Invarianter

En invariant er en størrelse der ikke ændrer sig, selv om situationen ændrer sig. I nogle kombinatorikopgaver hvor man skal undersøge hvilke situationer der er mulige, er det ofte en god idé at overveje om der er noget der er uafhængigt af det der kan ændres i opgaven. Den simpleste invariant er at se på pariteten af en størrelse. Paritet betyder simpelthen om noget er lige eller ulige, og grunden til at paritet ofte er simpelt at se på, er at der kun er to stadier.

Her vil vi først se på paritet som invariant, derefter på lidt mere komplekse invarianter og hvordan man kan konstruere en invariant vha. farvning, og til slut se på monovarianter som er en størrelse der enten kun vokser eller aftager.

Indhold

1 Paritet

Når man lægger nogle hele tal sammen, og summen er lige, så ved man at der må være et lige antal ulige tal blandt de tal man har lagt sammen. Tilsvarende ved man hvis summen er ulige, at der må være et ulige antal ulige tal blandt summanderne. Det er denne basale egenskab man ofte udnytter når man benytter paritet som invariant.

Eksempel 1.1. I en skakturnering deltager 2013 personer. Vi ønsker at vise at der er et lige antal personer der har spillet et ulige antal kampe.

Lad s_i betegne det antal kampe spiller nummer i har spillet, hvor de 2013 spillere nummereres $1,2,3,\dots,2013$. Summen

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_{2013}$$

må være lige da hvert spil er talt med præcis to gange, dvs. dens paritet er en invariant der er uafhængig af hvor mange kampe den enkelte spiller har spillet. Når summen af nogle hele tal er lige, er der som sagt et lige antal ulige tal blandt summanderne, dvs. at der er et lige antal personer der har spillet et ulige antal kampe. Bemærk at tallet 2013 ikke spiller nogen væsentlig rolle her.

Opgave 1.1. Vis at hvis alle rum i et hus har et lige antal døre, da må der også være et lige antal døre der fører ud af huset. (Hver dør i et rum fører enten ud af huset eller ind i et andet rum).

Opgave 1.2. I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differencen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er en seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal. (Georg Mohr-Konkurrencen 1992)

Opgave 1.3. Er det muligt at tegne 2013 forskellige punkter $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$ i planen så der findes en linje der skærer alle de 2013 linjestykker P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, …, $P_{2012}P_{2013}$, $P_{2013}P_1$ uden at gå gennem nogen af de 2013 punkter?

Opgave 1.4. I en skål er der 15 røde, 18 gule og 22 blå bolde. I hvert træk må man tage to bolde af forskellig farve og erstatte dem med en bold af den tredje farve. Efter et antal træk har alle boldene i skålen samme farve. Vis at denne farve ikke afhænger af hvordan man trækker.

Opgave 1.5. Lad $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ være syv hele tal, og lad $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ være de samme syv tal, bare i en anden rækkefølge. Vil produktet

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_7 - b_7)$$

altid være lige?

Opgave 1.6. Langs en cirkelperiferi er skrevet fire 1-taller og fem nuller i en eller anden rækkefølge. I hvert træk skrives et nul mellem to ens tal, og et 1-tal mellem to forskellige tal, og derefter viskes de oprindelige ni tal ud. Er det muligt at opnå en situation hvor der kun er nuller?

Opgave 1.7. Et spil for tre spillere spilles på et bræt bestående af 99 felter i en lang række. Hver spiller har en spillebrik. Ved spillets start står de tre brikker på det første, det midterste og det sidste felt. En tur består i at man flytter sin brik enten en eller tre pladser frem eller tilbage (inden for brættets rammer). Man vinder spillet ved at rykke sin brik hen på et felt hvor en modstanders brik står. Det er spilleren med den midterste brik der starter. Vis at spiller nummer to ikke kan vinde.

Opgave 1.8. Tallene $1, 2, 3, \cdots, 10$ står på en række i denne rækkefølge. I hvert træk ombyttes to tal som står ved siden af hinanden. Efter m træk står tallene i omvendt rækkefølge. Vis at m altid er ulige.

2 Invariant modulo n

Når man ser på paritet, så ser man på en størrelse modulo 2. I mange sammenhænge skal man i stedet se på en størrelse modulo et større tal n.

Eksempel 2.1. I et rum er der til at starte med ingen personer. Hvert minut kommer der enten en person ind i rummet, eller der er to personer som forlader rummet. Er det muligt at der efter 2013 minutter er 1000 personer i rummet?

Svaret er nej. For at vise dette vil vi gerne konstruere en invariant, og derfor er det vigtigt at overveje hvad der sker. Hvert minut er der to muligheder. Enten kommer der en person ind, eller også kommer der to ud. Forskellen mellem antal personer i rummet i de to muligheder er 3, dvs. det ligner at vi kan konstruere en invariant modulo 3. Lad os kalde antal personer i rummet efter n minutter for A_n. Hvis der hele tiden kommer en person ind i rummet, er der hele tiden lige så mange personer til stede i rummet som antal minutter der er gået, dvs. $A_n = n$. Hvis der i m af de n tilfælde i stedet er forsvundet to personer fra rummet, så er der for hver gang blevet 3 færre end i det tilfælde hvor $A_n = n$, dvs. i dette tilfælde er $A_n = n - 3m$. Dette viser at $A_n - n \equiv 0$ modulo 3.

Hvis vi ser på om det er muligt at der efter 2013 minutter kan være 1000 personer i rummet, så er svaret nej da $2013 - 1000 = 1013$ ikke er kongruent med 0 modulo 3.

Vores analyse fra før viser helt præcist at samtlige muligheder for A_n er $A_n = n - 3m$, hvor $m = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. (Her betegner $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ det største hele tal mindre eller lig med $\frac{n}{3}$).

Opgave 2.1. En drage har 100 hoveder. En ridder kan i et hug hugge henholdsvis 2, 17, 23 eller 38 hoveder af dragen med det resultat at der vokser 5 hoveder ud igen medmindre dragen har mistet alle sine hoveder og dermed dør. Dragen dør først når den ikke har flere hoveder. Kan ridderen slå dragen ihjel?

Opgave 2.2. På en ø er der 18 grønne, 17 røde og 13 blå kamæleoner. Hver gang to kamæleoner af forskellig farve møder hinanden, skifter de begge to farve til den tredje farve. Kan det lade sig gøre at alle kamæleonerne på øen til sidst har samme farve?

Opgave 2.3. I en slimet, grå grotte bor et drabeligt dyr der en sjælden gang imellem vågner nytårsmorgen, går ud og spiser lige så mange får som summen af cifrene i årstallet, lægger sig til at sove igen og først vågner nytårsmorgen efter lige så mange år som det har spist får. Dyret vågnede nytårsmorgen i år 666. Vil dyret vågne nytårsmorgen i år 2013?

Opgave 2.4. I en 1001×1001 tabel står der 1 eller -1 i hvert felt. For hver række i er R_i produktet af de 1001 tal i rækken, og for hver søjle j er S_j produktet af de 1001 tal i søjlen. Vis at $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ ikke kan være nul.

Opgave 2.5. Georg spiller et enmandsspil på et 12×20 bræt hvor hvert felt er et enhedskvadrat, og der er 20 felter langs den nederste kant. Først vælger han et naturligt tal r. Han må nu flytte en brik fra et felt til et andet hvis afstanden mellem de to felters centre er $\sqrt{r}$. Målet er at finde en række træk der kan flytte en brik fra det nederste venstre hjørne til det nederste højre. Vis at Georg ikke kan nå målet hvis r er delelig med 2 eller 3. Vis at Georg kan nå målet når $r = 73$.

Opgave 2.6. Til at starte med indeholder mængden S punktet $(7, 29)$. Det er nu tilladt at tilføje punkter til S på følgende måde

i) Hvis punktet (x, y) er i S, må man tilføje punktet $(x+1, y+1)$ til S.

ii) Hvis punktet (x, y) tilhører S, og x og y er lige, må man tilføje punktet $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ til S.

iii) Hvis punkterne (x, y) og (y, z) begge tilhører S, må man tilføje punktet (x, z) til S.

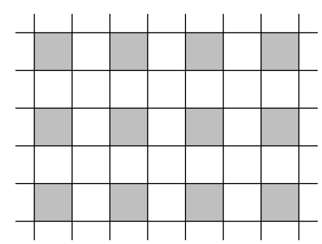
Er det muligt at tilføje et antal punkter til S så $(3, 2013)$ ligger i S?

3 Farvning

Mange opgaver kan løses ved at farvelægge de objekter man betragter, på en hensigtsmæssig måde. Dette er endnu en måde at konstruere en invariant på.

Eksempel 3.1. Et klassisk eksempel på dette er at et skakbræt hvor to diagonalt modsatte hjørner er fjernet, ikke kan dækkes med 1×2 brikker. En sådan brik dækker nemlig altid et hvidt og et sort felt uanset hvor den ligger, og der er derfor altid dækket lige mange sorte og hvide felter. Dette er en invariant. Når de to hjørner er fjernet, er der ikke lige mange sorte og hvide felter, og brættet kan derfor ikke dækkes af 1×2 brikker.

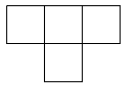
Eksempel 3.2. I foregående eksempel var farvningen allerede givet på forhånd, men nogle gange skal man selv finde på en smart farvelægning. I dette eksempel skal vi se på et rektangulært gulv som er dækket af 2×2 fliser og 1×4 fliser. Spørgsmålet er nu: Hvis en flise knækker, kan den så hvis man omarrangerer fliserne, erstattes af en flise af den anden type? Vi ønsker at finde en smart farvning der viser at dette ikke kan lade sig gøre, dvs. vi skal finde en farvelægning så de to flisetyper ikke kan dække lige mange felter af samme farve. Den traditionelle skakbrætfarvning virker ikke i dette tilfælde, men farvelægningen på figuren opfylder netop dette, og det viser at en enkelt flise ikke kan erstattes af en flise af den anden type.



Prøv selv at finde på smarte farvelægninger i de følgende opgaver, og husk at det ikke altid er nok med to farver.

Opgave 3.1. På et 7×7 bræt står en brik på hvert felt. To felter kaldes nabofelter hvis de har en side tilfælles. Er det muligt at alle brikker hver især flytter til et nabofelt så der efter at alle har flyttet, igen står netop en brik på hvert felt?

Opgave 3.2. Kan et skakbræt hvor alle fire hjørner er fjernet, dækkes af brikker af følgende type?



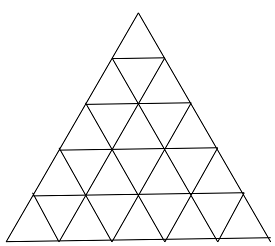
Opgave 3.3. På et 7×7 bræt står en brik på hvert felt. To felter kaldes nabohjørnefelter hvis de deler et hjørne, men ikke en side. Er det muligt at alle brikker hver især flytter til et nabohjørnefelt så der efter at alle har flyttet, igen står netop en brik på hvert felt?

Opgave 3.4. Kan et 8×8 skakbræt hvor et hjørne er fjernet, dækkes af 1×3 brikker?

Opgave 3.5. Kan et 13×13 skakbræt hvor det midterste felt er fjernet, dækkes af 1×4 brikker? (Baltic Way 1998)

Opgave 3.6. På et 50×50 bræt er markeret 117 felter. Vis at det altid er muligt at vælge mindst 30 af de 117 markerede felter så ingen af de 30 felter rører hinanden hverken med en side eller med et hjørne.

Opgave 3.7. På brættet vist på figuren sidder der netop en trænet loppe på hvert felt. Når man fløjter i en speciel loppefløjte, hopper hver loppe over på et felt der har en side tilfælles med det felt den kom fra. Hvor mange tomme felter er der minimum når der er fløjtet fem gange i fløjten?

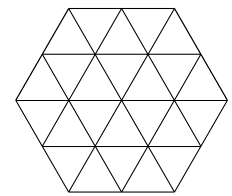


Opgave 3.8. Et 7×7 skakbræt er dækket af brikker af følgende to typer:

Type a Type b

Vis at der netop er en brik af type b. (Georg Mohr-Konkurrencen 1997)

Opgave 3.9. En regulær heksagon er inddelt i 24 regulære trekanter som vist på figuren.



Ved hvert af de 19 hjørner skrives et tal så der ikke er to ens tal. En trekant har nu tilknyttet tre tal. Hvis tallene vokser mod uret, farves trekanten rød, og hvis de vokser med uret, farves den blå. Bevis at der findes mindst syv trekanter af hver farve.

4 Konstruktion af invariant med vægte

Eksempel 4.1. I en skål er der 2000 hvide bolde. Uden for skålen er der masser af hvide, røde og grønne bolde. Følgende træk er tilladte:
To hvide bolde fjernes og erstattes af en grøn.
To røde bolde fjernes og erstattes af en grøn.
To grønne bolde fjernes og erstattes af en hvid og en rød.
En hvid og en grøn bold fjernes og erstattes af en rød.
En rød og en grøn bold fjernes og erstattes af en hvid.

a) Vis at når der efter et endeligt antal træk er netop tre bolde tilbage i skålen, da er mindst en af dem grøn.

b) Er et muligt efter et endeligt antal træk at ende med netop en bold i skålen?

For at løse opgaven vil vi forsøge at give en bold med en bestemt farve en vægt. Lad h, r og g være antallet af henholdsvis hvide, røde og grønne bolde, og lad x, y, z være vægten af henholdsvis en hvid, en rød og en grøn bold. Vi undersøger om vi kan vælge de tre vægte så $I = x\cdot h + y\cdot r + z\cdot g$ er invariant modulo et helt tal n. En sådan invariant skal opfylde at $2x \equiv z$, $2y \equiv z$, $2z \equiv x+y$, $x+z \equiv y$ og $y+z \equiv x \pmod{n}$. Her ud fra er det ikke svært at se at $I = 1\cdot h + (-1)\cdot r + 2\cdot g \pmod 4$ er en invariant. Til at starte med er $I = 1\cdot 2000 \equiv 0 \pmod 4$, dvs. der gælder altid at $I \equiv 0 \pmod 4$. Denne invariant kan vi nu bruge til at løse opgaven:

a) Hvis der er netop tre bolde tilbage, er $h+r+g = 3$. I dette tilfælde er der mindst en grøn, for hvis $g = 0$ er $h+r = 3$ og dermed $I = h - r \not\equiv 0 \pmod 4$.

b) Det er ikke muligt at ende med netop en bold, da $I = h - r + 2g \not\equiv 0 \pmod 4$, hvis $h+r+g = 1$.

Eksempel 4.2. Et skakbræt dækkes med 32 dominobrikker således at brikkerne dækker netop to felter hver. De brikker der ligger vandret, og hvis venstre del dækker et sort felt, kalder vi SH-brikker, og de brikker hvis venstre del dækker et hvidt felt, kalder vi HS-brikker. Vi ønsker at knytte en vægt til hvert af de enkelte felter på skakbrættet for at vise at der er lige mange af de to typer brikker. Ideen er at summen af de to felter der dækkes af en lodret brik, ikke skal have nogen indflydelse, dvs. den skal være 0, mens summen af de to felter dækket af en SH-brik skal have modsat fortegn af summen af to felter dækket af en HS-brik. Nummerer søjlerne 1-8 fra venstre mod højre. Alle sorte felter får tildelt nummeret fra den søjle de ligger i som vægt, og alle hvide felter får tildelt minus dette nummer. Alle brikker der ligger lodret, dækker nu to felter hvis sum er nul, mens SH-brikker dækker to felter hvis sum er -1, og HS-brikker dækker to felter hvis sum er 1. Da summen af samtlige felter er nul, må der være lige mange SH-brikker og HS-brikker.

Opgave 4.1. En kube med sidelængde $2n$ er sammensat af $4n^3$ brikker af formen $2\times 1\times 1$ som hver af sammensat af en hvidt og en sort enhedskube. Brikkerne ligger sådan at alle sidefladerne i de hvide enhedskuber støder op til sorte og omvendt. Vis at hvis man ser på alle de brikker der ligger lodret, så har halvdelen den hvide del opad og halvdelen den sorte del opad.

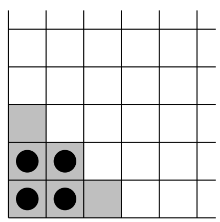
Opgave 4.2. Ved hvert hjørne i et kvadrat $ABCD$ ligger der til at starte med netop en sten, og ved siden af kvadratet er en kæmpe bunke med sten. Et træk består i at vælge et hjørne, fjerne et antal sten og lægge dobbelt så mange sten ved et af de to nabohjørner. Er det muligt efter et endeligt antal træk at få 2012 sten ved A, 2011 sten ved B, 2011 sten ved C og 2010 sten ved D?

Opgave 4.3. I følgen $1,0,1,0,1,0,\dots$ er hvert led fra og med det syvende summen af de seks foregående modulo 10. Vis at sekvensen $0,1,0,1,0,1$ ikke på noget tidspunkt er en del af følgen.

Opgave 4.4. Georg spiller følgende enmandsspil. I hvert felt på et 5×5 bræt står der 0. I hvert træk må han vælge et tilfældigt felt og lægge 1 til både tallet i feltet og tallene i alle de felter der har en side til fælles med feltet. Kan Georg opnå at der står 2012 på samtlige felter? (Baltic Way 2012)

Opgave 4.5. Til at starte med er der fire kongruente retvinklede trekanter med hypotenuse 1. I hvert træk må man vælge en trekant og erstatte den med de to mindre trekanter der fremkommer når man tegner højden fra den rette vinkel på hypotenusen. Er det muligt efter et endeligt antal træk at opnå en situation hvor der ikke er to kongruente trekanter?

Opgave 4.6. Brættet på figuren fortsætter uendeligt opad og til højre. Til at starte med er der placeret fire brikker som vist på figuren. I hvert træk må man fjerne en brik på et felt, hvis både feltet ovenfor og feltet til højre er tomme, og derefter placere en brik på hvert af disse felter. Vis at det ikke er muligt at få det grå område tømt for brikker. Er det muligt hvis der til at starte med kun er en brik på det nederste venstre hjørne at få det grå område tømt for brikker?



5 Monovarianter

Når noget ændrer sig, er det ikke altid man kan finde en bestemt størrelse der ikke ændrer sig modulo et helt tal, men man kan nogle gange i stedet finde en bestemt størrelse der enten kun vokser eller kun aftager, og dette kaldes en monovariant.

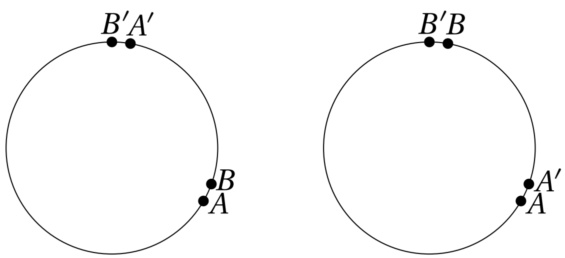
Eksempel 5.1. På et uendeligt spillebræt er der en lang række af felter, dvs. uendeligt mange til hver side. Til at starte med er der et endeligt antal brikker på brættet, gerne flere på hvert felt. I hvert træk må man vælge et felt med mindst to brikker, tage to brikker og flytte den ene til feltet umiddelbart til højre og den anden til feltet umiddelbart til venstre. Vi vil vise at det aldrig er muligt at nå tilbage til udgansgpunktet efter et endeligt positivt antal træk.

Vi forsøger at finde en monovariant. Nummerer felterne $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$. Vi ønsker at finde en størrelse der enten vokser eller aftager i hvert træk. I et træk flyttes to brikker på felt nummer n til henholdsvis felt $n-1$ og felt $n+1$. Her kan vi udnytte at $(n-1)^2+(n+1)^2 = 2n^2+2 > 2n^2$. Hvis vi fx vælger S lig summen af kvadratet på feltnummeret for hver brik, da vil S vokse med 2 for hvert træk, dvs. S er en monovariant. Det er derfor uanset udgangspunktet aldrig muligt at nå tilbage til udgangspunktet efter et endeligt positivt antal træk.

Eksempel 5.2. Til et middagsselskab skal $2n$ personer fordeles om et rundt bord. Hver person er venner med mindst n af de andre personer, og venskab er gensidigt. Vi vil vise at det altid muligt at placere de $2n$ personer rundt om bordet så alle sidder ved siden af to de er venner med.

Først placerer vi de $2n$ personer helt tilfældigt rundt om bordet. Idéen er nu lade P være antallet af par som sidder ved siden af hinanden og ikke er venner. Ved at vise at hvis $P > 0$, da kan vi flytte rundt på personerne så P bliver mindre, sikrer vi os at vi kan opnå en situation hvor P er 0.

Antag at A og B sidder ved siden af hinanden, at de ikke er venner, og yderligere at B sidder til højre for A. Da A har mindst n venner, er der mindst n personer der sidder til højre for en af A's venner. Blandt disse må være en af B's venner da B højst har $n-1$ personer han ikke er venner med blandt de n personer. Der findes altså et par A' og B' så A' er ven med A, B' er ven med B, og så B' sidder til højre for A' (se figuren til venstre). Nu tager vi og betragter rækken af personer fra B mod uret langs bordet til A' og sætter denne række af personer i modsat rækkefølge (se figuren til højre). På denne måde fjernes parrene (A,B) og (A',B'), parrene (A,A') og (B,B') tilføjes, og alle andre par bibeholdes. Derfor falder P med mindst 1.



I dette eksempel ønskede vi altså at opnå en bestemt situation og konstuerede derfor en monovariant der kunne ændres hvis den ønskede situation ikke var opnået. Dette er endnu en måde at benytte en monovariant på.

Opgave 5.1. I et rektangulært skema er der et positivt heltal i hvert felt. I hvert træk må man enten vælge en række og fordoble hvert tal i rækken, eller man må vælge en søjle og trække 1 fra hvert tal i søjlen. Er det muligt efter et endeligt antal træk at få der til at stå 0 i hvert felt?

Opgave 5.2. Ved hver kant i en n-kant står der et positivt reelt tal. Hvis tallene a,b,c,d står ved fire på hinanden følgende kanter og $(a-d)(b-c)<0$, da må man bytte om på b og c. Vis at denne proces ikke kan fortsætte i det uendelige, men må stoppe på et tidspunkt.

Opgave 5.3. I planen er givet n røde punkter og n blå punkter. Der findes ikke tre punkter der ligger på samme linje. Vis at det er muligt at tegne n rette linjestykker der forbinder de n røde punkter med de n blå punkter, så ingen af disse linjestykker skærer hinanden.

Opgave 5.4. I et kortspil er der n kort nummereret $1,2,3,\dots,n$. Georg blander kortene så de ligger i tilfældig rækkefølge i en bunke. Nu udfører Georg følgende operation: Hvis det øverste kort har værdien k, så tager han de k øverste kort og lægger dem i modsat rækkefølge i bunken, mens alle andre kort bliver hvor de er. Hvis Georg fortsætter med at udføre denne operation, er han så sikker på på et tidspunkt at få kortet med nummer 1 øverst?

Opgave 5.5. På en række står der 2013 positive heltal. I hvert træk konstrueres en ny række af positive heltal under den foregående række på følgende måde: Række nummer $n+1$ konstrueres ud fra række nummer n ved at der under hvert tal a i række n skrives det antal gange a optræder i række n. Bevis at der på et tidspunkt kommer to identiske rækker efter hinanden.

Opgave 5.6. Verdenerne i Verdenernes sfære er nummereret $1,2,3,\dots$, og de har forbindelse så der for ethvert positivt n gælder at troldmanden Gandalf kan bevæge sig i begge retninger mellem de tre verdener nummereret n, $2n$ og $3n+1$. Er det muligt for Gandalf at komme fra en vilkårlig verden til en vilkårlig anden verden? (Baltic Way 1997)

Opgave 5.7. Ved hjørnerne i en 1001 kant sidder mindst 501 frøer. Der kan sagtens være mere end en frø ved hvert hjørne. Hvert minut sker der følgende: Hvis der er mindst to frøer ved samme hjørne, da vil to af frøerne ved dette hjørne hoppe - en til hvert af de to nabohjørner. Vis at der efter et endeligt antal minutter vil opstå en situation hvor der er frøer ved mindst 501 af hjørnerne.

6 Flere udfordringer

Opgave 6.1. Et enmandsspil består af en cirkelskive med n røde knapper i en cirkel langs kanten, $n \geq 3$. Knapperne kan lyse, og fra starten er der netop en knap som lyser. Når man trykker på en knap som lyser, så slukkes den, og de to naboknapper skifter status, dvs. hvis de lyste så slukkes de, og omvendt. Hvis man trykker på en knap der ikke lyser, så sker der ingenting. Spillet vindes hvis man kan få slukket alle knapperne. For hvilke n er det muligt at vinde?

Opgave 6.2. Lad $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ være en følge af positive heltal. I hvert træk må man vælge to indeks j og k, $j < k$, hvor a_j ikke går op i a_k, og erstatte a_j med $\gcd(a_j, a_k)$ og a_k med $\operatorname{lcm}(a_j, a_k)$. Vis at det til sidst ikke længere er muligt at trække.

($lcm(a, b)$ står for det mindste fælles multiplum af a og b, altså det mindste positive heltal som både a og b går op i. Forkortelsen *lcm* står for *least common multiple*).

Opgave 6.3. Lad $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ være et polynomium af grad højst 3. Det er tilladt at udføre følgende to operationer på P.

a) Ombytte a med d og b med c.

b) Translatere variablen x til $x + t$, hvor t er et reelt tal.

Er det muligt efter et endeligt antal operationer at komme fra $P_1(x) = x^3 + x^2 - 2x$ til $P_2(x) = x^3 - 3x - 2$?

Opgave 6.4. På en række ligger der 31 forskellige kort. Det er nu tilladt at udføre følgende operationer:

a) Flytte det forreste kort om bagerst i rækken.

b) Tage de første 15 kort og placere det første i det første af de 15 mellemrum mellem de 16 resterende kort, det andet i det andet mellemrum, osv.

Hvor mange forskellige rækkefølger af de 31 kort kan man opnå?

Opgave 6.5. Et rektangel er inddelt i en række mindre rektangler. I de mindre rektangler er længden af mindst en side heltallig. Vis at dette også gælder for det store rektangel.

Opgave 6.6. På et uendeligt skakbræt spilles følgende spil. Til at begynde med er der n^2 brikker som står på et $n \times n$ kvadrat således at der er en brik på hvert felt. Et træk består i lade en brik hoppe hen over en nabobrik lodret eller vandret til et tomt felt lige på den anden side, og fjerne den brik man hopper henover.
Bestem samtlige værdier af n for hvilke det er muligt at ende med netop én brik på brættet. (IMO 1993)

Opgave 6.7. Ved et rundt bord sidder 1994 personer. Til at begynde med har en af personerne 1994 kort, mens resten ikke har nogen kort. I hver runde i et spil giver alle personer med mindst to kort, et kort til hver af sine naboer. Spillet stopper hvis hver person har højst 1 kort. Vil spillet på et tidspunkt stoppe?

Opgave 6.8. Ved hvert hjørne i en pentagon er et helt tal så summen af de fem tal er positiv. Hvis x, y, z er tre på hinanden følgende tal og $y < 0$, da må man erstatte x, y og z med henholdsvis $x + y, -y$ og $y + z$. Vis at det er muligt at opnå at alle fem tal er ikke-negative. (IMO 1986)

7 Løsninger

Opgave 1.1 Lad a være antallet af døre som fører ud af huset, og lad s være summen af antal døre i hvert rum. Da hvert rum har et lige antal døre, må s være lige da s er en sum af lige tal. Tallet $a+s$ svarer netop til det samlede antal døre gange 2, da hver dør her er talt med netop 2 gange, dvs. dens paritet er uafhængig af antallet af døre. Derfor er $a+s$ også lige. Altså kan vi slutte at a er lige.

Opgave 1.2 Til at starte med er der $\frac{1992}{2} = 996$ sedler med et ulige tal i hatten. Vi viser at pariteten af antallet af sedler med et ulige tal er invariant. Hvis vi trækker to ulige tal, lægger vi et lige tal retur, dvs. antallet af sedler med et ulige tal reduceres med 2. Hvis vi trækker to lige tal, lægger vi et lige tal retur, og antallet af sedler med et ulige tal er uændret. Det er også tilfældet hvis vi trækker et lige og et ulige tal, for så lægger vi et ulige tal retur. Da der er et lige antal sedler med ulige tal til at starte med, bliver der ved med at være et lige antal, og når der kun er en seddel tilbage, må den derfor indeholde et lige tal.

Opgave 1.3 Antag at det er muligt. Da linjen går gennem linjestykket P_iP_{i+1} ligger P_i og P_{i+1} på hver sin side af linjen. Dermed er pariteten af indekset af alle punkter på samme side af linjen invariant. Men dette er i modstrid med at linjen skærer linjestykket P_1P_{2013}. Altså er det ikke muligt.

Opgave 1.4 I hvert træk ændres pariteten af antallet af bolde af hver farve. Derfor er pariteten af antallet af røde bolde hele tiden modsat pariteten af antallet af gule bolde og pariteten af antallet af blå bolde. Når der kun er en farve tilbage, er der nul bolde af to af farverne, og det må derfor være de gule og blå bolde da deres antal har samme paritet. Det er derfor altid røde bolde der er tilbage når der kun er bolde af en farve.

Opgave 1.5 Hvis der er et lige antal ulige tal blandt $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, er der et ulige antal der er lige og omvendt. Antallet af ulige tal og antallet af lige tal blandt $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ har altså modsat paritet. Dermed må der blandt parrene $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_7, b_7)$ være et par som indeholder to lige eller to ulige tal. Differensen af dette par er derfor lige, og dermed vil

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_7 - b_7)$$

også altid være lige.

Opgave 1.6 Nej. Invariant: Alle tallene er ikke ens. Til at starte med er tallene ikke ens. Hvis tallene ikke alle er ens, er der et nul og et 1-tal ved siden af hinanden. Da der er et ulige antal tal i alt, vil der også være to ens tal ved siden af hinanden. Hvis man starter med en situation hvor alle tal ikke er ens, vil man derfor efter et træk igen have en situation hvor alle tallene ikke er ens. Derfor kan man ikke ende med lutter nuller.

Opgave 1.7 Felterne nummereres fortløbende $1, 2, 3, \ldots, 99$ så spiller nummer 1 starter på felt nummer 50, spiller nummer 2 på felt nummer 1 og spiller nummer 3 på felt nummer 99. Lad a være pariteten af forskellen mellem det felt spiller nummer 1 står på, og det felt spiller nummer 2 står på, lad b være pariteten af forskellen mellem det felt spiller nummer 1 og spiller nummer 3 står på, og lad c være pariteten af forskellen mellem det felt spiller nummer 2 og spiller nummer 3 står på. Til at starte med er $(a, b, c) = (u, u, l)$. Når spiller 1 har trukket er $(a, b, c) = (l, l, l)$. Situationen når det er spiller nummer 2 der skal trække, er invariant, da a, b og c skifter paritet to gange hver i løbet af en hel runde. Dermed er situationen altid (l, l, l) når spiller nummer to trækker, og det er derfor umuligt for spiller 2 at lande på samme felt som spiller nummer 1 eller 3.

Opgave 1.8 Lad S_n være antallet af talpar hvor det mindste står før det største i rækken, efter det n'te træk. Der er i alt $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ talpar, og til at starte med står det mindste før det største i alle par. Derfor er $S_0 = 45$. Efter m træk står det mindste tal i hvert par efter det største i parret, dvs. $S_m = 0$. I hvert træk laves der kun om på rækkefølgen af netop et par, dvs. S ændres med ± 1 i hvert træk. Derfor har S_n og n modsat paritet, og altså m ulige.

Opgave 2.1 Når ridderen hugger henholdsvis 2, 17, 23 eller 38 hoveder af dragen, ændres antallet af hoveder med henholdsvis +3, −12, −18 eller −33 når man regner dem med der vokser ud igen. Derfor er antallet af hoveder konstant modulo 3 efter at der igen er vokset 5 hoveder ud. Hvis ridderen skal kunne slå dragen ihjel, skal dragen inden sidste hug have 2, 17, 23 eller 38 hoveder, men da dragen til at starte med har $100 \equiv 1 \pmod 3$ hoveder, vil der aldrig være 2, 17, 23 eller 38 hoveder når ridderen skal til at hugge. Dermed kan ridderen ikke dræbe dragen.

Opgave 2.2 Bemærk først at hver gang to kamæleoner mødes, bliver der en færre af to af farverne og to mere af den tredje, dvs. forskellen i antallet af fx grønne og røde kamæleoner vil ændre sig med 0 eller 3 og altså være konstant modulo 3. Hvis alle kamæleoner på øen skal have samme farve, vil der ikke være nogen kamæleoner af to af farverne, dvs. forskellen mellem antallet af kamæleoner af disse to farver er 0. Forskellen mellem antallet af en farve kamæleoner og en anden kan aldrig blive 0, da den fra starten ikke er 0 modulo 3, og den ikke ændres modulo 3. Dermed kan det ikke ende med at der kun er en farve kamæleoner tilbage.

Opgave 2.3 Tallet 666 er deleligt med 9, og dermed er summen af dets cifre det også. Resten modulo 9 af de årstal hvor dyret vågner, er derfor invariant da alle disse årstal er kongruente med 0 modulo 9. Derfor vågner dyret ikke i 2013.

Opgave 2.4 Tallet $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ er invariant modulo 4, for hvis vi i celle (i, j) ændrer et 1-tal til et −1 eller omvendt, vil R_i og S_j begge ændre sig med ± 2, dvs. $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ ændres med −4, 0 eller 4.

Hvis der står 1 i hver celle, er $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i) = 2002 \equiv 2 \pmod 4$, dvs. der gælder altid at $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i) \equiv 2 \pmod 4$, og dermed er $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ forskellig fra 0.

Opgave 2.5 Nummerer søjler og rækker således at målet er at nå fra $(0,0)$ til $(19,0)$.

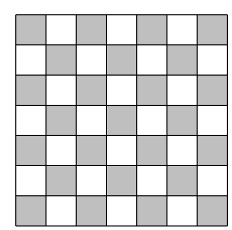
Hvis $r = 2s$, kan man rykke a felter lodret og b felter vandret hvis $a^2 + b^2 = 2s$. Dette betyder at a og b altid har samme paritet, hvilket viser at målet ikke kan nås.

Hvis $r = 3s$, skal $a^2 + b^2 = 3s$. Hvis man regner modulo 3, ses at da må a og b begge være delelige med 3 da de kvadratiske rester modulo 3 er 0 og 1. Dermed kan målet ikke nås.

For $r = 73$ opfylder $a = 3$ og $b = 8$ ligningen $a^2 + b^2 = 73$. Målet kan her opnås på følgende måde. $(0,0) \to (3,8) \to (11,5) \to (19,2) \to (16,10) \to (8,7) \to (0,4) \to (8,1) \to (11,9) \to (3,6) \to (11,3) \to (19,0)$.

Opgave 2.6 Forskellen på de to koordinater i punktet $(7,29)$ er delelig med 11. Vi påstår at det er en invariant der gælder alle de punkter som kan tilføjes til S. Hvis vi tilføjer et punkt efter regel i) ud fra et punkt hvor forskellen på de to koordinater er delelig med 11, da vil det nye punkt oplagt også opfylde dette. Hvis vi tilføjer et punkt efter regel ii) ud fra et punkt hvor koordinatforskellen er delelig med 11, da vil forskellen mellem koordinaterne i det nye punkt være halvt så stor, og dermed stadig delelig med 11. Hvis vi benytter regel iii) og tilføjer (x,z) ud fra (x,y) og (y,z) hvis koordinatforskel er delelig med 11, da vil det nye punkt også have denne egenskab da $x - z = (x - y) + (y - z)$. Punktet $(3,2013)$ kan derfor aldrig komme til at ligge i S da $2013 - 3 = 2010$ ikke er delelig med 11.

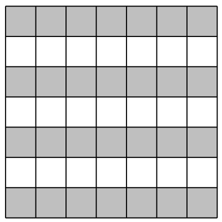
Opgave 3.1 Farv brættet som vist på figuren.



Da der er 25 grå felter og 24 hvide, og en brik flytter til et felt af modsat farve, kan det ikke lade sig gøre at der på hvert felt står netop en brik efter at alle brikker er flyttet.

Opgave 3.2 Nej. Ved den almindelige skakbrætsfarvning ser vi at de 30 hvide felter og 30 sorte felter skal dækkes af 15 brikker som hver dækker tre sorte og en hvid eller en sort og tre hvide.

Opgave 3.3 Farv brættet som vist på figuren.



Da der er 28 grå felter og 21 hvide, og en brik flytter til et felt af modsat farve, kan det ikke lade sig gøre at der på hvert felt står netop en brik efter at alle brikker er flyttet.

Opgave 3.4 Nej. Farv diagonalerne på skift i tre farver så det felt der er fjernet ligger i en diagonal af længde 1. Nu er der henholdsvis $1+4+7+6+3=21$, $2+5+8+5+2=22$ og $3+6+7+4=20$ felter af hver af de tre farver. Da en 1×3 brik dækker et felt af hver farve, er det ikke muligt at dække brættet af denne type brikker.

Opgave 3.5 Nej. Farv felterne i række 1, 5, 9 og 13 røde, felterne i række 2, 6 og 10 gule, felterne i række 3, 7 og 11 blå og felterne i række 4, 8 og 12 grønne. En brik dækker enten fire felter med forskellige farver eller fire felter med samme farve, dvs. differensen mellem antallet af felter der er malet røde, og antal felter der er malet gule, skal være delelig med 4 hvis brættes skal kunne dækkes. Men der er 52 røde felter og 39 gule.

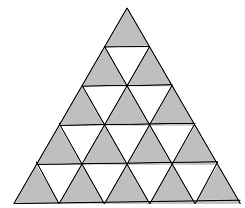
(Alternativt kan man bruge følgende farvelægning: I rækker med lige numre farves de to første felter hvide, de to næste sorte osv. I rækker med ulige numre modsat farvelægning.)

Opgave 3.6 Farv brættet i fire farver som vist på figuren.

1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4

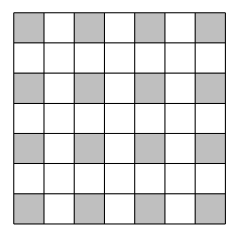
Da der er $117 > 29\cdot 4$ markerede felter, må der være mindst 30 markerede felter af samme farve. Disse felter opfylder det ønskede.

Opgave 3.7 Farv felterne som vist på figuren. Da der er 15 grå felter og 10 hvide felter, og lopperne efter et ulige antal fløjt er på et felt af modsat farve, kan der højst være 10 lopper på de grå felter efter fem fløjt. Der er derfor mindst fem tomme felter.



Det er muligt at opnå netop fem tomme felter: Lad hvert hvide felt danne par med det grå felt umiddelbart til venstre for feltet. Da har alle på nær de fem grå felter langs den højre kant af brættet en makker. Hvis lopperne der er på et felt som har en makker, hele tiden hopper frem og tilbage mellem disse to felter, da er der altid en loppe på disse felter. Efter fem fløjt er det derfor kun de fem felter langs brættets højre kant som er tomme.

Opgave 3.8 Farv brættet på følgende måde:



Da hver brik højst dækker et sort felt, skal der bruges mindst 16 brikker til at dække brættet. Da der er 49 felter, ses let at eneste mulighed er at bruge 15 brikker af type a og kun en af type b.

Opgave 3.9 For hver kant med tallet a i den ene ende og b i den anden ende, $a < b$, betragtes kanten således at a er til venstre og b er til højre, og der sættes en prik lige **over** kanten. Hver trekant indeholder nu en eller to prikker, og hvis den indeholder to prikker, er den rød, og hvis den indeholder en prik, er den blå. Hvis vi betragter de 12 ydre kanter, kan alle de 12 tilhørende prikker ikke alle ligge uden for heksagonen eller alle ligge inden i heksagonen, da der nødvendigvis er et mindste tal tilknyttet de 12 hjørner, og de to tilhørerne kanter derfor har en prik inde i heksagonen og en prik uden for heksagonen. Da der er 30 indre kanter, indeholder heksagonen derfor mindst 31 prikker og maksimalt 41 prikker, dvs. der er mindst 7 trekanter med to prikker, dvs. mindst 7 røde trekanter, og mindst 7 trekanter med en prik, dvs. mindst 7 blå trekanter.

Opgave 4.1 Nummerer de vandrette lag i kuben $1,2,3,\dots,2n$. Alle sorte enhedskvadrater får nu tildelt det nummer lag de tilhører som vægt, mens de hvide får tildelt dette nummer med modsat fortegn. Alle brikker der ligger vandret, består af to enhedskvadrater med sum nul, men de lodrette brikker der ligger med den sorte del opad, består af to enhedskvadrater med sum -1, og dem der ligger med den hvide ende opad, består af to med sum 1. Da summen af vægtene af samtlige enhedskvadrater er nul, ligger halvdelen af de lodrette brikker med den sorte ende opad og halvdelen med den hvide ende opad.

Opgave 4.2 Nej. Lad a, b, c og d betegne antal sten ved henholdsvis A, B, C og D. Vi ønsker at tildele stenene ved hvert hjørne en vægt så summen af vægtene er invariant modulo et eller andet helt tal. Hvis man fjerner n sten fra et hjørne, lægger man $2n$ sten ved et nabohjørne. Dermed ændres forskellen af sten ved de to hjørner med $3n$, dvs. $I = a-b+c-d$ ændres med $\pm 3n$. Altså er $I = a-b+c-d$ invariant modulo 3. Til at starte med er $I = a-b+c-d = 0 \equiv 0 \pmod 3$. Det er derfor umuligt at opnå $a = 2012$, $b = 2011$, $c = 2011$ og $d = 2010$ da dette giver $I = a-b+c-d = 2 \not\equiv 0 \pmod 3$.

Opgave 4.3 Vi ønsker at finde vægte $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ sådan at hvis $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ er seks på hinanden følgende led i følgen, da er $I = \sum_{i=1}^{6} v_i x_i$ konstant modulo et helt tal n. Det er oplagt at vælge $n = 10$. Betragt $I = 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+10x_5+2x_6 \pmod{10}$. Tallet I er invariant modulo 10 da

$$\begin{aligned} &2x_2+4x_3+6x_4+8x_5+10x_6+2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6) \\ &-(2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+10x_5+2x_6) = 10x_6 \equiv 0 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} 2\cdot 0+4\cdot 1+6\cdot 0+8\cdot 1+10\cdot 0+2\cdot 1 &\not\equiv \\ 2\cdot 1+4\cdot 0+6\cdot 1+8\cdot 0+10\cdot 1+2\cdot 0 & \end{aligned}$$

modulo 10, vil $0,1,0,1,0,1$ aldrig optræde i følgen.

Opgave 4.4 Vi ønsker at give hver felt en vægt sådan at summen af tallet i hvert felt gange feltets vægt øges med samme tal uanset hvilket felt Georg vælger. For at bestemme vægtene, opstiller vi nogle ligninger, og for ikke at få alt for mange ligninger, giver vi felter der ligger symmetrisk samme vægt. Vægtene kaldes henholdsvis a, b, c, d, e, f (se figur).

a	b	c	b	a
b	d	e	d	b
c	e	f	e	c
b	d	e	d	b
a	b	c	b	a

Vi ønsker altså at vælge vægtene så

$$\begin{aligned} a+2b = a+b+c+d = 2b+c+e = \\ 2b+d+2e = c+2d+e+f = 4e+f. \end{aligned}$$

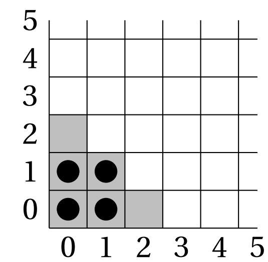
Ved at løse ligningssystemet er det ikke svært at nå frem til at $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$, $d = 2$, $e = 3$ og $f = 10$ er en mulighed løsning, og her øges den vægtede sum med 22 hver gang Georg vælger et felt. Til at starte med er den vægtede sum 0, og da summen er invariant modulo 22, vil den vægtede sum være et multiplum af 22 uanset hvilke felter Georg vælger og hvor mange gange. I den situation hvor der står 2012 i alle felter, er den vægtede sum

$$2012(4a+8b+4c+4d+4e+f) = 2012\cdot 138 = 2^3\cdot 3\cdot 23\cdot 503.$$

Da denne sum ikke er delelig med 22, kan Georg aldrig opnå denne situation.

Opgave 4.5 Nej. Kald længden af de to kateter for p og q. Hver gang man erstatter en trekant med to nye, bliver de to nye ensvinklede med den oprindelige, og hypotenusen bliver henholdsvis $\frac{1}{p}$ og $\frac{1}{q}$ af den oprindelige hypotenuse. Alle de trekanter man kan opnå, er derfor ensvinklede, og deres hypotenuse er $\frac{1}{p^n q^m}$ for to ikke negative heltal n og m. Vi tillægger nu en trekant med hypotenuse $\frac{1}{p^n q^m}$ vægten $\frac{1}{2^{p+q}}$. På den måde er den samlede vægt af trekanterne konstant da en trekant vil erstattes af to trekanter med halvt så stor vægt som den selv har. Til at starte med er den samlede vægt af trekanterne 4, og det vil den altså fortsætte med at være uanset hvordan man trækker. Hvis vi ser på vægten af alle de uendeligt mange mulige trekanter man kan opnå, talt netop en gang hver, er den også 4: Vægten af dem med hypotenuse $\frac{1}{p^n q^m}$ for et fast n er nemlig $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots = \frac{1}{2^{n-1}}$, og altså er den samlede vægt $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 4$. Da vi efter et endeligt antal træk kun har endeligt mange trekanter med samlet vægt 4, må der derfor altid være mindst to kongruente iblandt dem.

Opgave 4.6 Nummerer søjler og rækker som vist på figuren, og kald feltet i søjle i og række j for (i, j).



En brik på feltet (i, j) tillægges nu værdien $\frac{1}{2^{i+j}}$, for på denne måde forbliver den samlede værdi af brikkerne på brættet konstant da $\frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{(i+1)+j}} + \frac{1}{2^{i+(j+1)}}$. Til at starte med er værdien af de fire brikker $1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. Hvis der stod en brik på hvert felt på hele brættet, ville den samlede værdi af de uendeligt mange brikker være

$$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 4,$$

da værdien af alle brikker i første søjle er 2, værdien af brikkerne i næste søjle halvt så stor osv. Hvis der ikke er nogen brikker på det grå område, kan brikkernes samlede værdi derfor højst være $4-\frac{9}{4} = \frac{7}{4}$, dvs. det er ikke muligt at opnå at der ikke er brikker på det grå område når man starter med de fire brikker på figuren.

Hvis man starter med kun en enkelt brik i nederste venstre hjørne, så har brikkerne på brættet hele tiden en samlet værdi på 1. Antag at det er muligt at tømme det grå område for brikker. Efter hvert træk vil der hele tiden være netop en brik i den yderste venstre søjle og en brik i den nederste række. Hvis disse to brikker ikke skal være på det grå område, er deres værdi højst $\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. Det betyder at brikkerne der står på resten af brættet, har en samlet værdi på mindst $1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Hvis der stod en brik på hvert eneste felt på resten af brættet fraregnet det grå område, vill de have en samlet værdi på

$$4-2-1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

men dette er umuligt da der efter et endeligt antal træk ikke kan være uendeligt mange brikker. Hvis der kun står en enkelt brik i nederste venstre hjørne, er det derfor heller ikke muligt at tømme det grå område for brikker.

Opgave 5.1 Ja. Betragt først summen S af tallene i den første søjle. Hvis der er 1-taller i samtlige felter i første søjle, vælger vi første søjle og trækker 1 fra samtlige tal i søjlen. På denne måde opnår vi at der står 0 i hvert felt i første søjle. Hvis der er et eller flere 1-taller i første søjle (men ikke 1-taller i alle felter i søjlen), vælges de rækker der har et 1-tal i første søjle en efter en således at alle tallene i disse rækker fordobles. Derefter vælges den første søjle så der trækkes 1 fra hvert tal i søjlen. På denne måde reduceres S, og alle tal i søjlen forbliver positive. Hvis der ikke er nogen 1-taller i første søjle, så vælges søjlen så der trækkes 1 fra hvert tal i søjlen. På denne måde reduceres S også samtidig med at alle tal i søjlen forbliver positive. Ved at fortsætte på denne måde reduceres S hele tiden, og da S er et helt ikke-negativt heltal, må vi til slut ende med at der er nuller i hvert felt i søjlen. Læg mærke til at der stadig står positive tal i alle andre søjler.

Nu fortsætter vi på denne måde med næste søjle. Dette påvirker ikke den første søjle da den kun indeholder nuller. Ved at fortsætte på denne måde kan vi opnå at der til slut står 0 i alle felter.

Opgave 5.2 For at finde en monovariant undersøger vi først hvad der sker når vi bytter om på to tal. Hvis tallene a, b, c, d står ved fire på hinanden følgende kanter og $(a-d)(b-c)<0$, er $ab+cd<ac+bd$. Efter at vi har byttet om på b og c, kan vi se at summen af produkterne af alle par af tal der står ved to nabokanter, er vokset. Lad derfor S være summen af alle produkter af to tal der står ved to nabokanter på et bestemt tidspunkt. Som vi lige har set, vokser S hver gang vi bytter om på to tal, og S er derfor en monovariant. Da det altid er de samme n tal der står langs de n kanter, er der kun et endeligt antal muligheder for S, og når S vokser hver gang vi bytter om på to tal på to nabokanter, kan vi ikke fortsætte med dette i det uendelige.

Opgave 5.3 Tegn n rette linjestykker der forbinder de n røde punkter med de n blå punkter på en vilkårlig måde. Hvis der findes to linjestykker der skærer hinanden, da danner de fire involvedere punkter en konveks fikant $RRBB$ så linjestykkerne er diagonalerne i denne firkant, og R og B betegner henholdsvis røde og blå punkter. Nu erstatter vi de to diagonaler med de to sider RB og RB. Ifølge trekantsuligheden bliver den samlede længde af de n linjestykker mindre ved denne operation, dvs. summen af længerne af de n linjestykker er vores monovariant S. Da der kun er endeligt mange muligheder for at tegne de n linjestykker, kan S kun antage et endeligt antal forskellige værdier. Dermed kan vi ikke blive ved med at udføre operationen, hvilket betyder at vi på et tidspunkt vil opnå at de n linjestykker ikke skærer hinanden.

Opgave 5.4 Ja. Da der kun er endeligt mange rækkefølger for de n kort, vil kortene på et tidspunkt ligge i en rækkefølge som de også tidligere har ligget i. Rækkefølgen af kortene er altså periodisk fra et vist trin. Betragt alle de tal der har været på det øverste kort i denne periode, og lad m være det største. Efter at kortet m har ligget øverst, vil det ligge på plads nummer m. Da m er den største værdi på det øverste kort i perioden, kan m ikke ændre plads mere. Altså må $m=1$ da vi ved at perioden gentager sig, og altså at m igen vil være øverste kort.

Opgave 5.5 Hvis der i række n, $n>1$, står et m, må der være mindst m steder i rækken hvor der står m, da der i den foregående række var netop m forekomster af et bestemt tal. Hvis vi ser på tallene i hver af de 2013 søjler, så må tallene i hver søjle, hvis vi ser bort fra tallet i den første række, være en ikke aftagende følge af positive heltal. Desuden er denne følge begrænset opadtil da hvert tal højst er 2013. Derfor må følgen være konstant fra et vist trin, og på et tidspunkt vil der altså komme to identiske rækker efter hinanden.

Opgave 5.6 Vi viser at det altid er muligt for Gandalf at komme fra verden nummer n, $n > 1$, til en verden med mindre nummer. Dette viser nemlig at Gandalf fra en vilkårlig verden n, $n > 1$, kan komme til verden nummer 1, og da man derfor også kan komme fra verden nummer 1 til en vilkårlig verden n, kan han bevæge sig fra en vilkårlig verden til en vilkårlig anden verden.

Hvis $n = 3k + 1$, kan Gandalf komme til verden nummer k, hvor $k < 3k + 1 = n$.

Hvis $n = 3k + 2$, kan Gandalf bevæge sig således

$$3k + 2 \to 6k + 4 \to 2k + 1,$$

hvor $2k + 1 < 3k + 2 = n$.

Hvis $n = 3k$, kan Gandalf bevæge sig således

$$3k \to 9k + 1 \to 18k + 2 \to 36k + 4 \to 12k + 1 \to 4k \to 2k,$$

hvor $2k < 3k = n$.

Opgave 5.7 Bemærk først at hvis to nabohjørner på et tidspunkt ikke begge er uden frøer, da vil det fortsætte på den måde: Hvis et hjørne bliver uden frøer, vil det afgive en frø til hvert af de to nabohjørner. To nabohjørner kan derfor ikke blive uden frøer samtidig.

Hvis der på et tidspunkt opstår en situation hvor der ikke findes to nabohjørner uden frøer, da er der frøer ved mindst 501 af hjørnerne, og vi er færdige.

Antag derfor at der findes to nabohjørner der bliver ved med at være tomme uanset hvor lang tid der går. Nu nummererer vi hjørnerne $1, 2, 3, \dots, 1001$ i rækkefølge således at de to tomme hjørner er henholdsvis nummer 1 og nummer 1001. Til et givent tidspunkt har en frø samme nummer som det hjørne den er ved. Lad S være summen af kvadraterne på frønummeret for hver frø. Da $(n-1)^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2 > n^2$ vokser S med 2 hvert minut så længe der stadig findes et hjørne med mindst to frøer. Bemærk at dette kun holder fordi vi ved at der aldrig hopper frøer mellem hjørne 1 og hjørne 1001. Da S er begrænset opadtil, må der derfor til sidst opstå en situation hvor der højst er en frø ved hvert hjørne og dermed frøer ved mindst 501 hjørner.

Opgave 6.1 Vi ser først på tilfældet hvor n er delelig med tre. Knapperne inddeles i tre grupper således at hver gruppe indeholder hver tredje knap hele vejen rundt. Antal knapper der lyser i de tre grupper, kaldes henholdsvis a, b og c, og vi antager at $a = 1$ og $b = c = 0$ i startsituationen. Vi bemærker at hvis vi trykker på en knap fra en gruppe, så ændres a, b og c med ± 1, dvs. at $a - b$ ikke ændrer paritet. Pariteten af $a - b$ er altså en invariant. Fra starten er $a - b = 1$, dvs. at vi aldrig kan opnå $a = b = 0$ som ønsket.

Nu ser vi på tilfældet hvor n ikke er delelig med tre. Knapperne nummereres fortløbende $1, 2, \dots, n$ så knap nummer 1 der lyser fra starten. Ved at trykke på knap $1, 2, \dots, n-2$ i nævnte rækkefølge opnår vi en situation hvor alle knapper på nær nummer $n - 2$ lyser. Hvis n har rest 1 ved division med 3, da kan vi slukke dem alle i grupper af tre, for hvis man trykker på den midterste af tre lysende lamper, så slukkes de alle. Hvis n har rest 2 ved division med 3, da trykker vi først på knap $n-1$, og opnår en situation hver alle knapper på nær nummer $n-1$ og n lyser. Disse kan vi slukke på samme måde som før, da antallet er deleligt med tre, og de sidder på række.

Opgave 6.2 Bemærk først at produktet $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ er invariant da $a_j a_k = \gcd(a_j, a_k) \mathrm{lcm}(a_j, a_k)$. Antag at processen kan fortsætte i det uendelige, og lad a_m være det tal med det største indeks som bliver ved med at ændre sig. Fra et vist trin vil a_k, $k > m$, dermed ikke ændre sig mere. Fra et vist trin gælder derfor at hver gang m indgår i det par af indeks (j, m) der bliver valgt, er m den største, og det betyder at a_m erstattes med $\mathrm{lcm}(a_m, a_j)$. Da a_j ikke går op i a_m, vil $\mathrm{lcm}(a_m, a_j) > a_m$. Dermed vil a_m fra et vist trin vokse hver gang m er blandt de to indeks der vælges, hvilket er i modstrid med at produktet $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ er invariant.

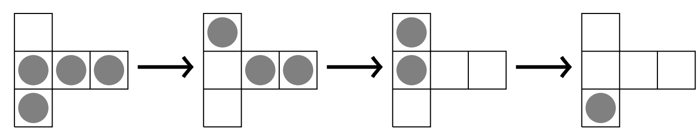
Opgave 6.3 Lad $R(P)$ være antallet af forskellige rødder i P hvis P har grad 3, og antallet af forskellige rødder plus 1 hvis P har grad mindre end 3. Da ændres R ikke ved operationerne a) og b): Hvis $x_0 \neq 0$ er rod i polynomiet $Q(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a = x^3(a\left(\frac{1}{x}\right)^3 + b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + c\left(\frac{1}{x}\right) + d)$, da er $\frac{1}{x_0}$ rod i polynomiet $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hvis $x = 0$ er rod i Q eller P, og dette polynomium har grad 3, da har det andet polynomium ikke grad 3 og en rod mindre. Hvis $x = 0$ er rod i Q eller P, og dette polynomium ikke har grad 3, da er $x = 0$ også rod i det andet polynomium, dvs. de har samme antal forskellige rødder. Dermed er R invariant ved operation a). Tallet R er oplagt invariant under operation b) da rødderne her blot translateres, og graden ikke ændres. Men $R(P_1) = 3$ da $P_1(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1)$, og $R(P_2) = 2$ da $P_2(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$, dvs. det er umuligt at komme fra P_1 til P_2.

Opgave 6.4 Kald de 31 kort $k_1, k_2, \ldots, k_{31}$, og læg kortene ved hjørnerne i en regulær 31-polygon $C_1C_2\ldots C_{31}$ således at k_1 ligger ved C_1 osv. Afstanden fra kortet ved C_i til kortet ved C_{i+j} defineres til j. Alle indeks og afstande regnes modulo 31. Ved operation a) flyttes alle kort netop en plads mod ventstre. Ved operation b) flyttes kortene ved $C_1, C_2, \ldots, C_{31}$ henholdsvis $1, 2, \ldots, 15, 16, \ldots, 30, 0$ pladser mod højre. Ved operation a) ændres afstanden fra k_i til k_{i+1} ikke, og ved operation b) ændres den til det dobbelte. Efter et antal operationer er afstanden fra k_i til k_{i+1} altså den samme for alle i, dvs. kender vi placeringen af k_1 og k_2, da kender vi placeringen af resten af kortene. Fra starten er afstanden fra k_1 til k_2 lig med 1. Efter $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ gange operation b) er afstanden fra k_1 til k_2 henholdsvis $1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, \ldots$, dvs. vi kan opnå netop 5 forskellige afstande fra k_1 til k_2. Desuden kan vi vha. et passende antal af operation a) opnå at k_1 ligger på en vilkårlig af de 31 pladser. Dermed kan man opnå $31 \cdot 5 = 155$ forskellige rækkefølger af de 31 kort.

Opgave 6.5 Læg et koordinatsystem så rektanglets nederste ventre hjørner er i $(0,0)$, og så koordinatsystemets akser er parallelle med rektanglets sider. Nummerer de mindre rektanglerne $1, 2, 3, \ldots, m$, og lad a_i være antallet hjørner i rektangel nummer i hvor begge koordinater er hele tal. Lad tilsvarende a være antallet af hjørner i det store rektangel hvor begge koordinater er hele tal. Da alle de mindre rektangler har mindst en side af heltallig længde, vil a_i være 0, 2 eller 4 for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Et hjørne i et rektangel er hjørne i enten 2 eller 4 rektangler (her tælles det store rektangel også med. Derfor er $a + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$ lige, og dermed må a også være lige. Da a er lige, og rektanglets ene hjørne er $(0,0)$, må mindst en af rektanglets sider have heltallig længde.

Opgave 6.6 Det er muligt at ende med en brik når n ikke er et multiplum af 3. Først viser vi at det ikke er muligt for $n = 3m$. Farv diagonalerne på brættet på skift i tre forskellige farver. Til at starte med står de $9m^2$ brikker på $3m^2$ felter af hver farve. I hvert træk vil der komme en brik mere på en af farverne, og en brik mindre på felter af hver af de to andre farver. Differensen mellem antal brikker på felter af to forskellige farver er derfor altid lige. Dermed kan man ikke ende med en brik på brættet.

Nu viser vi at det kan lade sig gøre når n ikke er et multiplum af 3. Her skal vi ikke udnytte nogen farvning, men blot finde en procedure der virker. Det ses nemt at det kan lade sig gøre for $n = 2$. Bemærk nu at hvis man har fire brikker placeret som på figuren, kan man fjerne de tre på række. Dette trick kan bruges til at reducere $n = 4$ til tilfældet $n = 2$.



Hvis $n \equiv 2 \pmod 3$, kan man fjerne baner på tre rækker brikker langs kanterne ved hjælp af tricket på figuren og dermed reducere til tilfældet $n = 2$. Hvis $n \equiv 1 \pmod 3$, $n > 1$, kan man på tilsvarende måde reducere til tilfældet $n = 4$.

Opgave 6.7 Nummerer personerne ved bordet $1, 2, 3, \ldots, 1994$ i denne rækkefølge så det er person nummer 1 der til at starte med har

1994 kort. Et korts værdi er på et givent tidspunkt nummeret på den person der holder det. Den samlede værdi af kortene kaldes S, og S er invariant modulo 1994 (overvej). Til at starte med er $S = 1994 \equiv 0 \pmod{1994}$. Spillet kan kun slutte hvis hver person har netop et kort. Hvis alle personer har netop et kort, er værdien af kortene $\frac{1994 \cdot 1995}{2} \equiv 997 \not\equiv 0 \pmod{1994}$, dvs. spillet slutter aldrig.

Opgave 6.8 Kald de fem tal x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, og betragt størrelsen

$$S = \sum_{i=1}^{5} \Big(|x_i| + |x_i + x_{i+1}| + |x_i + x_{i+1} + x_{i+2}| + |x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}| \Big)$$

hvor indeks regnes modulo 5. Hvis $x_i < 0$ og x_{i-1}, x_i og x_{i+1} erstattes af henholdsvis $x_{i-1} + x_i, -x_i$ og $x_i + x_{i+1}$, da vil S ændres med

$$|x_{i-2} + x_{i-1} + x_{i+1} + x_{i+2} + 2x_i| - |x_{i-2} + x_{i-1} + x_{i+1} + x_{i+2}| < 0.$$

Ulighedstegnet til slut kommer af at summen af de fem tal er positiv og x_i er negativ. Derfor må summen af de resterende fire tal være positiv, mens $2x_i$ er negativ.

Da vi kan bytte om på tallene så S falder så længe der er mindst et af tallene der er negativt, og da S er et positivt heltal, da må alle tal til slut være ikke-negative.