samt syv poser af de to sidste slags. Vis at man kan vælge ti slikposer på 866 måder.

Opgave 3.3. Vis at der er netop 462 måder at lægge ti 2-kroner og seks 5-kroner på en række så der mellem to 5-kroner ligger mindst en 2-krone. (*Hint*)

Opgave 3.4. På hvor mange måder kan man vælge ti ikke-negative heltal $x_1, x_2 \ldots, x_{10}$ så deres sum højst er 100? (*Hint*)

Opgave 3.5. En skat på 50 guldstykker skal fordeles mellem seks pirater. De beslutter sig for at skrive alle kombinationer ned, hvor ingen får mere end halvdelen af guldstykkerne, og alle får mindst fire guldstykker, og derefter trække lod blandt disse kombinationer. Det tager piraterne et minut at skrive en kombination ned. Hvor lang tid tager det dem at skrive samtlige kombinationer ned? (*Hint*)

Opgave 3.6. Vis at antallet af binære tal med n cifre der har netop m blokke af formen 01, er $\binom{n}{2m+1}$ (Husk at et binært tal har 1 som første ciffer). (*Hint*)

Opgave 3.7. En mængde består af samtlige 12-cifrede tal som blandt de 12 cifre har netop fem 1-taller, fire 2-taller og tre 3-taller. Vis at hvis man trækker et tilfældigt tal fra mængden, da er sandsynligheden for at få et tal som har mindst to 1-taller i træk, lig med $\frac{92}{99}$. (*Hint*)

Opgave 3.8. I et lottospil udtrækkes syv tal ud af 36. Man kan som bekendt vælge de syv tal på $\binom{36}{7} = 8.347.680$ måder. Vis at mere end $\frac{3}{4}$ af disse kombinationer indeholder to nabotal. (*Hint*)

Opgave 3.9. I et ringspil er der ti ringe i forskellige farver samt fem forskellige målpinde til at kaste efter. Vis at antallet af forskellige slutkonfigurationer med syv ringe på målpindene og tre ringe i græsset er $\frac{11!10!}{4!7!3!} = 199.584.000$. (Bemærk at hvis flere ringe er på samme målpind, kan de ligge i forskellig rækkefølge på pinden.) (*Hint*)

4 Tælle på to måder

Tidligere i noterne så vi flere gange at man kan vise nogle formler hvori der indgår binomialkoefficienter, ved at tælle på to måder.

Eksempel 4.1. Formlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m}$$

kan let vises ved at tælle på to måder, mens det er langt mere krævende hvis man begynder at omskrive binomialkoefficienterne.

Tallet $\binom{n+m}{m}$ angiver på hvor mange måder man kan fordele n ens kugler i $m+1$ kasser. Man kan også tælle dette på følgende måde: Når der er $n-k$ kugler i den første boks, kan man fordele de k resterende kugler i de m resterende bokse på $\binom{k+m-1}{m-1}$ måder. Når man summerer dette, får man netop venstresiden af lighedstegnet.

Eksempel 4.2. Formlen

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

kan også vises ved at tælle på to måder.

Vi benytter nu to forskellige metoder til at tælle på hvor mange måder man kan nedsætte et udvalg med en formand når der er n personer at vælge imellem, og udvalget skal bestå af mellem en og n personer:

Metode 1: Først er der n muligheder for at vælge formanden. Derefter skal man for de $n-1$ resterende beslutte om de er med eller ej. Dette kan samlet gøres på $n2^{n-1}$ måder.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k måder at vælge formanden på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. Dermed er formlen vist.

Vandermonde identiteten 4.3. Lad n, m og k være ikke-negative hele tal. Da er

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

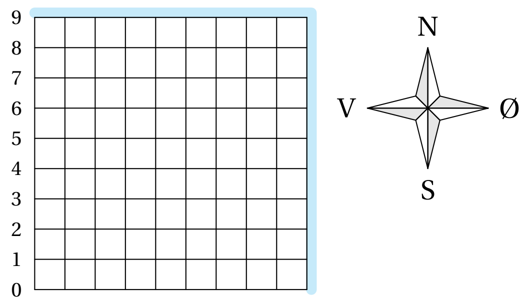
Opgave 4.1. Vis sætningen.

Opgave 4.2. Vis formlerne

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \text{ og } \sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

(*Hint*)

Opgave 4.3. **a)** I en by er der et vejnet som danner et kvadrat med $n+2$ veje nord-syd og $n+2$ veje øst-vest, $n \geq 2$. Langs den nordligste og den østligste vej løber en flod. Vejene nummereres $0, 1, 2, \ldots, n+1$ fra vest mod øst, og fra syd mod nord. Ane starter i det sydvestlige hjørne af vejnettet, dvs. i $(0,0)$. Hun vil ned til floden og går på følgende måde. Først slår hun plat og krone. Hvis det bliver krone, går hun mod nord til næste vejkryds, og hvis det bliver plat går hun mod øst til næste vejkryds. Sådan fortsætter hun til hun når den nordligste eller den østligste vej ved floden, dvs. indtil hun første gang når en af de to veje med nummer $n+1$.



Eksempel med $n = 8$

Vi at sandsynligheden for at hun når floden i krydset $(3, n+1)$, er

$$\binom{n+3}{3}\frac{1}{2^{n+4}}.$$

b) Vis formlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{k+n}} = 1.$$

Opgave 4.4. Vis at

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}.$$

(*Hint*)

Opgave 4.5. Lad $F(n,r)$ betegne gennemsnittet af mindste-elementerne i samtlige delmængder af $\{1, 2, \ldots, n\}$ med r elementer.
Vis at

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

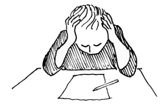
(IMO 1981)

Opgave 4.6. Vis at

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

ved at tælle på to måder. (*Hint*)

Opgave 4.7. I en konkurrence er der a deltagere og b dommere, hvor $b \geq 3$ er et ulige tal. Hver dommer bedømmer om hver deltager har bestået eller er dumpet. Antag et k er et tal så der for to vilkårlige dommere gælder at deres bedømmelse højst stemmer overens for k deltagere. Vis at $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$. (IMO 1998) (*Hint*)



5 Mere om binomialkoefficienter

I dette kapitel fokuserer vi på hvordan man regner med binomialkoefficienter. Som udgangspunkt har vi de sammenhænge om binomialkoefficienter som allerede er vist i kapitel 2 samt Vandermonde identiteten fra kapitel 4.

Eksempel 5.1. Vi ønsker at vise at

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

for alle positive heltal n. Dette svarer blot til Vandermonde identiteten

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i},$$

hvor $m=n=k$, da $\binom{m}{m-i}=\binom{m}{i}$.

Opgave 5.1. Lad p være et ulige primtal. Vis at

$$\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod{p}.$$

Opgave 5.2. Lad n være et positivt heltal. Vis at

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2=n\binom{2n-1}{n-1}.$$

(*Hint*)

Opgave 5.3. Lad n og m være positive heltal hvor $m<n$. Vis at

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=0.$$

(*Hint*)

Eksempel 5.2. Der er mange interessante sammenhænge mellem binomialkoefficienter og andre matematiske fænomener. Her skal vi se en sammenhæng til Fibonaccitallene.

Lad $F_1, F_2, \ldots$ være Fibonaccitallene. ($F_1=F_2=1$ og $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ for $n\geq 0$). Vi ønsker at vise at

$$F_{n+2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k}$$

for alle ikke-negative heltal n.

For at opnå denne sammehæng, er det smart at benytte induktion efter n bl.a. fordi Fibonaccitallene er defineret rekursivt. For $n=0$ er $\sum_{k=0}^{0}\binom{1-k}{k}=\binom{1}{0}=1=F_2$, og for $n=1$ er $\sum_{k=0}^{1}\binom{1+1-k}{k}=\binom{2}{0}+\binom{1}{1}=2=F_3$. Antag at

$$F_{n+2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k}$$

for alle ikke-negative heltal $n<N$. For at udnytte induktionsantagelsen benyttes den helt grundlæggende sammenhæng mellem binomialkoefficienter (sætning 2.1) som siger at $\binom{m}{r}=\binom{m-1}{r}+\binom{m-1}{r-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\binom{N+1-k}{k} &= \sum_{k=0}^{N}\binom{(N-1)+1-k}{k}+\sum_{k=0}^{N}\binom{(N-1)+1-k}{k-1}\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\binom{(N-1)+1-k}{k}+\binom{0}{N}\\
&\quad +\sum_{k=1}^{N-1}\binom{(N-1)+1-k}{k-1}+\binom{N}{-1}+\binom{0}{N}\\
&= F_{N+1}+\sum_{k=0}^{N-2}\binom{(N-2)+1-k}{k}\\
&= F_{N+1}+F_N=F_{N+2}.
\end{aligned}$$

Dermed er induktionen fuldført.

Opgave 5.4. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

for alle positive heltal n.

Opgave 5.5. Lad n være et positivt heltal. Vis at

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{i}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i}.$$

(*Hint*)

6 Rekursion

Når vi i matematik beskriver tallene i en følge rekursivt, betyder det at vi beskriver det næste tal i følgen vha. de foregående. Fx er Fibonaccitallene $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ beskrevet rekursivt da $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med $F_1 = 1$ og $F_2 = 1$. Dette kan bruges til at tælle antallet af forskellige ting.

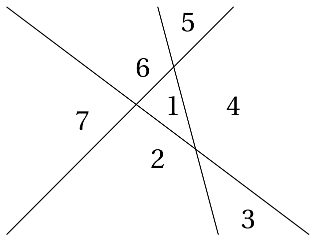
Eksempel 6.1. Et klassisk eksempel på rekursion er tårnene i Hanoi. Her er der n ringe i forskellig størrelse. Desuden er der et bræt med tre pinde. Til at starte med ligger alle ringene på den venstre pind med den største nederst, derefter den næststørste, osv. Man må flytte ringene en ad gangen fra en pind til en anden, men man må aldrig lægge en større ring oven på en mindre ring. Vi ønsker nu at bestemme hvor mange ringe der mindst skal flyttes for at flytte samtlige ringe over på den højre pind.

Tårnene i Hanoi, $n = 6$.

Kald dette antal S_n. Det er klart at $S_1 = 1$. For at flytte den største ring fra højre til venstre pind skal alle de andre ringe først flyttes hen på den midterste pind. Det kan gøres på S_{n-1} træk, men ikke færre. Derefter kan vi flytte den største ring fra venstre til højre pind, og vi skal herefter flytte de $n-1$ ringe fra midterste pind til venstre pind før vi er i mål. Det kan gøres på S_{n-1} træk, men ikke færre. Dermed er $S_n = 2S_{n-1} + 1$.

Vi har nu beskrevet S_n rekursivt, men vi ønsker en lukket formel for S_n. Ud fra rekursionen er det nemt at få en idé om at $S_n = 2^n - 1$, og dette kan let vises let ved induktion efter n når vi har rekursionsformlen.

Opgave 6.1. I planen tegnes n rette linjer sådan at der ikke findes to som er parallelle, og så der ikke er tre linjer som skærer hinanden i samme punkt. Bestem antallet a_n af områder som linjerne inddeler planen i.



Eksempel med $n = 3$ hvor $a_3 = 7$

Eksempel 6.2. I et sprog er der to bogstaver i alfabetet, A og B. Et ord er en række bogstaver hvor to nabobogstaver aldrig begge er b. Vi ønsker at bestemme antallet af ord med n bogstaver. For at gøre dette laver vi en dobbeltrekursion. Lad a_n være antallet af ord af længde n som slutter på A, og lad b_n være antallet af ord af længde n som slutter på B. Da er $a_1 = 1$ og $b_1 = 1$. Desuden er

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \quad \text{og} \quad b_n = a_{n-1}.$$

Dermed er

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2},$$

og a_n er derfor lig med det $n+1$'te fibonaccital F_{n+1}, mens $b_n = a_{n-1}$ er lig med det n'te fibonaccital F_n. Altså er det samlede antal ord O_n af længde n lig med $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Nu har vi beskrevet antallet rekursivt og kan fx udregne antallet af ord på 8 bogstaver ved først at udregne $O_1, O_2, \ldots, O_7$. Det er helt fint hvis vi ønsker at bestemme antallet for et lille n, men ikke hvis vi fx vil bestemme O_{1000}. Der er det smartere med en lukket formel.

Opgave 6.2. På hvor mange måder kan man farve nogle af felterne på et 2×8-bræt sorte når to felter der har en kant til fælles, ikke begge må være sorte?

Sætning 6.3. Hvis følgen $a_0, a_1, \ldots$ opfylder den lineære rekursionsformel

$$a_n = p a_{n-1} + q a_{n-2},$$

og r_1 og r_2 er rødderne i $x^2 - px - q = 0$, da er både $a_n = r_1^n$ og $a_n = r_2^n$ løsninger til rekursionensformlen, og det er enhver linearkombination også:

$$a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n.$$

Bevis Det ses nemt ved indsættelse at $a_n = r_1^n$, $a_n = r_2^n$ og enhver linearkombination $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ er løsning.

Eksempel 6.4. Hvis vi vender tilbage til eksemplet fra før med rekursionsformlen $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$ og $F_1 = 1$, kan vi bruge sætningen til at finde en lukket formel for F_n. Rødderne i $x^2 - x - 1 = 0$ er $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dermed er

$$F_n = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

løsning til selve rekursionsformlen. Hvis vi kan finde konstanter A og B sådan at formlen passer for F_1 og F_2, er vi derfor i mål. Ved at løse ligningerne

$$0 = F_0 = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^0 + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^0 \quad \text{og} \quad 1 = F_1 = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^1 + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^1$$

og omskrive, fås den såkaldte Binets formel for fibonaccitallene:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Opgave 6.3. Georg bygger tårne af klodser. Han har røde $1\times1\times1$ klodser, og så har han $1\times1\times2$ klodser i seks forskellige farver. Bestem en lukket formel for hvor mange forskellige $1\times1\times n$ tårne han kan bygge.

Opgave 6.4. Et $2\times n$-bræt består af $2n$ enhedskvadrater og skal udfyldes med 1×2 og 2×2-brikker. Bestem en lukket formel for antallet a_n af måder hvorpå det kan gøres.

Opgave 6.5. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2\times n$-bræt sorte, når to felter der har en kant til fælles, ikke begge må være sorte. Bestem en lukket formel for a_n. (Tip: For ikke at få alt for besværlige udregninger er det en god idé at tage udgangspunkt i a_0 og a_1 i stedet for fx a_1 og a_2.)

Opgave 6.6. Bestem en lukket formel for antallet af n-cifrede tal der kun indeholder cifrene $1,2,3,4,5$, og hvor to på hinanden følgende cifre altid har differens ±1.

Opgave 6.7. På hvor mange måder kan man farvelægge en række af 16 stole så hver stol bliver enten rød eller grøn, og længden af hver ensfarvet sekvens af stole er ulige? (Baltic Way 2014)

Opgave 6.8. Et $2\times n$-bræt består af $2n$ enhedskvadrater. Antallet af måder hvorpå man kan farve nogle af felterne røde uden at der opstår et rødt 2×2-kvadrat, kaldes C_n. Det største tal k så 3^k går op i C_n, kaldes k_n. Bestem k_{2019}.

Opgave 6.9. Betragt mængden $S_n=\{1,2,\dots,n\}$. Antallet af delmængder af S_n som ikke indeholder to på hinanden følgende tal, og som har netop k elementer, betegnes $A_{(n,k)}$. Bestem en lukket formel for $A_{(n,k)}$.

Opgave 6.10. Lad n være et positivt helt tal. I Albertslund er der n piger og n drenge. Tallet $A(n,r)$ angiver på hvor mange måder man kan vælge r piger og r drenge og fordele dem i r par med en dreng og en pige i hvert. I Brøndby er der n piger $p_1,p_2,\dots,p_n$ og $2n-1$ drenge $d_1,d_2,\dots,d_{2n-1}$. Tallet $B(n,r)$ angiver på hvor mange måder man kan vælge r piger og r drenge og fordele dem i r par med en dreng og en pige i hvert, med den ekstra betingelse at pigen p_i kun kan danne par med $d_1,d_2,\dots,d_{2i-1}$ for $i=1,2,\dots,n$. Vis at $A(n,r)=B(n,r)$, og find en lukket formel for disse. (Inspireret af opgave fra IMO shortlist 1997)

7 Princippet om inklusion og eksklusion. PIE

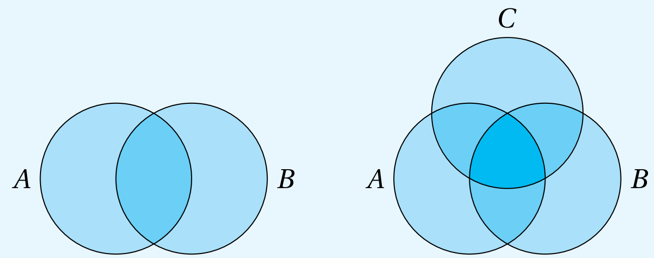
I nogle situationer har man behov for at tælle antallet af elementer i en foreningsmængde, og det kan man benytte princippet om inklusion og eksklusion til, også kaldet PIE.

Eksempel 7.1. Hvis man skal bestemme antallet af elementer i foreningsmængden mellem to mængder A og B, ses det nemt ved et Venndiagram (figur nedenfor) at

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

Tilsvarende ses for tre mængder A, B og C at

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$



Man inkluderer med andre ord først alt det der er i A og i B og i C, men så har man inkluderet alt det de har tilfælles to gange hvis det ligger i to af mængderne, og tre gange hvis det ligger i alle tre mængder. Derfor ekskluderer man nu alt det der ligger i fællesmængden mellem A og B, fællesmængden mellem A og C samt fællesmængden mellem B og C. Nu har man sørget for at alt det der ligger i en eller to af mængderne er inkluderet præcis en gang. De elementer der ligger i alle tre mængder, har man imidlertid først inkluderet tre gange, men derefter ekskluderet tre gange, dvs. vi skal til slut inkludere disse elementer igen.

Dette kan generaliseres til følgende sætning:

Sætning 7.2. PIE - Princippet om inklusion og eksklusion Antallet af elementer i foreningsmængden mellem de n mængder $A_1, A_2, \dots, A_n$ kan beregnes således:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Bevis Formlen bevises ved at se på et element der indgår i præcis k af mængderne. Dette element er talt med

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1 - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = 1 - (1-1)^k = 1$$

gang. Altså er samtlige elementer talt med præcist én gang, og derfor er formlen korrekt.

Eksempel 7.3. Når vi benytter PIE, starter vi som regel med en grundlæggende mængde M som vi ønsker at tælle en delmængde af. Derefter konstruerer vi delmængder af M som tilsammen indeholder alt det vi ønsker at frasortere. Vi benytter altså igen den helt grundlæggende tællestrategi at tælle det der ikke opfylder den ønskede betingelse.

Hvis vi fx vil tælle antallet af tal i mængden $M = \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$ som hverken er delelige med 5 eller 7, så konstruerer vi $A_5 \subseteq M$ som indeholder alle tal fra M som er delelige med 5, og $A_7 \subseteq M$ som indeholder alle tal fra M som er delelige med 7. Svaret er dermed $|M| - |A_5 \cup A_7|$ som nemt kan tælles med PIE. Vi har

$$\begin{aligned} |M| - |A_5 \cup A_7| &= |M| - \left(|A_5| + |A_7| - |A_5 \cap A_7|\right) \\ &= 2018 - \left(\left\lfloor \frac{2018}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2018}{5 \cdot 7} \right\rfloor\right) \\ &= 2018 - \left(403 + 288 - 57\right) = 1384. \end{aligned}$$

Eksempel 7.4. PIE kan også bruges til at beregne på hvor mange måder man kan få øjensummen 21 ved et kast med 6 almindelige terninger. For at benytte PIE skal vi definere nogle mængder som vi gerne vil finde foreningsmængden af. I dette tilfælde betragter vi grundlæggende mængden

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21, x_i \in \mathbb{N}\},$$

der netop svarer til at skrive 21 som en ordnet sum af seks positive heltal. Problemet er selvfølgelig nu at vi kun ønsker de elementer fra M hvor $x_i \leq 6$. Derfor definerer vi

$$A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21, x_i > 6, x_i \in \mathbb{N}\}$$

for $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ da det på denne måde er nemt at tælle antallet af elementer i A_i samt fællesmængder af A_i'erne. Antal elementer i foreningsmængden $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ kan derfor tælles ved PIE og består netop af de summer hvor en af de seks summander er større end 6, altså alt det vi ønsker at frasortere. Antallet T af måder man kan få øjensummen 21 ved et kast med 6 almindelige terninger, er altså

$$\begin{aligned} T &= |M| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| \\ &= |M| - \Big(\sum_{1 \leq i \leq 6} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |A_i \cap A_j| + \cdots - |A_1 \cap \cdots \cap A_6| \Big). \end{aligned}$$

Antal elementer i M er $\binom{20}{5}$ ifølge sætning 3.2. Tilsvarende er $|A_i| = \binom{14}{5}$ da det svarer til at de seks tal har sum 15 når vi har trukket 6 fra x_i, og ligeledes $|A_i \cup A_j| = \binom{8}{5}$, $i \neq j$, da det svarer til at summen af de seks tal skal give 9 når vi har trukket 6 fra både x_i og x_j. Fællesmængden af tre eller flere af A_i'erne er tom da det ikke er muligt at tre eller flere af de seks tal er større end seks når summen er 21. Dermed er

$$T = \binom{20}{5} - \binom{6}{1}\binom{14}{5} + \binom{6}{2}\binom{8}{5} = 4332.$$

Eksempel 7.5. Man kan også benytte PIE til at tælle antallet af permutationer af tallene $1,2,\ldots,n$ der er fikspunktsfri, dvs. at intet tal afbildes på sig selv.

Der er i alt $n!$ permutationer af de n tal. Lad A_i være mængden af permutationer som fikserer elementet i. Antallet af fikspunktsfri permutationer P er da

$$P = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$\begin{aligned}P = n! - \Big(&\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|\Big).\end{aligned}$$

Antallet af permutationer som fikserer k bestemte tal, er $(n-k)!$, dvs.

$$\begin{aligned}P &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots (-1)^n \frac{1}{n!}\Big).\end{aligned}$$

Opgave 7.1. Benyt PIE til at tælle hvor mange af tallene i $M = \{1,2,3,\ldots,1000\}$ der hverken er delelige med 2, 3, 5 eller 7.

Opgave 7.2. Et telefonselskab har netop alle 8-cifrede telefonnumre $c_1c_2c_3 - c_4c_5c_6c_7c_8$ som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_4c_5c_6$, $c_1c_2c_3 = c_5c_6c_7$ eller $c_1c_2c_3 = c_6c_7c_8$. Cifrene $c_1, c_2, \ldots, c_8 \in \{0,1,\ldots,9\}$. Hvor mange telefonnumre har telefonselskabet?

Opgave 7.3. På hvor mange måder kan man vælge syv kort fra et almindeligt sæt spillekort med 52 kort så man har mindst et kort af hver af de fire kulører?

Opgave 7.4. Otte personer der danner par to og to, skal stilles på en række så ingen står ved siden af deres partner. På hvor mange måder kan det gøres?

Opgave 7.5. På hvor mange måder kan man udtage tre delmængder A, B og C af en mængde M med n elementer så $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ og $B \cap C \neq \emptyset$, mens $A \cap B \cap C = \emptyset$? (*Hint*)

Opgave 7.6. Lad n og k være positive hele tal. Vis at

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n+k-i)^n$$

(*Hint*)

Opgave 7.7. Lad S_{2n} være mængden af permutationer af tallene $1,2,3,\cdots,2n$. En permutation $\sigma \in S_{2n}$ siges at have egenskaben P hvis der findes et $i \in \{1,2,3,\cdots,2n-1\}$, så $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$. Vis at mere end halvdelen af alle permutationerne i S_{2n} har egenskaben P. (*Hint*)

8 Frembringende funktioner

Definition af frembringende funktioner 8.1. Lad $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ være en uendelig følge, hvor $a_i \in \mathbb{C}$. Den frembringende funktion associeret med A er da potensrækken

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Koefficienten til x^k i P betegnes fremover $[x^k]P(x)$ ligesom ved polynomier. To frembringende funktioner $P(x)$ og $Q(x)$ er ens netop hvis de er associeret med den samme følge, dvs. netop hvis $[x^k]P(x) = [x^k]Q(x)$ for alle $k = 0, 1, 2, \dots$. Bemærk at når vi har uendelige mange led, giver det ikke mening at indsætte et tal i stedet for x uden først at undersøge hvornår funktionen konvergerer. Vi kan lægge to frembringende funktioner sammen, trække dem fra hinanden og gange dem sammen på den oplagte måde. Hvis vi fx ganger $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ med $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$, så er

$$[x^n]P(x)Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Nu følger nogle eksempler på hvordan man kan bruge frembringende funktioner hvis man skal tælle noget. Der er en hel teori om frembringende funktioner, men her illustreres blot nogle grundlæggende teknikker til problemløsning.

I første omgang ser vi kun på frembringende funktioner associeret med følger hvor kun endeligt mange led er forskellige fra nul, dvs. almindelige polynomier. Idéen er som oftest at konstruere et polynomium, så det man gerne vil tælle, svarer til koefficienten til et bestemt led i polynomiet.

Binomialformlen 8.2. Vi har allerede i kapitel 2 set Binomialformlen

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n,$$

Denne formel er helt central når vi anvender polynomier som frembringende funktioner. Tidligere så vi hvordan man ved at sætte henholdsvis $x = 1, y = 1$ og $x = 1, y = -1$ fik

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = (1-1)^n = 0.$$

I stedet for at indsætte en værdi for x og y, vil vi her primært tælle ved at se på koefficienterne til forskellige led, men man kan også kombinere de to ting.

Eksempel 8.3. Vandermonde identiteten $\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{n+m}{k}$ (hvor m, n og k er ikke-negative heltal), som er præsenteret i kapitel 4, hvor der er lagt op til at vise den ved at tælle på to måder, kan også vises vha. frembringende funktioner. Det centrale her er at $\binom{m}{i}$ svarer til koefficienten til x^i i polynomiet $(1+x)^m$, og tilsvarende $\binom{n}{k-i}$ svarer til koefficienten til x^{k-i} i polynomiet $(1+x)^n$. Dermed er

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} &= \sum_{i=0}^{k}[x^i](1+x)^m \cdot [x^{k-i}](1+x)^n \\ &= [x^k](1+x)^{m+n} \\ &= \binom{n+m}{k}.\end{aligned}$$

Her havde vi en sammenhæng mellem binomialkoefficienter vi skulle vise, og derfor var sammenhængen med koefficienter i polynomier oplagt. Ofte skal man selv konstruere denne sammenhæng.

Eksempel 8.4. I et koordinatsystem kravler en myre A fra $(0,0)$ på følgende måde. Hvert minut bevæger den sig 1 op eller 1 til højre, hvor begge dele er lige sandsynligt. En anden myre B sidder i $(1000,600)$. Hvert minut bevæger den sig enten 1 ned eller 1 til venstre, hvor begge dele er lige sandsynlig. Hvor stor er sandsynligheden for at de to myrer mødes?

Der er 1600 skridt af længde 1 i alt mellem de to myrer, og da de tager et skridt af længde 1 i minuttet, må de mødes efter 800 minutter, hvis de overhovedet mødes. De felter de kan mødes i, er derfor $(800-k,k)$ for $k=0,1,2,\dots,600$. For at konstruere en frembringende funktion der illustrerer situationen, er det en god idé at tænke i valg. Hver gang en af myrerne tager et skridt, er der et valg.

Vi konstruerer nu en frembringende funktion som et produkt, hvor hver faktor i produktet repræsenterer de to valgmuligheder myren har.

For myren A bliver den frembringende funktion da polynomiet $(1+x)^{800}$, hvor 1 svarer til at A tager et skridt til højre, og x svarer til at A tager et skridt op, og hvor vi har 800 faktorer i alt, da der skal tages 800 valg.

For myren B konstruerer vi den samme frembringende funktion $(1+x)^{800}$, hvor vi lader 1 svare til et skridt til venstre og x svare til at B tager et skridt ned.

På denne måde er antallet af måder hvorpå A kan havne i punktet $(800-k,k)$, netop $[x^k](1+x)^{800}$, og antallet af måder hvorpå B kan havne i punktet $(800-k,k)$, netop $[x^{600-k}](1+x)^{800}$, da B skal gå præcis $600-k$ skridt ned ud af i alt 800 skridt for at ende i $(800-k,k)$. Altså er sandsynligheden for at de mødes

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=0}^{600}[x^k](1+x)^{800}\cdot[x^{600-k}](1+x)^{800}}{2^{800+800}} &= \frac{[x^{600}](1+x)^{800+800}}{2^{1600}}\\ &= \frac{\binom{1600}{600}}{2^{1600}}.\end{aligned}$$

Eksempel 8.5. Summen af en mængde af tal defineres som summen af tallene i mængden, og summen af den tomme mængde sættes til 0. Lad p være et primtal. Vi ønsker at bestemme hvor mange delmængder T af mængden $S=\{1,2,3,\cdots,p\}$ der har en sum som er delelig med p.

For at konstruere en frembringerfunktion der illustrerer alle de mulige delmængder af S, tænker vi igen i valg. Når vi udtager en delmængde, skal vi for hvert element vælge om det skal med eller ej. For elementet k kan vi derfor benytte faktoren $1+x^k$ hvor 1 repræsenterer at k ikke er med i delmængden, og x^k repræsenterer at k er med i delmængden. Dette valg har den fordel at eksponenten fortæller hvor meget k bidrager til summen af delmængden. Vores frembringende funktion bliver på denne måde

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^p).$$

Når man ganger produktet ud, fås 2^p led der netop repræsenterer de 2^p delmængder af S, så en delmængde med sum s repræsenteres af x^s. Antallet af delmængder med sum s er derfor koefficienten til x^s i f. Antallet af delmængder med en sum der er delelig med p, er altså summen af koefficienterne til $x^0, x^p, x^{2p},\dots$. Det er ikke helt ligetil at udregne disse, og for at gøre det smart benyttes den komplekse p'te enhedsrod.

Lad ξ være den p'te enhedsrod. Da er $\xi^r=1$, $r=1,2,\dots$, netop hvis $p\mid r$. Vi ved at ξ er rod i

$$(x^{rp}-1)=(x^r-1)(1+x^r+x^{2r}+\cdots+x^{(p-1)r}).$$

Dette giver samlet at

$$1+\xi^r+\xi^{2r}+\xi^{3r}+\cdots+\xi^{(p-1)r}=\begin{cases}0 & \text{hvis } p\nmid r\\ p & \text{hvis } p\mid r.\end{cases}$$

Lad $a_n=[x^n]f(x)$. Da er

$$\sum_{i=0}^{p-1} f(\xi^i) = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_n a_n \xi^{ni} = \sum_n a_n \sum_{i=0}^{p-1} \xi^{ni} = \sum_{p|n} p a_n = p\sum_{p|n} a_n.$$

Antallet A_p af delmængder af S med en sum der er delelig med p, er dermed

$$A_p = \frac{f(1)+f(\xi)+f(\xi^2)+\cdots+f(\xi^{p-1})}{p}.$$

Bemærk at vi for at nå frem til at summen af alle koefficienterne i et polynomium f, hvis indeks er deleligt med k, er givet ved højresiden, endnu ikke har benyttet primtalsegenskaben for p, men kun at p er et positivt heltal, samt at vi kun har benyttet at f er et polynomium, ikke hvilket polynomium. Dette resultat gælder altså for et vilkårligt positivt heltal p og et vilkårligt polynomium f.

For at bestemme den konkrete sum, betragter vi

$$g(x) = x^p - 1 = (x-\xi)(x-\xi^2)\cdots(x-\xi^p).$$

Hvis p er ulige, har vi

$$-2 = g(-1) = (-1-\xi)(-1-\xi^2)\cdots(-1-\xi^p) = -f(\xi),$$

og altså $f(\xi)=2$. For $i=2,3,\cdots,p-1$, er $\{\xi,\xi^2,\cdots,\xi^p\} = \{\xi^i,\xi^{2i},\cdots,\xi^{pi}\}$ da p er et primtal, dvs. $f(\xi^i)=f(\xi)$. Altså er

$$A_p = \frac{f(1)+f(\xi)+f(\xi^2)+\cdots+f(\xi^{p-1})}{p} = \frac{2^p+2(p-1)}{p} \text{ for ulige primtal } p.$$

Hvis $p=2$, er det nemt at se at $A_2=2$.

I eksemplet beviste vi følgende sætning som er rigtig anvendelig når man vil udregne summen af hver k'te koefficient i et polynomium.

Sætning 8.6. Lad m og k være positive heltal, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ og ξ den k'te enhedsrod. Da kan vi bestemme summen af alle koefficienterne i f, hvis indeks er deleligt med k, på følgende måde:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} a_{ik} = \frac{f(1)+f(\xi)+f(\xi^2)+\cdots+f(\xi^{k-1})}{k}.$$

Konvergens 8.7. Nu skal vi se et eksempel hvor vi får brug for en frembringerfunktion associeret med en følge hvor uendeligt mange led ikke er nul, og hvis vi gerne vil omskrive potensrækken, bliver vi nødt til først at overveje spørgsmålet om konvergens. Her er nogle eksempler som kan være gode at kende. Betragt først potensrækken

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \text{ når } |x|<1,$$

er

$$f(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}, \text{ når } |x|<1.$$

Man kan tilsvarende vise at

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-x^k}, \text{ når } |x|<1. \\ f(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^2 \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ når } |x|<1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\binom{m+1}{m}x+\binom{m+2}{m}x^2+\binom{m+3}{m}x^3+\cdots \\ &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)^{m+1} \\ &= \frac{1}{(1-x)^{m+1}}, \text{ når } |x|<1. \end{aligned}$$

Dette er blot et lille bitte udvalg.

Eksempel 8.8. Lad $s(n)$ betegne antallet af måder at skrive n som en sum af positive heltal, hvor hvert tal højst må indgå en gang. Lad $t(n)$ betegne antallet af måder at skrive n som en sum af ulige positive tal. Fx er $s(5)=t(5)=3$ da der er følgende kombinationer

$$5,\ 4+1,\ 3+2 \quad \text{og} \quad 5,\ 3+1+1,\ 1+1+1+1+1$$

Vi vil nu vise at $s(n)=t(n)$ for alle positive heltal n.

For at konstruere en frembringende funktion der illustrer alle mulige summer af positive heltal, hvor hvert tal højst indgår en gang, tænker vi igen i valg. For hvert tal k skal vi beslutte om k skal med i summen eller ej. Dette valg kan repræsenteres af faktoren $1+x^k$, hvor 1 svarer til at k ikke er med i summen, mens x^k svarer til at k er med i summen. Som i eksemplet før opnår vi på denne måde at vi i eksponenten holder styr på hvor meget k bidrager til summen. En anvendelig frembringerfunktion for $s(n)$ er altså

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots.$$

Bemærk at dette giver mening da alle koefficienter er endelige. Antallet $s(n)$ af måder at skrive n som en sum af forskellige positive heltal er nu

$$s(n)=[x^n]f(x).$$

For $t(n)$ er det en lille smule mere kompliceret at konstruere en frembringerfunktion. Her må summen kun bestå af ulige positive heltal, men de må til gengæld indgå lige så mange gange det skal være. Dvs. for hvert ulige tal k skal vi vælge hvor mange gange k skal indgå i summen. Dette kan repræsenteres ved faktoren $1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots$ i frembringerfunktionen. En mulig frembringerfunktion for $t(n)$ er dermed

$$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots.$$

Bemærk igen at dette giver mening da alle koefficienter er endelige. Her er

$$t(n)=[x^n]g(x).$$

At $s(n)=t(n)$ svarer nu til at vise at $[x^n]f(x)=[x^n]g(x)$ for alle $n=1,2,3,\ldots$, og dermed til at f og g er identiske evt. på nær konstantleddet. Vi omskriver nu f og g, men først bliver vi nødt til at overveje spørgsmålet om konvergens. For $|x|<1$, er det kendt at

$$1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots=\frac{1}{1-x^k}.$$

Vi kan nu omskrive f og g på følgende måde under antagelse af at $|x|<1$.

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots \\ &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\cdots. \\ f(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \\ &= \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^4}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^6}{1-x^3}\right)\cdots \\ &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\cdots. \end{aligned}$$

Hermed er $f(x)=g(x)$, og altså $s(n)=t(n)$ for alle $n=1,2,3,\cdots$.

Opgave 8.1. Astrid slår plat og krone 2011 gange, Bertram og Cecil slår plat og krone 2012 gange, og David slår plat eller krone 2013 gange. Vis at sandsynligheden for at Astrid og David får krone samme antal gange, er den samme som at Bertram får krone netop en gang mere end Cecil. Bestem desuden denne sandsynlighed.

Opgave 8.2. Vis at

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-2k}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}=\binom{4n}{2n}$$

for alle positive hele tal n.

Opgave 8.3. En myre kravler langs x-aksen i et koordinatsystem. Hvert minut går den enten en til højre, en til venstre eller bliver stående og glor. Der er lige stor sandsynlighed for at den bliver stående som at den bevæger sig, og hvis den bevæger sig, er sandsynligheden for at den går til højre, den samme som for at den går til venstre. Hvis den starter i $x=0$, hvad er så sandsynligheden for at den efter n minutter er ved $x=i$?

Opgave 8.4. Der er givet n mønter $M_1, M_2, \dots, M_n$ så sandsynligheden for at få krone med mønten M_i er $\frac{1}{2i+1}$. Hvis alle n mønter kastes, hvad er da sandsynligheden for at få krone med et ulige antal af de n mønter?

Opgave 8.5. Lad n være et positivt heltal, og lad a_n være antallet af polynomier med koefficienter i mængden $\{0,1,2,3\}$ og $P(2)=n$. Bestem a_n.

Opgave 8.6. Lad $a(n)$ betegne antallet af måder at skrive n som en sum af positive heltal hvor hver summand højst indgår tre gange. Fx er $a(5)=6$ da der er følgende kombinationer

$$1+1+1+2,\ 1+1+3,\ 1+2+2,\ 1+4,\ 2+3,\ 5.$$

Lad $b(n)$ betegne antallet af måder at skrive n som en sum af positive heltal hvor hver lige summand højst indgår en gang. Fx er $b(5)=6$ da der er følgende kombinationer

$$1+1+1+1+1,\ 1+1+1+2,\ 1+1+3,\ 1+4,\ 2+3,\ 5.$$

Vis at $a(n)=b(n)$ for alle positive heltal n.

Opgave 8.7. På hvor mange forskellige måder kan man få øjensummen 21 ved et kast med seks almindelige terninger? (Du skal tælle med frembringende funktioner og ikke med PIE).

Opgave 8.8. Bestem antallet af delmængder af mængden $\{1,2,3,\cdots,2007\}$ hvis sum er delelig med 17.

Opgave 8.9. Lad n være et positivt heltal. Vis at

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n+j}{j}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}2^k.$$

(*Hint*)

Opgave 8.10. Bestem antallet af tal med n cifre som kun består af cifrene 6, 7, 8 og 9, og som har rest 1 ved division med 3.

Opgave 8.11. Lad $\alpha(n)$ betegne antallet af måder at skrive n som en sum af 1 og 2-taller, hvor rækkefølgende af summanderne tæller. Fx er $\alpha(4)=5$ da der er følgende kombinationer

$$1+1+1+1,\ 1+1+2,\ 1+2+1,\ 2+1+1,\ 2+2.$$

Lad $\beta(n)$ betegne antallet af måder at skrive n som en sum af hele tal større end 1, hvor rækkefølgende af summanderne tæller. Fx er $\beta(6)=5$ da der er følgende kombinationer

$$2+2+2,\ 2+4,\ 4+2,\ 3+3,\ 6.$$

Vis at $\alpha(n)=\beta(n+2)$ for alle positive heltal n. (*Hint*)

Opgave 8.12. (IMO shortlist 1998) Den voksende følge $a_0, a_1, a_2, \dots$ af ikke-negative heltal opfylder at hvert ikke-negativt heltal n kan skrives entydigt på formen $n=a_i+2a_j+4a_k$, hvor i, j og k er ikke nødvendigvis forskellige ikke-negative heltal. Bestem a_{1998}. (*Hint*)

9 Hints

Opgave 1.13 b) Der er en bijektion mellem mængden af skæringspunkter og mængden af alle mængder der består af fire af polygonens hjørner. c) Tænk på at diagonalerne indtegnes en ad gangen, og at polygonen til at starte med kun består af et område. Hvor mange flere områder kommer der for hver gang man tegner en ny diagonal, i forhold til det antal skæringspunkter den danner med allerede indtegnede diagonaler? d) Tæl antallet af trekanter der har henholdsvis 3, 2, 1 eller 0 hjørner tilfælles med polygonen, hver for sig.

Opgave 1.14 Hvor mange delmængder findes der af en mængde med 10 punkter? Hvor mange af disse delmængder kan ikke associeres til en polygon?

Opgave 1.15 Kald antallet af sokker for n og antallet af røde sokker for r. Find et udtryk for sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve, og benyt dette til at bestemme r.

Opgave 1.18 Vis at $\frac{((mn)!)^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$ svarer til et antal kombinationer af noget og dermed er et helt tal.

Opgave 3.3 Stil de ti 2-kroner op på en række, og tænk på at 5-kronerne skal indsættes som skillevægge.

Opgave 3.4 Tænk på sætning 3.2 og eksempel 3.4.

Opgave 3.5 Fordel først fire guldmønter til hver pirat, og udregn derefter på hvor mange måder de resterende guldmønter kan fordeles uden bindingen om at ingen pirat må få mere end halvdelen. Træk bagefter de kombinationer fra hvor en pirat har fået mere end halvdelen.

Opgave 3.6 Sæt et 0 på det n-cifrede tal til slut, og betragt i stedet antallet af $n+1$-cifrede binære tal som starter med 1 og slutter på 0. Hvor mange skift mellem 1 og 0 skal der være, hvis der netop skal være m 01-blokke?

Opgave 3.7 Tæl i stedet de tal der ikke indeholder to 1-taller som nabotal.

Opgave 3.8 Tæl alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal, ved at betragte de udtrukne tal som skillevægge mellem de resterende 29 elementer eller før det første eller efter det sidste.

Opgave 3.9 Tæl først på hvor mange måder syv ens ringe kan fordeles på fem pinde. Overvej derefter for hver af disse kombinationer hvor mange kombinationer der er når man har ti ringe med forskellig farve, hvor syv skal fordeles på de syv forskellige positioner.

Opgave 4.2 a) Antal måder at vælge et udvalg med en formand og en referent ud af n personer. b) Antal måder at vælge et udvalg med en formand, en referent og en kasserer ud af n personer.

Opgave 4.4 Se på antallet af måder man kan udtage delmængder med $r+1$ elementer af mængden $\{1,2,\dots,n+1\}$ med fokus på det næstmindste element.

Opgave 4.6 Tæl antal måder at vælge x, y og z på så $x, y, z \in \{1,2,\dots,n+1\}$ med yderligere betingelser på x, y og z.

Opgave 4.7 Vurder antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse, på to forskellige måder.

Opgave 5.2 Brug Vandermonde identiteten.

Opgave 5.3 Vis at $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.

Opgave 5.5 Induktion efter n. Se på

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{i}} = 2^n\Big(\frac{1}{n+1}\Big(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{i}} + \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{i}}\Big)\Big),$$

og omskriv ved at ændre indeks i den ene sum.

Opgave 7.5 Tænk på at hvert af de n elementer skal ligge i netop en af følgende syv disjunkte mængder $M\backslash(A\cup B\cup C)$, $A\backslash(B\cup C)$, $B\backslash(A\cup C)$, $C\backslash(A\cup B)$, $(A\cap B)\backslash C$, $(A\cap C)\backslash B$ og $(B\cap C)\backslash A$, hvis $A\cap B\cap C=\emptyset$. Lad X være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap B=\emptyset$, osv.

Opgave 7.6 Betragt mængden

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_j \in \{1,2,3,\dots,n+k\}\},$$

og lad A_i, $i = 1,2,\dots,n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Opgave 7.7 Lad A_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i) = k$ og $\sigma(i+1) = k+n$ eller $\sigma(i) = k+n$ og $\sigma(i+1) = k$. Brug PIE, og vurder summen.

Opgave 8.9 Vis at begge sider er lig med $[x^n](2+x)^n(1+x)^n$.

Opgave 8.11 Benyt $f(x) = 1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + (x + x^2)^3 + \cdots$ og $g(x) = 1 + (x^2 + x^3 + \cdots) + (x^2 + x^3 + \cdots)^2 + \cdots$.

Opgave 8.12 Sæt $p(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots$. Udnyt at $p(x)p(x^2)p(x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

10 Løsningsskitser

Opgave 1.1 De 8×8 midterste perler kan vælges på 5^{64} måder da vi for hver af de 64 perler har fem valgmuligheder. Derudover kan farven på kanten vælges på fem måder. Der er altså samlet 5^{65} forskellige kombinationer.

Opgave 1.2 a) Det første ciffer må hverken være 0 eller 7, derfor er der otte valgmuligheder for det første ciffer. For hver af de næste seks cifre er der ni valgmuligheder. Derfor er der $8 \cdot 9^6$ syvcifrede tal som ikke indeholder cifferet 7.
b) Det første ciffer kan vælges på ni måder. Hvert af de følgende cifre kan vælges på ni måder, da de ikke må være identisk med det foregående. Dermed er der 9^{10} ticifrede tal som ikke indeholder to ens nabocifre.
c) Et tal er deleligt med 9 netop hvis tværsummen er det. For hvert af de første fem cifre er der ni valgmuligheder. Hvis tallet skal være deleligt med 9, er det sidste ciffer derimod entydigt fastlagt ud fra summen af de fem foregående. Dermed er der i alt 9^5 sekscifrede tal som er delelige med 9 og ikke indeholder cifferet 0.
d) Da det er meget nemmere at tælle de tal som ikke indeholder to ens nabocifre, gør vi i stedet det. Der er 4^8 ottecifrede tal som kun består af cifrene 1, 2, 3 og 4. Hvis vi tæller antallet af disse som ikke indeholder to ens nabocifre, så har vi fire muligheder for at vælge det første ciffer, og derefter tre muligheder for hvert af de næste. Dette giver $4 \cdot 3^7$. Der er altså $4^8 - 4 \cdot 3^7$ ottecifrede tal som indeholder to ens nabocifre og kun består af cifrene 1, 2, 3 og 4.

Opgave 1.3 Kald delmængden som indeholder 1, for A, delmængden som indeholder 2, for B og den sidste for C. Der er nu to muligheder for at placere tallet 3, da ingen mængde må indeholde to på hinanden følgende tal. Da dette gælder for alle de resterende tal, er der altså $2^{100-2} = 2^{98}$ forskellige måder at fordele tallene på. I en enkelt af disse kombinationer bliver mængden C dog tom, dvs. resultatet er $2^{98} - 1$.

Opgave 1.4 For at tælle på hvor mange måder man kan fordele de 20 kugler i de fire forskellige skåle så der findes en skål som indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2, tæller vi i stedet antallet af måder at fordele de 20 kugler i de fire forskellige skåle, og trækker antallet af kombinationer fra hvor der ikke findes en skål som indeholder to kugler hvis numre har en

differens på 1 eller 2. Der er i alt 4^{20} måder at fordele de 20 kugler på da vi for hver kugle har fire valgmuligheder. Hvis vi tæller antallet af disse kombinationer som ikke indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2, så har vi fire valgmuligheder for kugle nummer 1. Derefter er der tre valgmuligheder for kugle nummer 2 da den ikke må komme i samme skål som kugle nummer 1. For hver af de efterfølgende kugler er der netop to mulige skåle hvori de kan placeres, da de ikke må kommer i samme skål som nogle af de to foregående kugler. Dette giver $4 \cdot 3 \cdot 2^{18}$ kombinationer. Der er altså $4^{20} - 4 \cdot 3 \cdot 2^{18} = 2^{20}(2^{20} - 3)$ måder at placere de 20 kugler så der findes en skål der indeholder to bolde hvis numre har en differens på 1 eller 2.

Opgave 1.5 Først udregner vi mængden af ordnede par af delmængder (A, B) som ikke har nogen elementer tilfælles. Hvert element kan enten ligge i A, i B eller i ingen af de to mængder, dvs. at antallet af ordnede par (A, B) er 3^n. Der er netop et af disse tilfælde hvor A og B er identiske, tilfældet hvor de begge er tomme, dvs. antallet af ikke ordnede par af delmængder som ikke har nogen elementer tilfælles, er

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Opgave 1.6 Et firecifret tal der opfylder det ønskede, kan ikke indeholde cifferet 0, dvs. det består af netop fire af cifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, og det er entydigt bestemt ud fra valget af disse fire cifre. Dermed er der i alt $\binom{9}{4} = 126$.

Opgave 1.7 Udvalgets medlemmer kan vælges på $\binom{25}{5}$ måder, og derudover er der fem måder at vælge udvalgets formand på. Samlet er der derfor $5\binom{25}{5} =$ 265.650 muligheder for at nedsætte udvalget.

Opgave 1.8 Man kan vælge de to pars talværdier på $\binom{13}{2} = 78$ måder og talværdierne for de sidste to kort på $\binom{11}{2} = 55$ måder. Når talværdierne er bestemt, kan de to par hver vælges på $\binom{4}{2} = 6$ måder og de to andre kort på $\binom{4}{1} = 4$ måder. Der er altså i alt $\binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{4}{2}^2\binom{4}{1}^2 = 78 \cdot 55 \cdot 6^2 \cdot 4^2 = 2.471.040$ måder.

Opgave 1.9 Der er i alt $\binom{52}{4} = 270725$ kombinationer af fire kort fra et almindeligt sæt spillekort med 52 kort, og alle disse er lige sandsynlige. Antallet af disse som ikke indeholder et par, bestemmes: Der skal vælges fire blandt de 13 talværdier, og for hver af disse skal der vælges kulør. Dermed er der $\binom{13}{4}4^4 = 183040$ kombinationer med fire kort som ikke indeholder et par. Sandsynligheden for at de fire trukne kort ikke indeholder et par, er derfor $\frac{183040}{270725} = \frac{2816}{4165}$.

Opgave 1.10 Vi betegner vejkrydsene (a,b) så Jonatan står ved (0,0) og skal til (4,6), og det spærrede vejkryds betegnes (2,3). Jonatan skal gå fire gange op og seks gange til højre. Hvis man ser bort fra at det midterste vejkryds er spærret, kan dette gøres på $\binom{10}{4}$ måder. Nu trækker vi antallet af ruter gennem $(2,3)$ fra dette antal. Man kan komme fra $(0,0)$ til $(2,3)$ på $\binom{5}{2}$ måder, og tilsvarende fra $(2,3)$ til $(4,6)$ på $\binom{5}{2}$ måder. Dermed er det samlede antal ruter Jonatan kan vælge imellem,

$$\binom{10}{4} - \binom{5}{2}^2 = 210 - 100 = 110.$$

Opgave 1.11 Der er i alt $\binom{10}{3} = 120$ forskellige kombinationer af tre bolde. Ud af disse er der netop $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ med en bold af hver farve ifølge multiplikationsprincippet. Dermed er sandsynligheden $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.

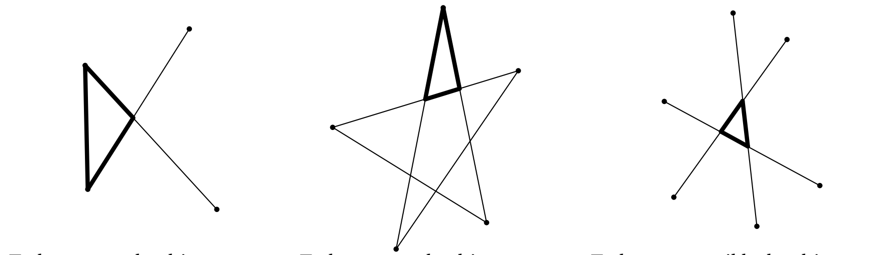
Opgave 1.12 Hvilke af de k søjler blandt de n der skal indeholde et tårn, kan vælges på $\binom{n}{k}$ måder. Tilsvarende kan man på $\binom{m}{k}$ vælge hvilke k blandt de m rækker der skal indeholde et tårn. Når man placerer et tårn i den første af de valgte søjler, skal man vælge et felt blandt felterne i de k udvalgte rækker. Når man derefter placerer et tårn i den næste valgte søjle, skal man vælge et felt blandt felterne på de $k-1$ resterende rækker der stadig mangler et tårn, osv. Dermed kan de k tårne placeres på

$$\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$$

måder.

Opgave 1.13 a) For hvert par af hjørner er der en diagonal, på nær hvis hjørnerne er nabohjørner. Da der er n par af nabohjørner, er der i alt $\binom{n}{2} - n$ diagonaler.

b) Hvert skæringspunkt mellem to diagonaler kan på entydig måde repræsenteres ved de fire hjørner som de to diagonaler forbinder. Dermed er der $\binom{n}{4}$ skæringspunkter mellem diagonaler.
c) For hver gang man tegner en ny diagonal, opstår der en del mere samt en del mere for hvert skæringspunkt denne diagonal danner med en anden diagonal. Der er $\binom{n}{2}-n$ diagonaler, dvs. at polygonen deles i $1+\binom{n}{2}-n+\binom{n}{4}$ dele.
d) Antallet af trekanter der har alle tre hjørner i polygonens hjørner, er $\binom{n}{3}$. Nu tæller vi trekanter der netop har et hjørne som ikke er et af polygonens hjørner, men en skæring mellem to diagonaler. For hver skæring mellem to diagonaler opstår der netop fire sådanne trekanter, dvs. der er $4\binom{n}{4}$.



Trekanter med to hjørner tilfælles med polygonen | Trekanter med et hjørne tilfælles med polygonen | Trekanter som ikke har hjørner tilfælles med polygonen

Trekanter som har et af polygonens hjørner samt to skæringer mellem diagonaler som hjørner, opstår ved at man vælger fem punkter, vælger et af punkterne som hjørne og tegner diagonalerne mellem de fem punkter, og der opstår kun en sådan trekant på denne måde, dvs. at der er $5\binom{n}{5}$ sådanne trekanter. Trekanter hvis hjørner kun består af skæringer mellem diagonaler, opstår ved at man vælger seks punkter og tegner tre diagonaler mellem dem på en sådan måde at de alle skærer hinanden, og dette kan gøres på netop en måde, dvs. der er $\binom{n}{6}$ af slagsen. I alt er der

$$\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+5\binom{n}{5}+\binom{n}{6}.$$

Opgave 1.14 Der er $2^{10}=1024$ delmængder af en mængde med 10 punkter. Alle delmængder der består af mindst tre punkter, svarer til en polygon og omvendt, dvs. antallet af polygoner er lig med antallet af delmængder med mindst tre elementer. Der er $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}=1+10+45=56$ af de 1024 delmængder der kun har 0, 1 eller 2 elementer. Derfor er der $1024-56=968$ polygoner i alt.

Opgave 1.15 Med n betegnes det samlede antal sokker, med r antallet af røde sokker. Da sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve er $\frac{1}{2}$, er sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve også $\frac{1}{2}$. Man kan trække to sokker af forskellig farve på $r(n-r)$ måder, og der er i alt $\binom{n}{2}$ måder at trække to sokker på. Altså er

$$\frac{r(n-r)}{\binom{n}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Denne relation mellem n og r er ensbetydende med at

$$4r^2-4nr+(n^2-n)=0,$$

som videre giver

$$r=\frac{n\pm\sqrt{n}}{2}.$$

Den størst mulige værdi for r er derfor givet ved

$$r=\frac{n_0\pm\sqrt{n_0}}{2},$$

hvor n_0 er det størst mulige kvadrattal mindre end eller lig med 1993. Ved udregning ses at $44^2\leq 1993<45^2$. Altså er $n_0=44^2$, og dermed fås $r=\frac{44^2+44}{2}=990$.

Opgave 1.16 Man skal gå langs ni sider i enhedskuberne, tre i hver af de tre retninger. Dvs. man kan vælge mellem $\binom{9}{3,3,3}=1680$ forskellige ruter.

Opgave 1.17 Der er $\binom{9}{3,3,3}$ forskellige måder de tre personer kan trække kuglerne på. De får alle en ulige sum netop hvis to af dem trækker to kugler med lige numre (overvej). Der er $\binom{3}{2}$ muligheder for at vælge de to personer der skal trække netop to kugler med lige numre. Derefter kan de fire kugler med lige numre fordeles blandt de to personer på $\binom{4}{2}$ måder. Kuglerne med ulige numre

kan nu fordeles på $\binom{5}{1,1,3}$ måder så alle har netop tre kugler. Sandsynligheden for at de alle får en ulige sum, er derfor

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{5}{3,1,1}}{\binom{9}{3,3,3}} = \frac{3}{14}.$$

Opgave 1.18 Antal måder hvorpå man kan vælge m hold med n deltagere på hver ud af nm personer, er $\frac{(nm)!}{(n!)^m m!}$ hvor $m!$ i nævneren skyldes at de m hold ikke nummereres. Tilsvarende kan man vælge n hold med m deltagere på hver på $\frac{(nm)!}{(m!)^n n!}$ måder. Altså er

$$\frac{(nm)!}{(n!)^m m!}\cdot\frac{(nm)!}{(m!)^n n!} = \frac{\big((nm)!\big)^2}{(n!)^{m+1}(m!)^{n+1}}$$

et helt tal for alle positive hele tal n og m, hvilket viser det ønskede.

Opgave 2.1 a), b) og c) følger direkte af formlen for $\binom{n}{k}$.
d) Benyt binomialformlen med $x = 1$ og $y = -1$:

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

e) Ved at benytte sætning 2.4 fås

$$2\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{2n+1}{i} + \binom{2n+1}{2n+1-i}\right) = \sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i} = 2^{2n+1}.$$

f) Ved at anvende b) og sætning 2.4 fås

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

g) Da $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$, må p gå op i $\binom{p}{i}$ for $i = 1,2,\ldots,p-1$ da p er en faktor i tælleren, men ikke i nævneren. (Husk at p er et primtal).

Opgave 3.1
Først fordeles en kugle i hver boks, og derefter fordeles de resterende $n-m$ kugler frit i de m bokse. Det kan gøres på $\binom{n-m+m-1}{m-1} = \binom{n-1}{m-1}$ måder.

Opgave 3.2 Hvis der ikke var begrænsninger, så vi i eksempel 3.3 at der var 1001 muligheder. Fra dette trækker vi antal muligheder hvor vi vælger syv eller flere af de tre slags der kun var seks af, eller otte eller flere af de to slags der kun var syv af. Vi kan vælge syv eller flere af en bestemt slags ved først at vælge syv af slagsen og derefter vælge tre poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$ måder. Vi kan vælge otte eller flere af en bestemt slags ved først at vælge otte af slagsen og derefter vælge to poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{2+5-1}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$ måder. I alt er der altså $1001 - 3\cdot 35 - 2\cdot 15 = 866$ kombinationsmuligheder.

Opgave 3.3 Hvis vi lægger de ti 2-kroner på række, er der 11 positioner hvor vi må lægge en 5-krone (en før, ni mellemrum, en efter), og vi skal lægge en 5-krone på netop seks af disse pladser. Dermed er der $\binom{11}{6} = 462$ muligheder. Bemærk at to rækker som kan spejles i hinanden ikke betragtes som ens.

Opgave 3.4 Ifølge sætning 3.2 kan man vælge 11 ikke-negative heltal $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ så deres sum er 100, på $\binom{110}{10}$ måder. Det svarer til at vælge 10 ikke-negative heltal $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ hvis sum højst er 100, dvs. dette kan også gøres på $\binom{110}{10}$ måder.

Opgave 3.5 Hvis alle skal have mindst fire guldstykker, er der 26 guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de seks pirater, og det kan gøres på $\binom{26+6-1}{6-1} = \binom{31}{5} = 169.911$ måder. For at få det ønskede antal, skal vi for hver pirat trække de kombinationer fra hvor hun har fået mere end 25 guldstykker. Hvis vi først giver fem pirater fire guldstykker hver og den sidste 26, er der fire guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de seks pirater. Det kan gøres på $\binom{4+6-1}{6-1} = \binom{9}{5} = 126$ måder. Dermed er der samlet $169.911 - 6\cdot 126 = 169.155$ kombinationer. Det tager piraterne 117 døgn 11 timer og 15 minutter at skrive samtlige kombinationer ned - så de får travlt!

Opgave 3.6 Binære tal har altid 1 som første ciffer. Vi tilføjer nu et 0 til sidst på samtlige binære tal med n cifre, da det ikke ændrer antallet af blokke af formen 01. Vi tæller altså nu antallet af binære tal med $n+1$ cifre hvis sidste ciffer er 0, og som har netop m blokke af formen 01. Da disse tal starter med 1, slutter på 0 og indeholder netop m skift fra 0 til 1, må de indeholde $m+1$ skift fra 1 til 0. Der er altså i alt $2m+1$ skift fra 0 til 1 eller 1 til 0. Da der er $n+1$ cifre, er der n mellemrum hvor disse $2m+1$ skift skal ske. Dermed er der $\binom{n}{2m+1}$ binære tal af denne type.

Opgave 3.7 Når vi skal tælle hvor mange 12-cifrede tal der opfylder noget bestemt, overvejer vi som sædvanligt om det i stedet er nemmere at tælle hvor mange af tallene der ikke opfylder det. Det er det i dette tilfælde, og derfor viser vi i stedet at sandsynligheden for at trække et tal der ikke indeholder to 1-taller i træk, er $\frac{7}{99}$. Der er $\binom{12}{5,4,3}$ tal i mængden. Nu tæller vi hvor mange af disse der ikke indeholder to 1-taller i træk. De syv cifre der ikke er 1-taller, kan stilles på række på $\binom{7}{3}$ måder da der blandt disse er fire 2-taller og tre 3-taller. Nu skal vi placere de fem 1-taller så der ikke er to ved siden af hinanden. Det svarer netop til at vælge fem af de otte mellemrum mellem de andre syv cifre (der er også et "mellemrum"før og efter), dvs. det kan gøres på $\binom{8}{5}$ måder. Sandsynligheden er derfor

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{8}{5}}{\binom{12}{5,4,3}} = \frac{\frac{7!8!}{3!4!3!5!}}{\frac{12!}{3!4!5!}} = \frac{7!8!}{3!12!} = \frac{7}{99}.$$

Opgave 3.8 Vi tæller alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal. Forestil dig 36 bolde på en lang række som repræsenterer de 36 tal. Vi skal nu vælge syv bolde hvoraf der ikke må være to ved siden af hinanden. Dem farver vi sorte. Dette svarer i virkeligheden til at indsætte syv sorte skillevægge i mellemrummene mellem de 29 ikke-valgte bolde eller foran den første eller efter den sidste ikke-valgte bold, altså at indsætte syv sorte skillevægge på 30 pladser. Dette kan gøres på $\binom{30}{7} = 2.035.800$ måder, og dette er mindre end $\frac{1}{4}$ af 8.347.680.

Opgave 3.9 Hvis syv ens ringe skulle fordeles på fem pinde, kunne det gøres på $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$ måder. Vi betragter nu hver af de 330 muligheder separat. De syv placeringer af ringene nummereres $1,2,3,4,5,6$ og 7. Da de ti ringe har forskellig farve, skal vi beslutte hvilken ring der skal i første position, anden position osv. til og med syvende position, dvs. der er $\frac{10!}{3!}$ måder at fordele farverne på. Ifølge multiplikationsprincippet er der derfor i alt $\frac{11!10!}{4!7!3!} = 330\frac{10!}{3!} = 199.584.000$ slutkonfigurationer.

Opgave 4.1 Identiteten vises ved at tælle på to måder. Man kan udtage k elementer blandt $n+m$ elementer på $\binom{n+m}{k}$ måder. Vi kan også tænke på at vi først skal udtage i elementer blandt de første n elementer, og derefter $k-i$ blandt de sidste m, $i = 0,1,\ldots,k$. Dette kan gøres på $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$. Dermed er

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Opgave 4.2 a) Antal måder at vælge et udvalg med en formand og en referent ud af n personer tælles på to måder (formand og referent må gerne være samme person):

Metode 1: Hvis formand og referent er to forskellige personer, er der $n(n-1)$ måder at vælge dem på. Derefter skal man for de $n-2$ resterende beslutte om de er med eller ej. Dette kan gøres på i alt $n(n-1)2^{n-2}$ måder. Hvis formand og referent er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder, dvs. samlet er der $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$ måder at nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^2 måder at vælge formanden og referenten på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

b) Antal måder at vælge et udvalg med en formand, en referent og en kasserer ud af n personer tælles på to måder (formand, referent og kasserer må gerne være samme person):

Metode 1: Hvis formand, referent og kasserer er tre forskellige personer, er der $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ måder at nedsætte udvalget på. Hvis formand, referent og kasserer samlet er to personer, er der $3n(n-1)2^{n-2}$ måder, og hvis formand, referent og kasserer er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder. Samlet er der $n(n-1)(n-2)2^{n-3} + 3n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n^2(n+3)2^{n-3}$ måder at nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^3 måder at vælge formanden, referent og kasserer på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n} k^3\binom{n}{k}$.

Opgave 4.3 Ane skal gå tre gange mod øst og $n+1$ gange mod nord for at nå floden i det ønskede kryds, dvs. for at komme fra $(0,0)$ til $(3, n+1)$ via vejkrydset $(3, n)$. Det sidste stykke skal hun gå mod nord, da hun ellers har nået floden i et tidligere kryds, derfor skal hun via $(3, n)$. Hun skal altså de første $n+3$ gange hun slår plat eller krone, slå tre plat og n krone, mens hun den sidste gang skal

slå krone. Sandsynligheden for at hun gør dette, er

$$\binom{n+3}{3}\frac{1}{2^{n+3+1}}.$$

Ane når med sandsynlighed 1 frem til floden på et tidspunkt. Sandsynligheden for at hun når floden i krydset $(k, n+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, er

$$\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}.$$

Da der er symmetri, er sandsynligheden for at nå floden i krydset $(n+1, k)$ den samme. Dermed er

$$1 = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{k+n}}.$$

Opgave 4.4 For at vise at

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}$$

tæller vi på hvor mange måder man kan vælge $r+1$ ud af $n+1$ elementer på en interessant måde: Vi tæller nemlig antallet af delmængder med $r+1$ elementer af mængden $\{1, 2, \dots, n+1\}$ hvor $k+1$ er det næstmindste element. Hvis $k+1$ er det næstmindste element, kan det mindste element vælges på k måder, og de $r-1$ største elementer på $\binom{(n+1)-(k+1)}{r-1} = \binom{n-k}{r-1}$ måder. De mulige værdier af k er $k = 1, 2, \cdots n-r+1$. Dette viser det ønskede.

Opgave 4.5 Der findes $\binom{n-k}{r-1}$ delmængder hvor mindste elementet er k, dvs. at

$$F(n,r) = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}.$$

Ved at udnytte opgave 4.4 fås

$$F(n,r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}.$$

Opgave 4.6 Antal måder at vælge x, y og z på så $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $z > x$ og $z > y$, tælles på to måder:

Metode 1: For $z = k+1$ er der k^2 muligheder for x og y. Samlet kan man altså vælge x, y og z på $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ måder.

Metode 2: Hvis x og y er forskellige, svarer det til at vælge tre tal ud af $n+1$, sætte det største tal lig z og sætte de to sidste tal lig henholdsvis x og y. Dette kan gøres på $2\binom{n+1}{3}$ måder. Hvis $x = y$ svarer det til at vælge to tal blandt de $n+1$ og sætte z lig det største og x og y lig det mindste. Samlet er der derfor $2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$ kombinationer.

Opgave 4.7 Vi tæller antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse. Der er i alt $\frac{b(b-1)}{2}$ par af dommere, og hvert par har højst bedømt k deltagere ens, så $N \le k\frac{b(b-1)}{2}$.

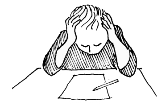
Nu ser vi på en bestemt deltager X og tæller hvor mange par af dommere der har bedømt X ens. Hvis x dommere har ladet X bestå, er der $\frac{x(x-1)}{2}$ par af dommere der har ladet X bestå, og $\frac{(b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere der har dumpet X. Dermed er der i alt $\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere som bedømmer X ens. Men

$$\begin{aligned}\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2} &= \frac{2x^2-2bx+b^2-b}{2}\\ &= \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \ge \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2}\\ &= \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Tallet $\frac{(b-1)^2}{4}$ er et helt tal da b er ulige, så antallet af par af dommere der bedømmer X ens, er mindst $\frac{(b-1)^2}{4}$. Dermed er $N \ge \frac{a(b-1)^2}{4}$. Samlet giver dette at $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$.

Opgave 5.1 Ved at anvende eksempel 5.1 og sætning 2.5 g) fås

$$\begin{aligned}\binom{2p}{p} &= \binom{p}{0}^2 + \binom{p}{1}^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}^2 + \binom{p}{p}^2\\ &\equiv 1 + 0 + \cdots + 0 + 1\\ &\equiv 2 \pmod{p^2}.\end{aligned}$$



Opgave 5.2 Ved at benytte sætning 2.5 b) og Vandermonde identiteten fås

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}\\ &= n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k}\\ &= n\binom{2n-1}{n}\\ &= n\binom{2n-1}{n-1}.\end{aligned}$$

Opgave 5.3 Antallet af måder først at vælge k ud af n og derefter m af disse k er det samme som først at vælge m ud af n og derefter vælge $k-m$ af de resterende $n-m$. Derfor er

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Ved at omskrive og benytte sætning 2.5 d) fås

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}\\ &= \binom{n}{m}(-1)^{2m}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k}\binom{n-m}{k} = 0\end{aligned}$$

Opgave 5.4 Induktion efter n: Det er nemt at se at udsagnet er sandt for $n=1$.

Antag at det er sandt for $n=N\geq 1$. Da er

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N+1}{k} &= \sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k} + \sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k} + \sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{N+1}\binom{N+1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \frac{1}{N+1}\Big(\binom{N+1}{0} + \sum_{k=0}^{N+1}(-1)^{k-1}\binom{N+1}{k}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \frac{1}{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Opgave 5.5 Induktion efter n: Omskriv udtrykket til

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{i}} = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{i}.$$

Det er nemt at se at påstanden er sand for $n=1$. Antag at den er sand for $n=N$. Da er

$$\begin{aligned}\frac{2^{N+2}}{N+2}\sum_{i=0}^{N+1}\frac{1}{\binom{N+1}{i}} &= 2^{N+1}\Big(\frac{1}{N+2}\Big(\sum_{i=0}^{N+1}\frac{1}{\binom{N+1}{i}} + \sum_{i=0}^{N+1}\frac{1}{\binom{N+1}{i}}\Big)\Big)\\ &= 2^{N+1}\Big(\frac{2}{N+2} + \frac{1}{N+2}\Big(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\binom{N+1}{i}} + \sum_{i=1}^{N+1}\frac{1}{\binom{N+1}{i}}\Big)\Big)\\ &= 2^{N+1}\Big(\frac{2}{N+2} + \frac{1}{N+2}\Big(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\binom{N+1}{i}} + \sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\binom{N+1}{i+1}}\Big)\Big)\\ &= 2^{N+1}\Big(\frac{2}{N+2} + \frac{1}{N+2}\sum_{i=0}^{N}\frac{i!(N+1-i)!+(i+1)!(N-i)!}{(N+1)!}\Big)\end{aligned}$$

$$\frac{2^{N+2}}{N+2}\sum_{i=0}^{N+1}\frac{1}{\binom{N+1}{i}} = 2^{N+1}\Big(\frac{2}{N+2}+\frac{1}{N+2}\sum_{i=0}^{N}\frac{i!(N-i)!((N+1-i)+(i+1))}{(N+1)!}\Big)$$
$$= 2^{N+1}\Big(\frac{2}{N+2}+\frac{1}{N+2}\sum_{i=0}^{N}\frac{i!(N-i)!(N+2)}{(N+1)!}\Big)$$
$$= 2^{N+1}\Big(\frac{2}{N+2}+\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\frac{i!(N-i)!}{N!}\Big)$$
$$= \frac{2^{N+2}}{N+2}+\frac{2^{N+1}}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\binom{N}{i}}$$
$$= \frac{2^{N+2}}{N+2}+\sum_{i=1}^{N+1}\frac{2^i}{i}$$
$$= \sum_{i=1}^{N+2}\frac{2^i}{i}$$

Opgave 6.1 Det er nemt at se at $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ og $a_4 = 7$. Når vi tegner linje nummer n, så skærer den de $n-1$ andre linjer, og disse $n-1$ skæringspunkter deler linjen i n linjestykker der hver gennemskærer et område og deler det i to. Der kommer altså n flere områder end før. Dermed er $a_n = a_{n-1}+n$ og

$$a_n = a_{n-1}+n = a_{n-2}+(n-1)+n = \cdots = a_1+2+3+\cdots+n$$
$$= 1+(1+2+\cdots+n) = 1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

Opgave 6.2 Vi løser problemet rekursivt ved først at betragte et 2×1-bræt, og derefter udvide med 2 felter ad gangen. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2\times n$-bræt sorte, når to felter der har en kant til fælles, ikke begge må være sorte, og lad b_n være hvor mange af disse hvor begge de to sidst tilføjede felter er hvide, og c_n være hvor mange af disse hvor netop et af de to sidst tilføjede felter er sort. Som start har vi $b_1 = 1$, $c_1 = 2$ og $a_1 = b_1 + c_1 = 3$. Vi opstiller nu rekursionsformler for b_n og c_n. Der er nemt at se at $b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ da man altid kan tilføje to hvide felter. Desuden er $c_n = 2b_{n-1} + c_{n-1}$ da man kan tilføje to nye felter hvor det ene er sort på to måder, hvis de to foregående begge er hvide, mens man kun har en mulighed hvis en af de to foregående felter er sorte. Dermed er

$$a_n = b_n + c_n = 3b_{n-1}+2c_{n-1} = 2(b_{n-1}+c_{n-1})+(b_{n-2}+c_{n-2}) = 2a_{n-1}+a_{n-2}.$$

Vi kan nu simpelthen rekursivt beregne a_8 ved først at bemærke at $a_2 = 7$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	7	17	41	99	239	577	1393

Vi kan altså farve nogle af felterne på et 2×8-bræt sorte så to felter der har en kant til fælles, ikke begge må være sorte, på 1393 måder.

Opgave 6.3 Lad a_n være antallet af måder Georg kan bygge et $1\times 1\times n$ tårn på. Det er trivielt at $a_0 = 1$ og $a_1 = 1$. Da der er en slags $1\times 1\times 1$ klods og 6 slags $1\times 1\times 2$-klodser, må

$$a_n = a_{n-1}+6a_{n-2}.$$

Da rødderne i $x^2-x-6=0$ er $r_1 = -2$ og $r_2 = 3$, så er

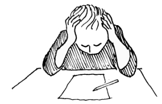
$$a_n = A(-2)^n + B\cdot 3^n$$

en løsning til rekursionen når A og B opfylder at $A+B = a_0 = 1$ og $-2A+3B = a_1 = 1$. Dette giver $a = \frac{2}{5}$ og $B = \frac{3}{5}$, dvs.

$$a_n = \frac{1}{5}\Big(3^{n+1}-(-2)^{n+1}\Big).$$

Opgave 6.4 Bemærk først at $a_1 = 1$ og $a_2 = 3$. Hvis vi tæller a_n for $n \geq 3$, så ser vi at antallet der slutter med en 1×2-brik i den sidste søjle, må være lig med a_{n-1} fordi resten af brættet kan udfyldes på a_{n-1} måder. Hvis vi tæller antallet der slutter med to 1×2-brikker vandret i de to sidste søjler, så må der tilsvarende være a_{n-2} af disse, mens antallet der slutter med en 2×2-brik i de sidste to søjler også er a_{n-2}. Dermed er

$$a_n = a_{n-1}+2a_{n-2}.$$



For at finde en lukket formel for a_n bestemmer vi rødderne i $x^2 - x - 2 = 0$ som er $r_1 = -1$ og $r_2 = 2$. Dermed er

$$a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$$

løsning til rekursionsformlen hvis konstanterne A og B vælges så de opfylder formlen for a_1 og a_2. Vi skal altså bestemme A og B så

$$1 = a_1 = -A + 2B \quad \text{og} \quad 3 = a_2 = A + 4B,$$

og det giver $A = \frac{1}{3}$ og $B = \frac{2}{3}$. Dermed er

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{3}\Big((-1)^n + 2^{n+1}\Big).$$

Opgave 6.5 Fra opgave 6.2 ved vi at

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

og $a_0 = 1$ og $a_1 = 3$. Rødderne i $x^2 - 2x - 1 = 0$ er $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ og $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Dermed er

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$$

hvor $1 = a_0 = A + B$ og $3 = a_1 = (A+B) + \sqrt{2}(A-B)$. Ved at kombinere de to ligninger fås $A = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ og $B = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$, dvs.

$$a_n = \frac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\Big).$$

Opgave 6.6 Lad S_n være mængden af de n-cifrede tal der kun indeholder cifrene $1, 2, 3, 4, 5$, og hvor to på hinanden følgende cifre altid har differens ± 1. Lad A_n være antallet af tal i S_n som slutter på 1 eller 5, lad B_n være antallet af tal fra S_n som slutter på 2 eller 4, og lad C_n være antallet af tal fra S_n som slutter på 3. Vi har $A_1 = 2$, $B_1 = 2$ og $C_1 = 1$. Vi beskriver nu A_n, B_n og C_n rekursivt. Det er nemt at se at $A_n = B_{n-1}$, $B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1}$ og $C_n = B_{n-1}$ for $n > 1$. For $n > 2$ er

$$B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1} = B_{n-2} + 2B_{n-2} = 3B_{n-2}.$$

Da $B_2 = A_1 + 2C_1 = 4$, følger det nu at

$$B_{2n} = 3^{n-1}B_2 = 3^{n-1} \cdot 4$$
$$B_{2n+1} = 3^n B_1 = 3^n \cdot 2.$$

Dermed er

$$|S_{2n}| = A_{2n} + C_{2n} + B_{2n} = 2B_{2n-1} + 3^{n-1} \cdot 4 = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 4 = 3^{n-1} \cdot 8.$$
$$|S_{2n+1}| = A_{2n+1} + C_{2n+1} + B_{2n+1} = 2B_{2n} + 3^n \cdot 2 = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 4 + 3^n \cdot 2 = 3^{n-1} \cdot 14.$$

Opgave 6.7 Kald antallet af farvelagte rækker af stole af længe k som starter med en grøn stol, for g_k, og antallet af farvelagte rækker af stole som starter med en rød stol, for r_k. Af symmetrigrunde er $r_k = g_k$ for alle k. Hvis en række starter med en grøn stol, så kan næste stol enten være rød eller grøn. Hvis den er rød, så kan resten af rækken farvelægges på r_{k-1} måder. Hvis den er grøn, så må den tredje stol også være grøn, og derefter kan resten af rækken farves på g_{k-2} måder. Dermed er

$$g_k = r_{k-1} + g_{k-2} = g_{k-1} + g_{k-2}.$$

Det er desuden nemt at se at $g_1 = 1$ og $g_2 = 1$. Altså er $g_k = F_k$. Det betyder at antallet af måder vi kan farvelægge alle 16 stole er $r_{16} + g_{16} = 2 \cdot F_{16} = 2 \cdot 1974$.

Opgave 6.8 Bemærk først at $C_1 = 4$ og $C_2 = 15$. Vi kan nu lave en rekursionsformel for C_n. Hvis vi tæller antallet hvor de to sidste felter ikke begge er røde, så er der $3C_{n-1}$ af disse, da C_{n-1} angiver antallet af måder man kan farve den første $2 \times (n-1)$-del af brættet, mens de 3 angiver at man kan farve de sidste to felter på 3 måder, så de ikke begge er røde. Her tilføjes oplagt ikke farvninger med røde 2×2-kvadrater. Hvis vi tæller antallet hvor de to sidste felter begge er røde, så er der $3C_{n-2}$ af disse, da C_{n-2} angiver antallet af måder at farve den første $2 \times (n-2)$-del af brættet, mens de 3 angiver at man kan farve de næstsidste to felter på 3 måder, så de ikke begge er røde, hvilket er nødvendigt for at farve de to sidste røde. Dermed er

$$M_n = 3M_{n-1} + 3M_{n-2}.$$

Vi viser nu ved induktion efter n at $k_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ for ulige n, mens $k_n \geq \frac{n}{2}$ for lige n. Vi ved at $k_1 = 0$ og $k_2 = 1$. Antag nu at det er sandt for alle k_n, $n < N$. For lige $n = N$ med $n = 2m$ må

$$C_{2m} = 3(C_{2m-1} + C_{2m-2}) = 3(3^{m-1} \cdot u + 3^{m-1} \cdot v) = 3^m(u+v),$$

og altså $k_n \geq \frac{n}{2}$. For ulige $n = N$ med $n = 2m+1$ må

$$C_{2m+1} = 3(C_{2m} + C_{2m-1}) = 3(3^m \cdot u + 3^{m-1} \cdot v) = 3^m(3u+v),$$

hvor v ikke er delelig med 3, dvs. $k_{2m+1} = m$. Dette afslutter induktionen. Dermed er $k_{2019} = 1009$.

Opgave 6.9 Bemærk først at $A_{(n,1)} = n$. Desuden må $A_{(n,k)} = A_{(n-1,k)} + A_{(n-2,k-1)}$ for $k > 1$, da man kan tage alle k-delmængder af S_{n-1} som opfylder det ønskede, og derefter tage alle $k-1$-delmængder af S_{n-2} hvor man tilføjer n. Ved at undersøge små eksempler får man en idé om at $A_{(n,k)} = \binom{n+1-k}{k}$. Dette vises induktivt efter k. Vi har allerede vist formlen for alle n for $k = 1$. Antag at den er sand for alle n med $k-1$. For $n < 2k-1$ er $\binom{n+1-k}{k} = 0$, hvilket passer med at der ikke findes k-delmængder der opfylder det ønskede når $n < 2k-1$. For $n = 2k-1$ er $\binom{n+1-k}{k} = \binom{k}{k} = 1$, hvilket passer med at der netop er en k-delmængde der opfylder det ønskede når $n = 2k-1$. Antag nu at formlen er sand for alle $1 \leq n < N$ for dette k. Da er

$$A_{(N,k)} = A_{(N-1,k)} + A_{(N-2,k-1)} = \binom{N-k}{k} + \binom{N-k}{k-1} = \binom{N+1-k}{k}$$

som ønsket. Dette afslutter induktionen.

Opgave 6.10 I Albertslund kan man vælge r piger på $\binom{n}{r}$ måder, man kan vælge r drenge på $\binom{n}{r}$ måder, og man kan sætte de r piger og r drenge sammen i par på $r!$ måder. Ifølge multiplikationsprincippet er $A(n,r) = \binom{n}{r}^2 \cdot r!$. Specielt er $A(n,1) = n^2$ og $A(2,2) = 2$.

Nu betragter vi Brøndby. Pigen p_i kan parres med $2i-1$ drenge, dvs.

$$B(n,1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - n = (n+1)n - n = n^2.$$

Desuden er $B(2,2) = 2$. Nu beskriver vi $B(n,r)$ rekursivt:

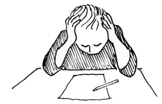
$$\begin{aligned} B(n,r) &= B(n-1,r) + B(n-1,r-1)((2n-1)-(r-1)) \\ &= B(n-1,r) + B(n-1,r-1)(2n-r). \end{aligned}$$

Denne formel fås ved at først at tælle på hvor mange måder de r par kan vælges hvis pigen p_n ikke er med i nogen af de r par, og det er netop $B(n-1,r)$. Derefter tæller vi på hvor mange måder de r par kan vælges hvis pigen p_n er med: Først vælges $r-1$ par hvor hun ikke er med. Derefter skal vi vælge en makker til hende. Hun kan parres med $2n-1$ drenge, men $r-1$ af dem er allerede taget. Det giver $B(n-1,r-1)((2n-1)-(r-1))$.

For at vise at $A(n,r) = B(n,r)$, viser vi at de opfylder samme rekursionsformel. Vi har vist at $A(n,1) = B(n,1)$ for alle n, og at $A(2,2) = B(2,2)$. Hvis blot vi kan vise at $A(n,r) = A(n-1,r) + A(n-1,r-1)(2n-r)$, er vi færdige. Det kan nemt vises ved at sætte den lukkede formel for $A(n,r)$ ind og tjekke at det passer, men man kan faktisk også argumentere uden brug af formlen:

Hvis vi skal tælle antal måder at vælge r par fra Albertslund på, så tæller vi først alle dem hvor pigen p og drengen d ikke er med. Dem er der $A(n-1,r)$ af. Derefter tæller vi alle dem hvor pigen p er med: Der er n muligheder for at vælge en dreng til hende, og derefter kan de $r-1$ sidste par vælges på $A(n-1,r-1)$ måder, dvs. i alt $A(n-1,r-1) \cdot n$. Nu tæller vi alle dem hvor pigen p ikke er med, men hvor drengen d er med: Først vælges $r-1$ par der ikke indeholder p og d, og det kan gøres på $A(n-1,r-1)$ måder. Nu skal vi vælge en makker til d. Der er $r-1$ som er optaget, og vi må desuden ikke vælge p, dvs. der er $n-r$ muligheder. Der er altså $A(n-1,r-1)(n-r)$ måder at vælge de r par sådan at p ikke er med og d er med. Samlet fås $A(n,r) = A(n-1,r) + A(n-1,r-1)(2n-r)$ som ønsket.

Opgave 7.1 Lad A_i være den delmængde af $M = \{1,2,\ldots,1000\}$ som indeholder alle tal fra M hvor i går op, $i = 2,3,5,7$. Antal tal S i M som hverken er



delelig med 2, 3, 5 eller 7, er da

$$\begin{aligned}S &= |M| - |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\ &= 1000 - \Big(\sum_{i=2,3,5,7} |A_i| - \sum_{i,j \in \{2,3,5,7\}, i<j} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{i,j,k \in \{2,3,5,7\}, i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| \Big) \\ &= 1000 - \Big(500 + 333 + 200 + 142 - 166 - 100 - 71 - 66 - 47 - 28 \\ &+ 33 + 23 + 14 + 9 - 4 \Big) = 228.\end{aligned}$$

Opgave 7.2 Kald mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_4c_5c_6$, for A, mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_5c_6c_7$, for B, og mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_6c_7c_8$, for C. Et telefonnummer tilhører $A \cap B$ netop hvis $c_4 = c_1 = c_5 = c_2 = c_6 = c_3 = c_7$, et telefonnummer tilhører $B \cap C$ netop hvis $c_5 = c_1 = c_6 = c_2 = c_7 = c_3 = c_8$, et telefonnummer tilhører $A \cap C$ netop hvis $c_4 = c_1 = c_6 = c_3 = c_8$ og $c_5 = c_2 = c_7$, og et telefonnummer tilhører $A \cap B \cap C$ netop hvis alle cifre er identiske. Ifølge PIE er

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 10^5 + 10^5 + 10^5 - 10^2 - 10^2 - 10^2 + 10 \\ &= 300.000 - 300 + 10 \\ &= 299.710.\end{aligned}$$

Telefonselskabet har derfor 299.710 numre.

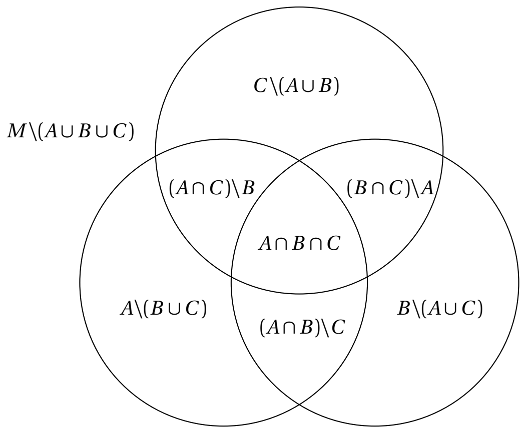
Opgave 7.3 Kald de fire kulører $1,2,3,4$, og lad A_i være mængden af kombinationer af syv kort blandt de 52 så den i'te kulør ikke er repræsenteret. Der er i alt $\binom{52}{7}$ måder at vælge de syv kort på. Antallet T af måder at trække syv kort så der er mindst et kort af hver kulør, er dermed ifølge PIE

$$\begin{aligned}T &= \binom{52}{7} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= \binom{52}{7} - \Big(\sum_{1 \le i \le 4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\qquad - |A_1 \cup A_2 \cap A_3 \cap A_4| \Big) \\ &= \binom{52}{7} - 4\binom{39}{7} + 6\binom{26}{7} - 4\binom{13}{7} + 1 \cdot \binom{0}{7}.\end{aligned}$$

Opgave 7.4 Der er i alt 8! måder at stille de otte personer op på en række. Nummerer de fire par $1,2,3,4$, og lad A_i være mængden af rækkefølger hvor par nummer i står ved siden af hinanden. Da er $|A_i| = 2 \cdot 7!$, da der 7! måder at stille parret og de seks andre i rækkefølge, og man desuden ved hver kombination skal vælge i hvilken rækkefølge de to personer i parret skal stå. Desuden er $|A_i \cap A_j| = 2^2 \cdot 6!$, $i \neq j$, osv. efter samme princip. Dermed er antallet af måder T hvorpå de otte personer kan stilles på en række så ingen af de fire par står ved siden af hinanden

$$\begin{aligned}T &= 8! - \Big(\sum_{1 \le i \le 4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| \\ &\qquad + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \Big) \\ &= 8! - \Big(4 \cdot 2 \cdot 7! - 6 \cdot 2^2 \cdot 6! + 4 \cdot 2^3 \cdot 5! - 2^4 \cdot 4! \Big) \\ &= 13.824\end{aligned}$$

Opgave 7.5 Lad S være mængden af tripler af delmængder (A,B,C) hvor A, B og C er delmængder af mængden M så $A \cap B \cap C = \emptyset$. Vi beregner først antallet af elementer i S. Ved at tegne et Venn-diagram kan man se at hvert af de n elementer skal ligge i netop en af følgende syv disjunkte mængder: $M \setminus (A \cup B \cup C)$, $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$, $C \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \setminus C$, $(A \cap C) \setminus B$ og $(B \cap C) \setminus A$.



Dvs. der er 7^n tripler af delmængder (A,B,C) hvor $A\cap B\cap C=\emptyset$. Herfra skal vi trække alle dem hvor enten $A\cap B$, $A\cap C$ eller $B\cap C$ er tom. Lad $X\subseteq S$ være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap B=\emptyset$, $Y\subseteq S$ være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap C=\emptyset$, og $Z\subseteq S$ være mængden af tripler (A,B,C) hvor $B\cap C=\emptyset$. Vi ønsker at beregne $|X\cup Y\cup Z|$, da $|S|-|X\cup Y\cup Z|$ er det antal vi søger. Ifølge PIE er

$$|X\cup Y\cup Z|=|X|+|Y|+|Z|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|Y\cap Z|+|X\cap Y\cap Z|.$$

Elementerne i X er dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A\cap B)\backslash C$, men netop en af de øvrige seks disjunkte mængder ovenfor dvs. at $|X|=6^n$. Tilsvarende er $|Y|=|Z|=6^n$. Elementerne i $X\cap Y$ er dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A\cap B)\backslash C$ eller $(A\cap C)\backslash B$, men netop en af de øvrige fem disjunkte mængder ovenfor dvs. at $|X\cap Y|=5^n$. Tilsvarende er $|X\cap Z|=|Y\cap Z|=5^n$. Elementerne i $X\cap Y\cap Z$ er dem hvor hvert af de n elementer tilhører netop en af følgende fire disjunkte mængder $M\backslash(A\cup B\cup C)$, $A\backslash(B\cup C)$, $B\backslash(A\cup C)$ og $C\backslash(A\cup B)$, dvs. at $|X\cap Y\cap Z|=4^n$. I alt er der

$$|S|-|X\cup Y\cup Z|=7^n-3\cdot 6^n+3\cdot 5^n-4^n$$

kombinationer.

Opgave 7.6 Betragt mængden

$$S=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|x_j\in\{1,2,3,\dots,n+k\}\}.$$

Lad A_i, $i=1,2,\dots,n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt $x_1,x_2,\dots,x_n$. Antallet af elementer i S som ikke ligger i $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, er $n!$, da disse elementer netop er dem hvor $x_1,x_2,\dots,x_n$ er samtlige tal $1,2,\dots,n$ i en eller anden rækkefølge. Dermed er

$$n!=|S|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$n!=|S|-\Big(\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| -\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|\Big).$$

Antal elementer i S er $(n+k)^n$. Antallet af elementer i fællesmængden af r af delmængderne $A_1,A_2,\dots,A_n$ er $(n+k-r)^n$ da $x_1,x_2,\dots,x_n$ skal vælges blandt $n+k-r$ tal. Desuden er der $\binom{n}{r}$ måder at vælge de r delmængderne på. Dette giver netop

$$n!=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n+k-i)^n$$

Opgave 7.7 Lad A_k, $k=1,2,\cdots,n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i)=k$ og $\sigma(i+1)=k+n$ eller $\sigma(i)=k+n$ og $\sigma(i+1)=k$. Lad A være mængden af permutationer med egenskaben P. Da er

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

PIE giver dermed at

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|.$$

Hvis vi blot ser på de første to led på højresiden, er et element fra A som ligger i m af delmængderne $A_1,A_2,\dots,A_n$, talt med

$$m-\binom{m}{2}=m-\frac{m(m-1)}{2}\le 1,$$

dvs. at

$$|A| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|.$$

Desuden er $|A_k| = (2n-1)2(2n-2)! = 2(2n-1)!$ og $|A_k \cap A_l| = (2n-2)!2^2$. Det sidste ses på følgende måde. Vi skal vælge to elementer $i, j \in \{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ så i og $i+1$ afbildes i k og $k+n$, og j og $j+1$ afbildes i l og $l+n$. Dette kan gøres på

$$(2n-1)(2n-2) - 2(2n-2) = (2n-2)(2n-3)$$

måder da vi ikke må vælge i og j som to på hinanden følgende tal. Desuden skal vi vælge om i skal afbildes i k eller $k+n$, og om j skal afbildes i l eller $n+l$. Dette kan gøres på 2^2 måder. For de resterende $2n-4$ elementer er der $(2n-4)!$ muligheder. Dermed er

$$|A| \geq \binom{n}{1} 2(2n-1)! - \binom{n}{2}(2n-2)!2^2 = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2} = \frac{|S_{2n}|}{2}.$$

Opgave 8.1 Lad $P(x) = (1+x)^{2011}$, $Q(x) = (1+x)^{2012}$ og $R(x) = (1+x)^{2013}$. Her repræsenterer 1 plat og x krone eller omvendt. På denne måde ses at Astrid kan få m gange krone på netop $[x^{2011-m}]P(x)$ måder, David kan få m gange krone på netop $[x^m]R(x)$ måder, Bertram kan få $n+1$ gange krone på $[x^{2012-(n+1)}]Q(x)$ måder, og Cecil kan få n gange krone på $[x^n]Q(x)$ måder. Dermed er sandsynligheden for at Astrid og David får krone det samme antal gange

$$\frac{\sum_{m=0}^{2011} [x^{2011-m}]P(x) \cdot [x^m]R(x)}{2^{2011+2013}} = \frac{[x^{2011}](1+x)^{2011+2013}}{2^{4024}} = \frac{\binom{2024}{2011}}{2^{4024}}.$$

Sandsynligheden for at Bertram får netop en gange krone mere end Cecil, er tilsvarende

$$\frac{\sum_{n=0}^{2011} [x^{2011-n}]Q(x) \cdot [x^n]Q(x)}{2^{2012+2012}} = \frac{[x^{2011}](1+x)^{2012+2012}}{2^{4024}} = \frac{\binom{2024}{2011}}{2^{4024}}.$$

Opgave 8.2 Bemærk først at

$$\binom{4n}{2n} = [x^{2n}](1+x)^{4n} = [x^{2n}](1+2x+x^2)^{2n}.$$

For at bestemme koefficienten til x^{2n} i $(1+2x+x^2)^{2n}$ skal vi bestemme på hvor mange måder vi kan vælge $2x$ fra $2n-2k$ af de $2n$ parenteser og gange dette med 2^{2n-2k}, og derefter på hvor mange måder vi kan vælge x^2 fra k af de resterende $2k$ parenteser, og summere dette for $k = 0, 1, \ldots, n$. Altså

$$[x^{2n}](1+2x+x^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^{2n-2k} \binom{2n}{2n-2k}\binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{2n-2k} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}.$$

Opgave 8.3 Sæt $P(x) = (1+x+x+x^2)^n$ hvor 1 repræsenterer et skridt til venstre, x at den står stille og glor, og x^2 at den går til højre. Sandsynligheden for at den er ved $x = i$ efter n minutter er dermed

$$\frac{[x^{i+n}]P(x)}{4^n} = \frac{[x^{i+n}](1+x)^{2n}}{4^n} = \frac{\binom{2n}{i+n}}{4^n}.$$

Opgave 8.4 Lad $P_i(x) = \frac{2i+x}{2i+1}$. Da er sandsynligheden for at få krone med mønt nummer i netop $[x]P_i(x)$. Dermed er sandsynligheden for få et ulige antal gange krone, netop summen af koefficienterne til led af ulige grad i polynomiet

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x).$$

Summen af koefficienterne til led af ulige grad er

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{2i+1} - \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

Opgave 8.5 Lad $f(x)$ være frembringerfunktionen for $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Antallet af polynomier P med koefficienter i $\{0, 1, 2, 3\}$ som opfylder at $P(2) = n$, er netop antallet af måder at skrive n på formen

$$n = c_0 + c_1 2 + c_2 2^2 + \cdots + c_k 2^k,$$

hvor $c_i \in \{0,1,2,3\}$. Dermed er

$$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty}(1+x^{2^i}+x^{2\cdot 2^i}+x^{3\cdot 2^i}) = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1-x^{2^{i+2}}}{1-x^{2^i}}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}\frac{1-x^{2^{i+2}}}{1-x^{2^i}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^{n+1}})(1-x^{2^{n+2}})}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \text{ når } |x|<1,$$

kan vi nu betragte f for $|x|<1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{2}\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x^2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)+(1+x^2+x^4+\cdots)\Big) \\ &= 1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+\cdots. \end{aligned}$$

Altså er $a_n = [x^n]f(x) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Opgave 8.6 Betragt funktionen

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i+x^{2i}+x^{3i}).$$

Bemærk at dette giver mening da koefficienten til x^n er endelig for alle n. Der gælder nu at $a(n) = [x^n]f(x)$ da $(1+x^i+x^{2i}+x^{3i})$ bidrager med 0, 1, 2 eller 3 i'er til summen.

Betragt yderligere funktionen

$$g(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i})\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i-1}+x^{2(2i-1)}+\cdots).$$

Bemærk at dette giver mening da koefficienten til x^n er endelig for alle n. Der gælder nu at $b(n) = [x^n]g(x)$ da $(1+x^{2i})$ enten bidrager med $2i$ som summand, eller ikke bidrager med noget. Tilsvarende bidrager $(1+x^{2i-1}+x^{2(2i-1)}+\cdots)$ med henholdsvis $0,1,2,3,\ldots$ gange $2i-1$ i summen.

Vi mangler nu at vise at $[x^n]f(x) = [x^n]g(x)$ for alle $n = 1,2,3,\ldots$, da dette viser at $a(n) = b(n)$. Vi omskriver f og g så dette bliver klart, og som før antager vi at $|x|<1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i+x^{2i}+x^{3i}) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-x^{4i}}{1-x^i} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1-x^{2i})(1+x^{2i})}{1-x^i} = \frac{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i})\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i-1}+x^{2(2i-1)}+\cdots) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i})\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}} = \frac{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}. \end{aligned}$$

Altså er $f(x) = g(x)$ og dermed også $[x^n]f(x) = [x^n]g(x)$ for alle $n = 1,2,3,\ldots$

Opgave 8.7 Lad

$$f(x) = (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^6.$$

Da er antal måder man kan få øjensummen 21 ved at kast med 6 terninger $[x^{21}]f(x)$. Nu omskriver vi f for at bestemme denne koefficient. Antag at $|x|<1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^6 \\ &= x^6\Big(\frac{1-x^6}{1-x}\Big)^6 \\ &= x^6(1-x^6)^6(1+x+x^2+x^3+\cdots)^6 \\ &= x^6\Big(\binom{6}{0}-\binom{6}{1}x^6+\binom{6}{2}x^{12}-\cdots+\binom{6}{6}x^{36}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{5+i}{5}x^i\Big). \end{aligned}$$

Altså er

$$[x^{21}f(x)] = \binom{6}{0}\binom{20}{5}-\binom{6}{1}\binom{14}{5}+\binom{6}{2}\binom{8}{5}$$

Opgave 8.8 Opgaven løses ved at følge eksempel 8.5. Lad frembringerfunktionen være

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2007}),$$

så antallet A af delmængder af $\{1,2,3,\cdots,2007\}$ med en sum der er delelig med 17, er

$$A = \sum_{n|17}[x^n]f(x).$$

Lad nu ξ være den 17. enhedsrod. Ifølge sætning 8.6 er

$$A = \frac{f(1)+f(\xi)+f(\xi^2)+f(\xi^3)+\cdots+f(\xi^{16})}{17}.$$

Som i eksempel 8.5 ses at

$$(1+\xi^k)(1+\xi^{2k})(1+\xi^{3k})\cdots(1+\xi^{16k}) = 2, \text{ for } k = 1,2,\cdots,16.$$

Da $2007 = 17\cdot 118+1$, er

$$\begin{aligned} f(\xi^k) &= (1+\xi^k)(1+\xi^{2k})\cdots(1+\xi^{2007k}) \\ &= \Big((1+\xi^k)(1+\xi^{2k})\cdots(1+\xi^{17k})\Big)^{118}(1+\xi^k) \\ &= 2^{118}(1+\xi^k). \end{aligned}$$

Samlet er

$$\begin{aligned} A &= \frac{f(1)+f(\xi)+f(\xi^2)+f(\xi^3)+\cdots+f(\xi^{16})}{17} \\ &= \frac{2^{2007}+2^{118}(16+\xi+\xi^2+\cdots\xi^{16})}{17} \\ &= \frac{2^{2007}+2^{118}\cdot 15}{17}. \end{aligned}$$

Opgave 8.9 Vha. en frembringerfunktion fås

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n+j}{j} &= [x^n]\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x+1)^{n+j} \\ &= [x^n]\Big(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x+1)^j\Big)(x+1)^n \\ &= [x^n]\Big((x+1)+1\Big)^n(x+1)^n \\ &= [x^n](x+2)^n(x+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}2^k. \end{aligned}$$

Opgave 8.10 For at konstruere en frembringende funktion som fortæller noget om antallet af n'cifrede tal der består af cifrene 6, 7, 8 og 9, tænker vi på at vi for hvert ciffer skal bestemme om det skal være 6, 7, 8 eller 9, dvs. vi kan benytte $f(x) = (x^6+x^7+x^8+x^9)^n$ som frembringende funktion. Her bliver $[x^m]f(x)$ netop antallet af de n-cifrede tal hvis tværsum er m. Et tal har rest 1 modulo 3 netop hvis tværsummen har rest 1 modulo 3. Altså er det antal A vi søger netop summen af alle koefficienter i f hvis indeks har rest 1 modulo 3. For at kunne benytte sætning 8.6 sættes $g(x) = x^2 f(x)$ så A er summen af koefficienterne i g hvis indeks er deleligt med 3. Lad ξ være den tredje enhedsrod. Sætning 8.6 giver at

$$A = \frac{g(1)+g(\xi)+g(\xi^2)}{3}.$$

Ved at udnytte at $\xi^3 = 1$ og $1+\xi+\xi^2 = 0$ fås

$$\begin{aligned} A &= \frac{g(1)+g(\xi)+g(\xi^2)}{3} \\ &= \frac{4^n+(1+\xi+\xi^2+1)^n\xi^2+(1+\xi^2+\xi+1)^n\xi}{3} \\ &= \frac{4^n+\xi^2+\xi}{3} \\ &= \frac{4^n-1}{3}. \end{aligned}$$

Opgave 8.11 Betragt frembringerfunktionen

$$f(x) = 1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + (x + x^2)^3 + \cdots.$$

Bemærk at dette giver mening da koefficienten til x^n er endelig for alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Nu er

$$\alpha(n) = [x^n]f(x)$$

da koefficienten til x^n i leddet $(x + x^2)^k$ netop repræsenterer antallet af måder at skrive n som en sum af k 1 og 2-taller.

For $\beta(n)$ kan vi konstruere frembringerfunktionen

$$g(x) = 1 + (x^2 + x^3 + \cdots) + (x^2 + x^3 + \cdots)^2 + (x^2 + x^3 + \cdots)^3 + \cdots.$$

Her er

$$\beta(n) = [x^n]g(x)$$

da koefficienten til x^n i leddet $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^k$ netop repræsenterer antallet af måder at skrive n som en sum af k hele tal større end 1.

At $\alpha(n) = \beta(n+2)$, svarer dermed til at vise at $[x^n]f(x) = [x^{n+2}]g(x)$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vi omskriver nu $f(x)$ og $g(x)$ under antagelse af at $|x| < \frac{1}{2}$, da vi så både har at $|x| < 1$, $|x + x^2| < 1$ og $|\frac{x^2}{1-x}| < 1$.

$$f(x) = 1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + (x + x^2)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - (x + x^2)} = \frac{1}{1 - x - x^2},$$

og

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + (x^2 + x^3 + \cdots) + (x^2 + x^3 + \cdots)^2 + (x^2 + x^3 + \cdots)^3 + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{1-x}\right) + \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1-x}} \\ &= 1 + \frac{x^2}{1 - x - x^2}. \end{aligned}$$

Dette viser at $[x^n]f(x) = [x^{n+2}]g(x)$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ som ønsket.

Opgave 8.12 Antag at $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er en følge der opfylder det ønskede, og lad

$$P(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots$$

At følgen opfylder det ønskede, betyder at $[x^n]P(x)P(x^2)P(x^4) = 1$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, og altså at

$$P(x)P(x^2)P(x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Bemærk at følgen hvis den findes, er entydigt bestemt: Antag nemlig at der findes en anden følge $b_0, b_1, b_2, \ldots$ der også opfylder det ønskede, og lad m være det mindste indeks så $a_m \neq b_m$. Antag desuden wlog at $a_m < b_m$. Det er klart at $a_0 = b_0 = 0$. Tallet a_m kan skrives på formen $1 \cdot b_i + 2 \cdot b_j + 4 \cdot b_k$, hvor $i, j, k < m$. Dette betyder at $a_m = 1 \cdot a_i + 2 \cdot a_j + 4 \cdot a_k = 1 \cdot a_m + 2 \cdot a_0 + 4 \cdot a_0$, i modstrid med at a_m kan skrives entydigt på denne måde.

Nu finder vi $P(x)$ og dermed følgen:

$$\begin{aligned} P(x)P(x^2)P(x^4) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ &= (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ &= (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots) \\ &\vdots \\ &= (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16}) \cdots \\ &= \prod_{i=0}^{\infty} (1 + x^{8^i})(1 + x^{2 \cdot 8^i})(1 + x^{4 \cdot 8^i}). \end{aligned}$$

Dermed er

$$P(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + x^{8^i}).$$

Følgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er derfor netop tallene på formen

$$c_0 \cdot 8^0 + c_1 \cdot 8^1 + c_2 \cdot 8^2 + \cdots, \quad c_i \in \{0, 1\}$$

i stigende rækkefølge. Dermed er $a_n = c_0 \cdot 8^0 + c_1 \cdot 8^1 + c_2 \cdot 8^2 + \cdots + c_k \cdot 8^k$, hvor $c_k \dots c_2 c_1 c_0$ er den binære repræsentation af n. Vi kan nu udregne a_{1998}:

$$\begin{aligned} a_{1998} &= 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^6 + 1 \cdot 8^7 + 1 \cdot 8^8 + 1 \cdot 8^9 + 1 \cdot 8^{10} \\ &= 1.227.096.648, \end{aligned}$$

da 11111001110 er den binære repræsentation af 1998.