Grafteori

Dette er en introduktion til de vigtigste begreber i grafteori, udvalgt teori samt eksempler på opgavetyper inden for emnet med fokus på de opgavetyper der typisk er til internationale matematikkonkurrencer.

Indhold

1 Terminologi

Her er en række grundlæggende begreber. Der er desværre ingen standardterminologi inden for grafteori, så derfor er der flere steder tilføjet alternative betegnelser samt de engelske betegnelser.

Graf En graf er et par af mængder $G = (V, E)$ hvor V er en ikke-tom mængde af knuder, og E er en mængde af kanter så hver kant forbinder to knuder fra V med hinanden (eller evt. forbinder en knude med sig selv). Hvis $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, betegnes en kant som forbinder v_i og v_j, $v_i v_j$. Knuder kaldes også for *hjørner* eller *punkter*. (Engelsk: *graph, vertices, edges*).

Naboer To knuder kaldes naboknuder hvis der findes en kant som forbinder dem. En knude og en kant kaldes naboer hvis kanten forbinder knuden med en knude. (Engelsk: *neighbours*).

Delgraf En delgraf G' af G, er en graf $G' = (V', E')$ hvor $V' \subseteq V$ og $E' \subseteq E$. Delgrafen kaldes udspændende hvis $V' = V$. Delgrafen induceret af en delmængde V' af knudemængden V er delgrafen som har V' som knudemængde, og hvor kantmængden består af alle kanter fra E som forbinder to knuder fra V'. (Engelsk: *subgraph, spanning subgraph, the subgraph induced by*).

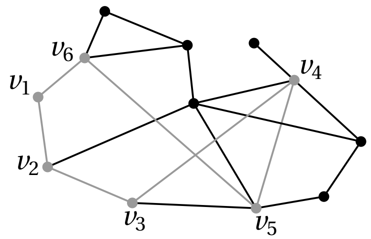
Valens En knudes valens er det antal kanter der støder op til knuden, dog tæller en kant der går fra knuden til knuden selv, dobbelt. Valensen af en knude v betegnes $d(v)$. Den maksimale valens af en knude i grafen betegnes Δ og den minimale valens δ. (Engelsk: *degree*).

Vandring En vandring af længde l er en følge af knuder og kanter $v_1, v_1 v_2, v_2, v_2 v_3, v_3, \dots, v_l v_{l+1}, v_{l+1}$ hvor der ikke er noget krav om at knuderne eller kanterne skal være forskellige. Ofte skriver man kun knuderne eller kun kanterne når man angiver vandringen. (Engelsk: *walk*).

Tur En tur af længde l er en vandring af længde l hvor kanterne er forskellige. (Engelsk: *trail*).

Sti En sti af længde l er en tur af længde l hvor alle knuderne er forskellige. En sti kaldes også en *vej*. (Engelsk: *path*).

Kreds En kreds af længde l er en tur af længde l hvor første og sidste knude er identiske mens alle andre knuder er forskellige. En kreds kaldes også en cykel. (Engelsk: *cycle*).



Figur: På grafen er markeret en kreds af længde seks.

Sammenhængende En graf kaldes sammenhængende hvis der mellem vilkårlige to knuder findes en sti fra den ene til den anden. En sammenhængskomponent er en delgraf som består af alle knuder som er forbundet med en sti til en given knude, samt alle kanter mellem de disse knuder. (Engelsk: *connected graph, connected component*).

Simpel graf En graf kaldes simpel hvis der ikke findes kanter som forbinder en knude med sig selv, og der ikke findes to kanter som forbinder samme par af knuder. (Engelsk: *simple graph*).

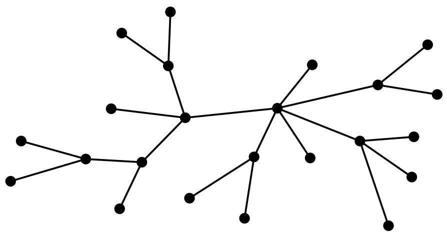
I det følgende betragter vi kun simple grafer med mindre andet er nævnt.

2 Træer

Træ Et træ er en sammenhængende graf som ikke indeholder en kreds. (Engelsk: *tree*).

Skov En skov er en graf som ikke indeholder en kreds. (Engelsk: *forest*).

Blad Et blad er en knude med valens 1. (Engelsk: *leaf*).



Figur: Træ med 15 blade.

Opgave 2.1. Vis at ethvert træ indeholder mindst Δ blade, hvor Δ betegner den maksimale valens af en knude i træet.

Opgave 2.2. Vis at ethvert træ kan konstrueres ved at starte med en knude og derefter tilføje et blad med en kant ad gangen.

Opgave 2.3. Vis at enhver sammenhængende graf indeholder en udspændende delgraf som er et træ, også kaldet et udspændende træ.

Karakteristik af træer
Hvis G er en sammenhængende graf med n knuder, da er følgende ækvivalent, dvs. hver betingelse er en tilstrækkelig og nødvendig betingelse for at grafen er et træ.

i) G indeholder ingen kreds.

ii) G indeholder netop $n-1$ kanter.

iii) To vilkårlige punkter er forbundet med netop en sti.

iv) Hvis man fjerner en vilkårlig kant, bliver grafen usammenhængende.

Opgave 2.4. Bevis sætningen.

3 Euler-grafer og orienterede grafer

Euler-tur En Euler-tur er en tur hvor alle kanter i grafen indgår netop en gang, og en lukket Euler-tur er en Euler-tur hvor man starter og slutter i samme knude. (Engelsk: *Eulerian trail, Eulerian circuit*).

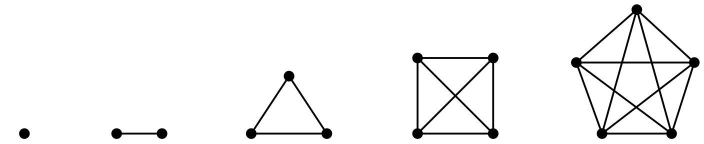
Euler-graf En graf der indeholder en lukket Euler-tur, kaldes en Euler-graf. (Engelsk: *Euler graph*).

Orienteret graf En orienteret graf er en graf hvor hver eneste kant har en retning. (Engelsk: *directed graph*).

Opgave 3.1. Vis at en graf er en Euler-graf netop hvis den er sammenhængende, og alle knuder har lige valens. Vis yderligere at hvis en graf er sammenhængende, og vi indfører en orientering på grafen, da er grafen en Euler-graf netop hvis der for hver knude gælder at antallet af kanter der udgår fra knuden, er lig antallet af kanter der ender i knuden.

4 Komplette grafer og Ramsey-tal

Komplet graf K_n Den komplette graf K_n er grafen som består af n knuder som alle parvis er forbundne med en kant, dvs. K_n indeholder $\binom{n}{2}$ kanter. (Engelsk: *complete graph*).

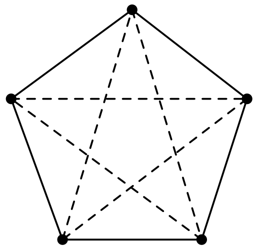


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Eksempel 4.1. I den komplette graf K_6 er alle kanter malet enten røde eller blå. I dette eksempel vil vi vise at der uanset hvordan kanterne er farvet, altid findes en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve. Vælg en tilfældig knude v. Da valensen af v er 5, må mindst tre af de fem kanter der udgår fra v, have samme farve, lad os sige rød. Betragt de tre knuder der er forbundet til v med en rød kant. Hvis blot to af disse knuder er forbundet med en rød kant, har vi en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er røde. Antag derfor at ingen af de tre knuder er indbyrdes forbundet med en rød kant. Da må de parvis være forbundet med blå kanter, og de udgør dermed en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er blå.

Ramsey-tal Ramsey-tallet $R(m_1, m_2, \dots, m_r)$ er det mindste tal p så der for alle komplette grafer K_n, $n \geq p$, gælder at uanset hvordan man farver kanterne i K_n med r farver, da findes mindst et $i = 1, 2, \dots, r$ så grafen indeholder en komplet delgraf K_{m_i} hvor alle kanter er farvet med farve nummer i. (Engelsk: *Ramsey number*).

Eksemplet ovenfor viser at $R(3,3) \leq 6$ da det viser at enhver komplet graf K_n, $n \geq 6$, hvor kanterne er malet med to forskellige farver, altid indeholder en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.



Man kan farve alle kanterne i K_5 med to farver så den ikke indeholder en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve. Kald knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, og farv fx kanterne $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1$ røde og resten af kanterne blå. Da indeholder grafen ingen delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve, og dette viser at $R(3,3) = 6$.

Opgave 4.1. Vis at $R(3,3,3) \leq 17$. (Ramsey-tallet $R(3,3,3)$ er lig 17, men man har først for nylig fundet en farvning af K_{16} med tre farver så den ikke indeholder en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve).

Opgave 4.2. Er det muligt at farve kanterne i K_6 røde og blå så der ikke findes en ensfarvet kreds af længde fire?

Opgave 4.3. Ved et busstoppested står ni personer. Vis at der enten findes fire personer blandt disse som alle er venner, eller tre personer hvor ingen af dem er venner, mens at dette ikke altid er tilfældet hvis en af personerne forlader busstoppestedet. (Venskab er gensidigt).

Opgave 4.4. I en badmintonklub er der 18 spillere hvor nogle har spillet mod hinanden mens andre ikke har. Vis at der enten findes fire spillere som alle har spillet mod hinanden, eller fire spillere hvor ingen har spillet mod hinanden. Vis yderligere at det ikke altid er tilfældet hvis der kun er 17 spillere i klubben.

Sætning 4.2. Der gælder at

$$R(m_1, m_2) \leq R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1).$$

Når begge led på højresiden er lige, er ulighedstegnet skarpt.

Bevis Sæt $N = R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1)$ og betragt en to-farvning (rød og blå) af kanterne i K_N. Lad v være en knude i denne graf. Hvis v er forbundet til $R(m_1 - 1, m_2)$ andre knuder med røde kanter, da findes der enten blandt disse $R(m_1 - 1, m_2)$ knuder m_2 knuder som alle er forbundet med blå kanter, eller $m_1 - 1$ knuder som alle er forbundet med røde kanter, og i det sidste tilfælde vil de $m_1 - 1$ knuder sammen med v udgøre m_1 knuder som alle er forbundne med røde kanter. Altså indeholder grafen i dette tilfælde enten en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf. Antag at v ikke er forbundet til $R(m_1 - 1, m_2)$ andre knuder med røde kanter. Da må v være forbundet til $R(m_1, m_2 - 1)$ knuder med blå kanter, og med samme argument som før medfører dette at grafen enten indeholder en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf. Dermed er $R(m_1, m_2) \leq R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1)$.

Sidste del af sætningen bevises i en opgave.

Opgave 4.5. Bevis resten af sætningen.

Eksempel 4.3. I nogle sammenhænge hvor man kan bruge grafteori, er det ikke altid helt oplagt hvordan man kommer fra problemstilling til graf. Betragt følgende problemstilling: Er det muligt at farve tallene $1, 2, \ldots, 16$ i tre forskellige farver så der ikke findes tre ikke nødvendigvis forskellige tal af samme farve så det ene er summen af de to andre? Det er umiddelbart svært at se den direkte relation til grafteori, men den kan løses grafteoretisk på følgende måde: Farv tallene $1, 2, \ldots, 16$ i tre forskellige farver. I den komplette graf K_{17} med knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_{17}$ farves kanten mellem v_i og v_j samme farve som tallet $|j - i|$. Ifølge opgave 4.1 ved vi at der da findes tre knuder som er forbundet med kanter af samme farve, dvs. knuder v_i, v_j og v_k, $i < j < k$, hvor $k - j$, $k - i$ og $j - i$ har samme farve. Da $(k - j) + (j - i) = k - i$ findes tre tal i samme farve hvor det ene er summen af de to andre. Dermed er det umuligt at farve tallene $\{1, 2, \ldots, 16\}$ i tre forskellige farver så der ikke findes tre (ikke nødvendigvis forskellige) tal i samme farve hvor det ene er summen af de to andre.

Opgave 4.6. Er det muligt at farve tallene $1, 2, 3, \ldots, 1978$ i seks forskellige farver så der ikke findes tre (ikke nødvendigvis forskellige) tal x, y, z i samme farve så $x + y = z$? (Variant af IMO 1978 opgave 6)

Opgave 4.7. I en komplet graf med ni knuder er kanterne enten røde, blå eller slet ikke farvede. Lad n betegne antallet af farvede kanter. Bestem den mindste værdi af n så der altid findes tre knuder som er forbundet af kanter af samme farve. (IMO 1992)

I dette afsnit har vi bestemt $R(3,3)$, $R(3,4)$ og $R(4,4)$, men det er ikke nogen nem opgave at bestemme Ramsey-tal for blot lidt større tal hvilket følgende Paul Erdös citat illustrerer: ”Imagine an alien force, vastly more powerful than us, demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for R(6,6). Then we should attempt to destroy the aliens.”

5 Kantmaksimal og -minimal deling

I mange problemstillinger er man interesseret i at dele knudemængden i disjunkte ikke-tomme delmængder som tilsammen indeholder hele knudemængden, så der bliver flest eller færrest muligt kanter mellem knuder i forskellige delmængder. Dette kaldes henholdsvis en kantmaksimal eller en kantminimal deling.

Eksempel 5.1. Kantminimal deling Betragt følgende problemstilling: I et land er der 37 byer som ligger på 14 øer så der er mindst en by på hver ø. Mellem hvert par af byer der ligger på forskellige øer, er der en flyrute. Det oplyses at byerne er fordelt på øerne så der er færrest muligt forskellige flyruter. Hvordan ligger byerne fordelt? Intuitivt får man hurtigt en fornemmelse af at man skal placere en by på hver ø og resten på den sidste. For at bevise dette identificerer vi byerne med knuder og betragter den komplette graf med 37 knuder. Da der er et endeligt antal knuder, findes der en kantminimal deling af de 37 knuder i 14 delmængder, dvs. en deling i 14 disjunkte ikke-tomme delmængder så antallet af kanter mellem knuder i forskellige delmængder er minimalt. Antag at vi har en kantminimal deling i 14 delmængder samt at der findes to delmængder med mere end en knude, lad os sige a knuder i den ene og b i den anden, $a \geq b > 1$. Hvis vi flytter en knude fra den delmængde med b knuder til den med a knuder, får vi $a-(b-1) > 0$ færre kanter mellem knuder i forskellige delmængder, hvilket er i modstrid med at delingen var kantminimal. Dermed er der i en kantminimal deling en knude i hver delmængde på nær en som indeholder resten af knuderne, og oversat til byer, øer og flyruter betyder dette at der er færrest flyruter når der er 24 byer på en ø og en på hver af de andre 13.

Eksempel 5.2. Kantmaksimal deling Nu vil vi se på en problemstilling hvor vi skal se på en deling med flest muligt kanter mellem knuder i forskellige delmængder. Vi vil vise at det for enhver graf er muligt at dele dens knuder i to disjunkte delmængder så hver eneste knude har mindst lige så mange naboer i den anden delmængde som i sin egen delmængde. Lad G være en graf, og vælg en kantmaksimal deling af knuderne fra G i to disjunkte delmængder. Dette er muligt da der er et endeligt antal knuder. Antag at der findes en knude v så v har flere naboer i sin egen delmængde end i den anden. Ved at flytte

v over i den anden delmængde opnår vi en ny deling med flere kanter fra den ene del til den anden, hvilket er i modstrid med at den valgte deling var kantmaksimal. Dermed opfylder en kantmaksimal deling i to delmængder at alle knuder har mindst lige så mange naboer i den anden del som i sin egen, og der findes derfor en deling med denne egenskab.

Opgave 5.1. Vis at det for enhver graf med mindst n knuder er muligt at dele dens knuder i n disjunkte ikke-tomme delmængder, som tilsammen indeholder hele knudemængden, så hver eneste knude har mindst lige så mange naboer i enhver anden delmængde som i sin egen delmængde.

Opgave 5.2. Lad G være en graf hvor $\Delta(G) \leq 3$. Vis at det er muligt at farve alle knuderne i G enten blå eller røde så hver sammenhængskomponent af delgraferne induceret af henholdsvis de røde eller de blå knuder maksimalt indeholder to knuder.

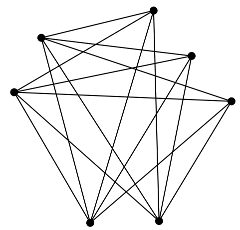
Opgave 5.3. For alle grafer G hvor $\Delta(G) \leq m$ er det muligt at farve alle knuderne i G med maksimalt n farver så enhver sammenhængskomponent af en delgraf induceret af alle knuder af en bestemt farve indeholder maksimalt to knuder. Bestem den maksimale værdi af m.

6 Turan-grafer og n-delte grafer

n-delt En graf kaldes n-delt hvis dens knudemængde V kan deles i n disjunkte ikke-tomme delmængder $V_1, V_2, \ldots, V_n$, $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n = V$, så ingen knuder fra samme delmængde er naboer. En n-delt graf er komplet hvis enhver knude er nabo med samtlige knuder som ikke ligger i samme delmængde. (Engelsk: n-*partite*)

Opgave 6.1. Vis at en graf er todelt netop hvis den ikke har en kreds af ulige længde.

Turan-graf Turan-grafen $T^r(n)$ er den komplette r-delte graf med n knuder, $r \leq n$, hvor forskellen mellem antallet af knuder i to delmængder højst er 1.



Figur: Turan-grafen $T^3(7)$.

Opgave 6.2. Vis at blandt alle r-delte grafer med n knuder, $r \leq n$, er det Turan-grafen $T^r(n)$ der har flest muligt kanter.

Turans sætning For hele tal n og r, $n \geq r > 1$, er en kantmaksimal graf G med n knuder som ikke indeholder K_{r+1} som delgraf, en Turan-graf $T^r(n)$.

Turans sætning kan vises ved induktion efter n, men den kan også vises ved at benytte knudekopiering, som vi skal se i følgende bevis.

Bevis Fra opgave 6.2 ved vi at blandt de komplette m-delte grafer med n knuder er Turan-grafen $T^m(n)$ den med flest kanter, og det er desuden oplagt at $T^r(n)$ indeholder flere kanter end $T^m(n)$ når $m < r$, så vi skal blot vise at en kantoptimal graf G med n knuder som ikke indeholder K_{r+1} som delgraf, er en komplet multidelt graf. At en graf er komplet og multidelt, er det samme som at det at være ikke-nabo er en ækvivalensrelation på grafens knuder, dvs. en graf er komplet multidelt, netop hvis der for alle $x, y, z \in V$ gælder at hvis xy og yz ikke er kanter i G, da er xz heller ikke en kant i G. Vi antager derfor at grafen G ikke er komplet mulidelt, dvs. vi antager at der findes knuder x_1, x_2, y så $x_1 y$ og $y x_2$ ikke er kanter i G, mens $x_1 x_2$ er en kant i G. Hvis $d(x_i) > d(y)$ for et $i = 1, 2$, da sletter vi knuden y og laver en kopi af knuden x_i. Den nye graf G' kan ligesom G ikke indeholde K_{r+1} som delgraf, og G' indeholder $d(x_i) - d(y) > 0$ flere kanter end G. Hvis $d(x_i) \leq d(y)$ for $i = 1, 2$, da konstruerer vi en ny graf G' ved at slette både x_1 og x_2 fra G samt lave to nye kopier af y. Grafen G' kan ligesom G ikke indeholde K_{r+1} som delgraf, og den må have $2d(y) - d(x_1) - d(x_2) + 1 > 0$ flere kanter end G. Dermed er G ikke kantoptimal, og da der findes en kantoptimal graf med n knuder som ikke indeholder K_{r+1}, må den være komplet multidelt, og dermed som vi så tidligere, Turan-grafen $T^r(n)$.

Opgave 6.3. I et land er der 1000 lufthavne hvor nogle er forbundet med flyruter. For vilkårlige tre lufthavne er to af dem ikke forbundet med en flyrute. Hvor mange flyruter kan der maksimalt være?

Opgave 6.4. I en graf G med ni knuder er der for vilkårlige fem knuder mindst to kanter der forbinder nogle af disse knuder. Hvor mange kanter må G mindst have?

7 Stier og kredse

Eksempel 7.1. Lad G være en graf, og antag at $\delta \geq 2$. Da indeholder G en kreds af længde mindst $\delta + 1$. For at indse dette vælger vi en tilfældig knude v_1 fra G, derefter en nabo v_2 til v_1, en nabo v_3 til v_2, osv. indtil dette ikke længere er muligt, så alle knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_s$ er forskellige. Da v_s har mindst δ naboer, og disse alle må være blandt knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$ da det ikke er muligt at komme videre, kan vi konstruere en kreds ved at vælge den nabo til v_s som har det mindste indeks. Hvis dette indeks kaldes i, er $v_i v_{i+1}, \ldots, v_s v_i$ en kreds af længde mindst $\delta + 1$.

Opgave 7.1. Lad G være en sammenhængende graf med n knuder. Vis at der findes en sti af længde mindst $\min(2\delta, n-1)$.

8 IMO eksempler

Nu skal vi se på nogle eksempler fra IMO. Ingen af opgaverne er formuleret som opgaver i grafteori, men den første opgave oversættes nemt til grafteori, hvorimod det i den sidste kræver en rigtig god idé at se hvordan man kan benytte grafteori til at løse opgaven.

Eksempel 8.1. Til en matematikkonkurrence er nogle deltagere venner. En gruppe deltagere som alle er venner, kaldes en klike, og antallet af personer i en klike kaldes dens størrelse. Antag at størrelsen af den største klike blandt deltagerne er $2n$. Vis at det er muligt at placere alle deltagerne i to lokaler så den største klike i det ene lokale har samme størrelse som den største klike i det andet lokale.(IMO 2007 Opgave 3)

I dette eksempel er det nemt at oversætte opgaven til en grafteoretisk opgave, men det er ikke nemt at løse opgaven. Det er meget svært at angive præcist hvordan delingen skal være, og i stedet laver vi først en deling som ikke altid virker, og justerer den til den virker.

Betragt en klike af maksimal størrelse $2n$ og lad W være mængden af deltagere i denne klike. Først placerer vi alle deltagere i W i lokale X og resten i lokale Y. Lad $k(X)$ og $k(Y)$ betegne den maksimale størrelse af en klike i henholdsvis lokale X og Y på et givent tidspunkt. Hvis vi flytter en deltager fra X til Y, så falder $k(X)-k(Y)$ med 1 eller 2. Hvis vi fortsætter med at flytte deltagere på denne måde, kan vi opnå at $k(X)-k(Y)$ er 0 eller -1. Der er stadig en del arbejde endnu, men det overlades til læseren.

Eksempel 8.2. Lad n være et positivt lige tal. Vis at der findes en permutation $x_1, x_2, \dots, x_n$ af tallene $1, 2, \dots, n$ så der for alle i, $1 \le i \le n$, gælder at x_{i+1} er et af følgende tal $2x_i, 2x_i - 1, 2x_i - n, 2x_i - n - 1$ (her er $x_{n+1} = x_1$). (IMO shortlist 2002)

I dette eksempel er sammenhængen til grafteori absolut ikke indlysende, men derimod subtil.

Lad G være en orienteret graf med $m = \frac{n}{2}$ knuder nummereret $1, 2, \dots, m$ samt $2m$ kanter nummereret $1, 2, \dots 2m$. Kanten med nummeret $2i-1$ går fra knude i til knude $2i-1 \pmod m$, og kanten nummereret $2i$ går fra knude i til knude $2i \pmod m$. Dermed er der to kanter som udgår fra hver knude i, og to som ender i hver knude i, nemlig kanterne nummereret i og $i+m$. (Bemærk at grafen ikke er simpel).

Vi viser ved induktion at grafen uden orientering er sammenhængende, ved at vise at der findes en sti mellem knude nummer k og knude nummer 1 for alle $k = 1, 2, \dots, m$. Det er oplagt at der findes en sti mellem knude nummer 2 og knude nummer 1 da kant nummer 2 forbinder de to knuder. Antag at knuderne $2, 3, \dots, k$ er forbundet med en sti til knude nummer 1. Dermed må også knude nummer $k+1$ være forbundet med en sti til knude nummer 1, da den er forbundet med en kant til en knude med lavere nummer, og dette fuldfører induktionen.

Da grafen uden orientering er sammenhængende, og der for hver knude er lige så mange kanter der udgår fra knuden, som kanter der ender i knuden, ved vi at der findes en lukket Euler-tur og grafen dermed er en Euler-graf.

Betragt en Euler-tur i grafen. Vi konstruerer nu permutationen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ved at lade x_i være nummeret på den i'te kant i denne Euler-tur. Kanten nummereret x_i ender i knuden nummereret j, og kanten nummereret x_{i+1} udgår fra knuden nummereret j, og dermed ved vi fra konstruktionen af grafen at $x_i \equiv j \pmod m$ og $x_{i+1} = 2j$ eller $x_{i+1} = 2j - 1$. Dvs. $2x_i \equiv 2j \pmod{2m = n}$ og dermed $x_{i+1} \equiv 2x_i - 1 \pmod n$ eller $x_{i+1} \equiv 2x_i \pmod n$ som ønsket.

9 Blandede opgaver

Opgave 9.1. I en turnering spiller 20 hold mod hinanden. Den første dag spiller alle hold netop en kamp, og den anden dag spiller alle hold igen netop en kamp denne gang mod et nyt hold. Vis at det efter anden dag er mulig at vælge 10 hold som endnu ikke har spillet mod hinanden. (Illustrer situationen med en graf).

Opgave 9.2. Nasa ønsker at lave 2004 små beboelser på Mars. Den eneste måde at komme fra beboelse til beboelse er gennem borede tunneler. En bureaukrat tegner et kort over de 2004 beboelser og tegner N tunneler mellem beboelser tilfældigt på kortet så hvert par af beboelser højst har en tunnel mellem sig. Hvad er den mindste værdi af N der garanterer, at uanset hvordan bureaukraten tegner tunnelerne, så er det muligt rejse mellem to vilkårlige beboelser?

Opgave 9.3. I en klasse er der 49 elever en ved hvert af 49 borde placeret i syv rækker og syv søjler. Er det muligt at flytte eleverne så hver elev flytter til et nabobord i samme række eller samme søjle, samtidig med at der efter at alle har flyttet netop sidder en elev ved hvert bord?

Opgave 9.4. På en danseaften har enhver af de tilstedeværende herrer danset med mindst en af de tilstedeværende damer, og enhver dame har ligeledes danset med mindst en af herrerne. Der findes ingen herre der har danset med samtlige damer, og ingen damer der har danset med samtlige herrer. Bevis at der findes to herrer og to damer så de to herrer har danset med præcis en af de to damer og omvendt.

Opgave 9.5. Til en fest er der $2n+1$ personer hvor n er et positivt heltal. Når man vælger en gruppe blandt deltagerne på højst n personer, findes der altid en person uden for gruppen, som er venner med alle i gruppen. Vis at der findes en festdeltager som er venner med alle til festen.

Opgave 9.6. Den Forunderlige Ø's efterretningstjeneste har 16 spioner i Tartu. Hver af dem overvåger nogle af sine kolleger, men der er intet par af spioner der overvåger hinanden. Desuden ved man at hvis man udtager ti tilfældige spioner, kan de nummereres så nummer 1 overvåger nummer 2, nummer 2 overvåger nummer 3 osv., og den tiende desuden overvåger nummer 1. Vis at man også kan gøre dette med 11 tilfældigt valgte spioner. (BW 1994)

Opgave 9.7. Antag at G er en sammenhængende graf med k kanter. Vis at det er muligt at nummerere kanterne $1,2,3,\dots k$ så hver knude som er forbundet med mindst to kanter, opfylder at største fælles divisor af tallene på alle de tilstødende kanter er 1. (IMO 1991)

Opgave 9.8. I en stor gruppe af mennesker er nogle venner med hinanden. Hver dag holder en person en fest for alle sine venner, og alle personens venner bliver til festen venner med hinanden. Dette fortsætter indtil alle personer har holdt fest. Vis at hvis to personer i gruppen efter alle disse fester stadig ikke er venner, så bliver de det heller ikke selv om man fortsætter med at holde fester på denne måde.

Opgave 9.9. Lad K_n være den komplette graf med n knuder. Det er nu tilladt at vælge en kreds af længde fire, fjerne en kant fra den, vælge endnu en kreds af længde fire fra den nye graf, fjerne en kant, osv. så længe det er muligt. Bestem det mindste antal kanter der kan være tilbage til slut. (IMO 2004 Shortlist)

Opgave 9.10. I en gruppe med n personer, $n>6$, har hver person præcis tre venner som personen udveksler postkort med. Vis at det er muligt at dele gruppen i to grupper så hver person udveksler postkort med mindst to personer fra sin egen gruppe.

10 Løsningsskitser

Opgave 2.1 Hvis $\Delta = 0$ er det trivielt. Antag derfor at $\Delta \geq 1$, og vælg en knude v med maksimal valens Δ. For hver kant fra v vælges en sti der starter i v og fortsætter langs kanten til den ender i et blad. Da grafen er et træ og dermed ikke indeholder nogen kreds, ved vi at den må ende i et blad, og at to stier der udgår fra v langs to forskellige kanter, nødvendigvis ender i to forskellige blade. Dermed indeholder grafen mindst Δ blade.

Opgave 2.2 Da ethvert træ med mindst to knuder indeholder mindst et blad, kan man hele tiden fjerne et blad indtil der kun er en knude tilbage. Ved at tilføje bladene i omvendt rækkefølge konstrueres det oprindelige træ.

Opgave 2.3 Vælg en knude, og konstruer en delgraf ved hele tiden at vælge en nabo som endnu ikke er valgt, til en af de allerede valgte knuder og tilføj kanten mellem dem. På den måde får vi tilføjet alle knuder da grafen er sammenhængende, og den delgraf vi ender med, kan ikke indeholde en kreds pga. konstruktionen. Den er derfor et træ.

Opgave 2.4 Først viser vi at i) og iii) er ækvivalente: Hvis en graf indeholder en kreds, vil to knuder i kredsen være forbundet med to forskellige stier, og hvis to knuder er forbundet med to forskellige stier, da findes to knuder som ligger på begge disse stier så de to delstier mellem disse to knuder ikke har fælles kanter, og grafen indeholder dermed en kreds.

Nu viser vi at i) og ii) er ækvivalente: Antag nemlig at en sammenhængende graf med n knuder er et træ. Da et træ kan konstrueres ved at starte med en knude og derefter tilføje et blad ad gangen, må grafen indeholde præcist $n-1$ kanter. Antag omvendt at en sammenhængende graf med n knuder indeholder netop $n-1$ kanter. Da indeholder den et udspændende træ, og da dette træ har $n-1$ kanter, må det være identisk med grafen. Dermed er grafen et træ.

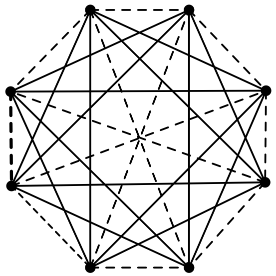
Nu mangler vi kun at vise at i) og vi) er ækvivalente: Antag at en graf ikke indeholder en kreds. Hvis man fjerner en kant mellem to knuder, kan disse to knuder ikke længere være forbundet med en sti, da grafen ellers ville indeholde en kreds, og dermed er den usammenhængende. Hvis en sammenhængende graf omvendt opfylder at hvis man fjerner en kant da bliver den usammenhængende, kan den ikke indeholde en kreds, da man kan fjerne en kant fra en kreds uden at grafen bliver usammenhængende.

Opgave 3.1 Det er oplagt at en graf ikke kan være en Euler-graf hvis den indeholder en knude med ulige valens. Antag nu at samtlige knuder i en graf har lige valens. Vi begynder i knuden v_1 og laver en tur der er så lang så mulig. Da alle knuder har lige valens, må vi nødvendigvis ende i knuden v_1. Hvis turen indeholder samtlige kanter, har vi en lukket Eulertur. Hvis ikke, må der da grafen er sammenhængende, findes en ikke passeret kant som støder op til en knude v_2 som er indeholdt i turen. Med udgangspunkt i denne knude laves en ny tur der nødvendigvis må ende i v_2. Denne nye tur sættes ind i den gamle så vi har en lukket tur. Da der kun er endelig mange kanter, kan vi fortsætte på den måde til vi har en lukket tur der indeholder samtlige kanter. Sidste del vises på tilsvarende vis.

Opgave 4.1 Lad kanterne i K_{17} være farvet røde, grønne og blå. Vi ønsker at vise at der findes en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve. Vælg en tilfældig knude v. Da v er forbundet til 16 knuder, findes mindst seks knuder som er forbundet til v med samme farve kant, lad os sige rød. Hvis to af disse knuder er forbundet med en rød kant, har vi en delgraf K_3 hvor alle kanter er røde. Antag derfor at der ikke er to knuder blandt de seks som er forbundet med en rød kant. Da udgør de seks knuder og de tilhørende kanter en komplet delgraf K_6 hvor kanterne er malet enten grønne eller blå, og da $R(3,3) = 6$ findes en delgraf K_3 af denne graf hvor alle kanter har samme farve.

Opgave 4.2 Nej. Da $R(3,3) = 6$ findes tre knuder v_1, v_2, v_3 som er forbundet med kanter af samme farve, lad os sige rød. Hvis blot en af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med røde kanter til to af knuderne v_1, v_2, v_3, har vi en ensfarvet kreds af længde fire. Antag derfor at de højst er forbundet til en af knuderne v_1, v_2, v_3 med en rød kant. Hvis to af knuderne v_4, v_5, v_6 begge er forbundet til de samme to knuder blandt v_1, v_2, v_3 med blå kanter, er der også en ensfarvet kreds af længde fire. Vi antager derfor yderligere at det er der ikke, hvilket betyder at hver af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med en rød kant til netop en af knuderne v_1, v_2, v_3, og at det for to af dem ikke er den samme. Vi kan dermed wlog antage at v_1v_4, v_2v_5 og v_3v_6 er røde. Men dette betyder at der kommer en rød kreds af længde fire hvis to af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med en rød kant. Antag derfor at de alle er forbundet af blå kanter. I dette tilfælde er der en blå kreds v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_2, og der vil dermed altid være en ensfarvet kreds af længde fire.

Opgave 4.3 Hvis vi identificerer personerne med knuder og forbinder hvert par af knuder med en blå kant hvis de tilhørende personer er venner, og en rød kant hvis de ikke er venner, så svarer opgaven til at vise at $R(3,4)=9$. Betragt den komplette graf K_8 med knuderne $v_1, v_2, \dots v_8$.



Farv alle kanter mellem to knuder hvor forskellen mellem deres indices har rest 1, 4 eller 7 ved division med 8, røde, og farv alle andre kanter blå. Da findes hverken en delgraf K_3 hvor alle kanter er røde, eller en delgraf K_4 hvor alle kanter er blå (overvej). Dermed er $R(3,4)>8$.

Lad alle kanter i K_9 være farvet enten røde eller blå. Vi ønsker at vise at da findes enten en delgraf K_3 hvor alle kanter er røde, eller en delgraf K_4 hvor alle kanter er blå. Hvis der findes en knude hvor fra der udgår mindst fire røde kanter, da er enten to blandt disse forbundet med en rød kant, eller også er alle disse fire knuder parvis forbundet med blå kanter hvilket giver en rød delgraf K_3 eller en blå delgraf K_4. Antag derfor at alle knuder højst er forbundet med tre røde kanter. Alle knuder kan ikke være forbundet med netop tre røde kanter da der er et ulige antal knuder. Dermed findes en knude v som er forbundet med mindst seks blå kanter, men da $R(3,3)=6$ ved vi at der blandt disse knuder findes tre som er forbundet med kanter af samme farve, og dermed udgør de enten en rød K_3 eller sammen med v en blå K_4. Dermed har vi vist at $R(3,4)=9$.

Opgave 4.4 Hvis vi identificerer spillerne med knuder og forbinder hvert par af knuder med en rød kant hvis de tilhørende spillere har spillet mod hinanden, og en blå kant hvis de ikke har, da svarer opgaven til at vise at $R(4,4)=18$. Betragt den komplette graf K_{17} med knuderne $v_1, v_2, \dots, v_{17}$. En kant mellem to knuder hvor forskellen i deres indices er 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16, farves røde. En kant mellem to knuder hvor forskellen i deres indices er 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, farves blå. Denne graf indeholder ingen delgraf K_4 hvor alle kanter har samme farve: Placer de 17 knuder i en cirkel. Hvis fire knuder skal udgøre en rød K_4, skal de fire *afstande* mellem knuderne rundt i cirklen være fire tal blandt 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16. Eneste muligheder er $1,1,2,13$, eller $1,4,4,8$ eller $2,4,4,9$. Ligegyldig hvilken rækkefølge disse afstande placeres i, vil der være to modstående knuder som ikke er forbundet af en rød kant. På tilsvarende måde udelukkes at der findes en blå K_4 ved denne farvning. Altså er $R(4,4)>17$. Betragt nu den komplette graf K_{18} hvor kanterne er malet røde eller blå. Lad v være en vilkårlig knude. Da v er forbundet med 17 kanter, er mindst ni af disse af samme farve, lad os sige røde. Disse ni knuder og de tilhørende kanter udgør en komplet delgraf K_9, og da $R(3,4)=9$, ved vi at denne graf enten indeholder en komplet delgraf K_4 hvor alle kanter er blå, eller en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er røde, og denne delgraf udgør sammen med v fire knuder der alle er forbundet parvis med røde kanter. Dermed er $R(4,4)=18$.

Opgave 4.5 Antag at $R(m_1-1,m_2)$ og $R(m_1,m_2-1)$ er lige. Vi viser indirekte at i dette tilfælde gælder der skarpt ulighedstegn. Antag at $N=R(m_1,m_2)=R(m_1-1,m_2)+R(m_1,m_2-1)$. Da findes en to-farvning (rød og blå) af kanterne i K_{N-1} så den ikke indeholder en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf. Lad v være en knude i denne graf. Lad $d_r(v)$ betegne antallet af røde nabokanter til v, og $d_b(v)$ betegne antallet af blå nabokanter til v. Da må $d_r(v)<R(m_1-1,m_2)$ og $d_b(v)<R(m_1,m_2-1)$, for ellers findes der som vi så i beviset, en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf, og da $d_r(v)+d_b(v)=R(m_1-1,m_2)+R(m_1,m_2-1)-2$, må $d_r(v)=R(m_1-1,m_2)-1$ og $d_b(v)=R(m_1,m_2-1)-1$. Dette gælder for alle knuder i grafen, men dette er umuligt da der er et ulige antal knuder i grafen og $R(m_1-1,m_2)-1$ er ulige. Dermed er uligheden i dette tilfælde skarp.

Opgave 4.6 Nej. Stort set på samme måde som i eksempel 4.3 antager vi at alle tallene $1,2,\dots,1978$ er farvet med seks forskellige farver, og farver kanter i K_{1979} efter følgende princip: Kanten v_iv_j farves samme farve som tallet $|i-j|$. Hvis der findes tre knuder v_i, v_j og v_k, $i<j<k$, så kanterne mellem dem har samme farve, da findes tre tal $k-j$, $j-i$ og $k-i$ i samme farve så det tredje er summen af de to første. Vi skal derfor blot vise at

$R_6(3) = R(3,3,3,3,3,3) \leq 1979$. Vi ved at $R_3(3) = 17$. Dermed må $R_4(3) \leq 66$, for hvis kanterne i K_{66} er malet i fire forskellige farver, da findes for en vilkårlig knude v mindst 17 kanter i samme farve som udgår fra v til 17 knuder, hvor enten to er forbundet med en kant af denne farve, eller alle er forbundet med kanter i de tre andre farver, og i begge tilfælde findes en ensfarvet delgraf K_3. På samme måde indses at $R_5(3) \leq 327$ og $R_6(3) \leq 1958 < 1979$ hvilket viser det ønskede.

Opgave 4.7 Først viser vi at der findes en farvning af 32 af kanterne så der ikke findes en blå eller rød K_3 delgraf. Lad fire af knuderne v_1, v_2, v_3, v_4 danne en kreds hvor kanterne er røde, mens v_1v_3 og v_2v_4 ikke er farvede, og fire andre knuder w_1, w_2, w_3, w_4 danne en kreds hvor kanterne er blå, mens w_1w_3 og w_2, w_4 ikke er farvede. Kanten mellem v_i og w_j farves rød hvis i og j har samme paritet, og ellers blå. Den sidste knude kaldes x. Kanten fra x til v_i, $i = 1,2,3,4$, farves blå, og kanten fra x til w_i, $i = 1,2,3,4$, farves rød. Denne graf har 32 farvede kanter, men ingen delgraf K_3 med kanter i samme farve. (Overvej.)

Vi mangler at vise at for $n = 33$ kan vi altid finde en ensfarvet delgraf K_3. Der er tre kanter som ikke er farvede. Vælg en naboknude til hver af disse kanter. De resterende seks (eller flere) knuder udgør nu sammen med de tilhørende kanter en komplet graf hvor alle kanter er blå eller røde, og da $R(3,3) = 6$ findes en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.

Opgave 5.1 Lav en kantmaksimal deling i n delmængder.

Opgave 5.2 Inddel knuderne i to disjunkte mængder så antallet af kanter fra den ene mængde af knuder til den anden er størst muligt. Da er hver knude højst forbundet med en anden knude der ligger i samme mængde som den selv (overvej), og hvis vi farver knuderne i den ene mængde rød og knuderne i den anden blå, opfylder farvningen betingelserne.

Opgave 5.3 Den maksimale værdi af m er $2n-1$. Det er ikke muligt at farve knuderne i K_{2n+1} i n farver så hver sammenhængskomponent af delgraferne induceret af alle knuder af samme farve maksimalt indeholder to knuder. Dermed er $m < 2n$. Lad G være en graf hvor $\Delta(G) = 2n-1$. Lad $V_1, V_2, \ldots V_n$ være en kantmaksimal deling af knudemængden i n disjunkte delmængder, og farv alle knuder i V_i farve nummer i. Da ved vi ifølge opgave 5.1 at hver knude har mindst lige så mange naboer i hver af de andre delmængder som i sin egen, og dermed er den nabo til højst en knude i sin egen delmængde, hvilket giver det ønskede.

Opgave 6.1 Hvis en graf er todelt, må to naboknuder ligge i hver sin del, og dermed må hver anden knude på en kreds ligge i den ene del, hvilket betyder at alle kredse i en todelt graf må have lige længde. Antag at en graf ikke har kredse af ulige længde. Vælg en knude v, og farv den rød. Farv derefter dens naboer grønne, deres naboer røde, osv. indtil alle knuder i sammenhængskomponenten som indeholder v, er farvede. Antag at der under farvningen er en knude w der både skal farves rød og grøn. Dette betyder at der både er en vej fra v til w af lige længde og en af ulige længde, og disse to må tilsammen indeholde en kreds af ulige længde hvilket er en modstrid. Dermed er farvningsproceduren entydig, og denne farvning giver en todeling af sammenhængskomponenten. På denne måde kan alle sammenhængskomponenter todeles, og dermed er grafen todelt.

Opgave 6.2 Det er oplagt at den r-delte graf med flest muligt kanter skal findes blandt de komplette r-delte grafer. Antag at G er en komplet r-delt graf, samt at der findes to knudedelmængder V_i og V_j så $|V_i| \geq |V_j| + 2$. Ved at flytte en knude fra V_i til V_j fjerner vi $|V_j|$ kanter og får $|V_i| - 1$ nye kanter, og da $|V_i| - 1 > |V_j|$, kan G ikke være kantmaksimal. Da der er et endeligt antal knuder og dermed et endeligt antal af måder at fordele dem i r disjunkte ikke-tomme delmængder, må der findes en graf som er kantmaksimal, og det må netop være $T^r(n)$.

Opgave 6.3 Hvis vi oversætter situationen til en graf, skal vi finde det maksimale antal kanter for en graf G med 1000 knuder hvor G ikke indeholder K_3 som delgraf. Fra Turans sætning ved vi at $T^2(1000)$ er kantmaksimal blandt alle grafer med 1000 knuder som ikke indeholder K_3 som delgraf, og $T^2(1000)$ har $500^2 = 250000$ kanter, dvs. der er maksimalt 250000 flyruter.

Opgave 6.4 Lad G være en graf med ni knuder $v_1, v_2, \ldots, v_9$ så hvis man vælger fem vilkårlige knuder, da indeholder G mindst to kanter mellem nogle af disse fem knuder. Betragt grafen $\overline{G}$ som består af de samme knuder som G, men hvor to knuder er naboer i $\overline{G}$ netop hvis de ikke er det i G. Hvis $\overline{G}$ indeholder K_4 som delgraf med knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, da må $v_5, v_6, \ldots, v_9$ hver være naboer i G til mindst to knuder blandt v_1, v_2, v_3, v_4, og dermed indeholder G mindst 10 kanter. Hvis $\overline{G}$ ikke indeholder K_4 som delgraf, kan den ifølge Turans sætning ikke have flere kanter end $T^3(9)$, og dermed kan G ikke have færre kanter end $\overline{T^3(9)}$ som har ni kanter. Da $\overline{T^3(9)}$ opfylder at hvis man vælger fem vilkårlige knuder, da indeholder den mindst to kanter mellem nogle af disse fem knuder, er ni et egentligt minimum.

Opgave 7.1 Lad $v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1}$ være en sti i G af maksimal længde. Antag at $l < \min(2\delta, n-1)$. Da stien har maksimal længde, må både v_1 og v_{l+1} udelukkende være naboer med knuder som allerede er en del af stien. Både v_1 og v_{l+1} er naboer med mindst δ andre knuder. Lad V_1 være mængden de knuder som v_1 er nabo til, og lad V_2 være mængden af de knuder v_i hvor $v_{i+1} \in V_1$. Da er V_2 en delmængde med mindst δ knuder af mængden $\{v_1, v_2, \dots v_l\}$, og da v_{l+1} er nabo til mindst δ knuder blandt $\{v_1, v_2, \dots v_l\}$, og $l < 2\delta$, må v_{l+1} være nabo til en knude fra V_2. Kald denne knude v_i. Da er $v_{i+1} \in V_1$, dvs. at v_1 er nabo til v_{i+1}. Dermed er $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{l+1}, v_l, v_{l-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$ en kreds af længde $l+1$. Da $l < n-1$ findes knuder i grafen som ikke er en del af denne kreds, og mindst en af disse er nabo til en knude fra kredsen da grafen er sammenhængende. Dermed danner denne knude sammen med alle knuderne fra kredsen en sti af længde $l+1$ hvilket er i modstrid med at den maksimale længde af en sti var l. Dermed findes en sti af længde mindst $\min(2\delta, n-1)$.

Eksempel 8.1 Hvis $k(X) - k(Y) = 0$ er vi færdige. Antag derfor at $k(X) - k(Y) = -1$, og lad $k(X) = l$ og $k(Y) = l+1$. Hvis der findes en deltager fra W i lokale Y som ikke tilhører hver eneste klike af størrelse $l+1$ i lokale Y, kan vi flytte denne til lokale X og opnå $k(X) = l+1 = k(Y)$ som ønsket. Antag derfor at alle $2n-l$ deltagere fra W som er i lokale Y, er medlem af alle kliker i Y af størrelse $l+1$. Hver $l+1$ klike fra lokale Y indeholder dermed præcis $l+1-(2n-l) = 2(l-n)+1 \geq 1$ deltagere som ikke er i W. Dermed kan vi vælge en $l+1$ klike fra Y og flytte en deltager fra denne, som ikke er i W, til X. Vi fortsætter på denne måde til der ikke er flere $l+1$ kliker i Y. Vi påstår nu at $k(x) = l = k(Y)$. Antag nemlig modsat at der findes en $l+1$ klike i X. Medlemmerne i denne klike må pga. konstruktionen være venner med alle $2n-l$ deltagere fra W som er i Y, og dermed findes der blandt alle deltagerne en klike på $2n+1$ deltagere, hvilket er i modstrid med at den største klike havde $2n$ medlemmer. Dermed er $k(X) = k(Y)$ efter denne konstruktion.

Opgave 9.1 Lad 20 knuder repræsentere de 20 hold, og forbind to knuder med en rød kant hvis de tilhørende hold har spillet mod hinanden første dag, og en blå kant hvis de har spillet mod hinanden anden dag. Alle knuder har valens to da hver knude er forbundet med netop en blå og en rød kant, og derfor må hver sammenhængskomponent være en kreds af lige længde (skiftevis røde og blå kanter). Fra hver sammenhængskomponent vælges hver anden knude i kredsen, og på denne måde får man ti knuder hvor ingen er forbundet med hinanden.

Opgave 9.2 Vi oversætter problemstillingen til en graf på den oplagte måde. Den kantmaksimale ikke-sammenhængende graf med 2004 knuder må have to sammenhængskomponenter som begge er komplette delgrafer. Det er nemt at se at den kantmaksimale graf netop består af en komplet delgraf med 2003 knuder samt en delgraf med en knude. Dermed er den minimale værdi af $N = \binom{2003}{2} + 1$.

Opgave 9.3 Identificer hver plads med en knude, og antag det er muligt at omrokere eleverne som beskrevet. Hvis en elev flytter fra en plads til en anden, lader vi en kant forbinde de to knuder som repræsenterer pladserne, og desuden farver vi kanten rød hvis flytningen foregår inden for samme række. Dermed opnår vi en graf hvor alle sammenhængskomponenter er en kreds, og hver kreds har lige længde da den består af et lige antal røde kanter og et lige antal ufarvede kanter, hvilket er i modstrid med at grafen har 49 knuder. Dermed er en sådan omrokering umulig.

Opgave 9.4 Identificer herrerne og damerne med knuder i en graf, og lad to knuder være naboer hvis de tilhørende personer har danset. Vælg en herreknude v_1 med maksimal valens. Der findes ifølge antagelserne en dameknude som ikke er nabo til v_1. Vælg nu en herreknude v_2 som er nabo til denne dameknude. Da v_1 havde maksimal valens blandt herreknuderne, findes en dameknude som er nabo til v_1, men ikke med v_2.

Opgave 9.5 Betragt festdeltagerne som knuder, og forbind to knuder med hinanden hvis deltagerne er venner. Vælg først en knude v_1. Da findes en knude v_2 som er forbundet med v_1. Der findes yderligere en knude v_3 som er forbundet med både v_1 og v_2. På denne måde kan vi fortsætte indtil vi har $n+1$ knuder som alle er forbundet med hinanden, dvs. grafen indeholder en komplet K_{n+1}-delgraf. Vælg nu de n knuder som ikke er en del af delgrafen K_{n+1}. Da findes en knude fra K_{n+1} som er forbundet med alle disse n knuder, og dermed er denne knude forbundet med samtlige knuder i grafen.

Opgave 9.6 Vi konstruerer en orienteret graf ved at identificere spionerne med knuder og lader der være en kant fra v til w hvis v overvåger w. Når man udtager ti tilfældige knuder, skal der for hver knude udgå mindst en kant til en af de ni andre knuder samt ende mindst en kant som udgår fra en af de ni andre knuder. Derfor udgår der mindst syv kanter fra hver knude, og der ender mindst syv kanter i hver knude. Der findes altså for hver knude højst en anden knude som knuden ikke er nabo til.

Antag nu at en gruppe på 11 knuder ikke kan nummereres som omtalt. Antag yderligere at der findes mindst en knude blandt de 11 som er nabo til alle de 10 andre knuder, og lad v være en sådan. Nummerer de ti resterende $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ så der går en kant fra v_1 til v_2, en kant fra v_2 til v_3, …, og en kant fra v_{10} til v_1. Vi er sikre på at der findes mindst en af de 10 hvorfra der går en kant til v, lad os sige v_1. Hvis der går en kant fra v til v_2, vil $v_1, v, v_2, \dots, v_{10}$ give den ønskede rækkefølge, så det er umuligt, og der går dermed en kant fra v_2 til v. På denne måde ses at der går en kant fra alle 10 til v, hvilket er en modstrid. Dermed må enhver af de 11 knuder have præcis en blandt de andre 10 som de ikke er nabo til, men dette kan ikke lade sig gøre da 11 er ulige. Vores startantagelse om at en gruppe på 11 tilfældige knuder ikke kan nummereres som ønsket, er altså forkert.

Opgave 9.7 Den grundlæggende idé er at udnytte at to på hinanden følgende tal er indbyrdes primiske. Vælg en tilfældig knude v, og vælg en tur fra v der er så lang så mulig, og kald knuden hvor turen ender for w (knuden kan være identisk med v). Nummerer turens kanter fortløbende. Alle de passerede knuder opfylder nu betingelsen da to af deres kanter er nummererede med to på hinanden følgende tal. Knuden v har en kant med tallet 1, og knuden w har enten kun én nabokant, eller også har den to nabokanter der er nummererede med to på hinanden følgende tal (eller også er den lig v), så de opfylder begge betingelsen. Vælg nu en ny knude som allerede har en nummereret kant, og følg samme procedure som før. Da grafen er sammenhængende, kan man på denne måde nummerere samtlige kanter så grafen opfylder betingelserne.

Opgave 9.8 Opfat personerne i gruppen som knuder i en graf, og lad to knuder være forbundet hvis de er venner. Vi viser nu at når alle personerne har holdt en fest, så er hver eneste sammenhængskomponent blevet en komplet graf. Dette viser nemlig det ønskede.

Lad G være en sammenhængskomponent inden festerne starter, og lad G' være dette sammenhængskomponent efter alle festerne. Antag at der er to knuder v og w som ikke er naboer i G'. Da G er sammenhængende, findes en sti mellem v og w i G. Lad nu $v, v_1, v_2, \dots, v_s, w$ være en kortest mulig sti fra v til w i G. Når v_i holder en fest, vil de to naboer i stien blive venner, og der opstår en ny sti som er en kant kortere end den gamle. Når $v_1, v_2, \dots, v_s$ alle har holdt fest (i en eller anden rækkefølge) er stien mellem v og w reduceret fra at være en sti af længde $s+1$ til en sti af længde 1, og v og w er dermed naboer i G' hvilket er i modstrid med antagelsen. Dette viser det ønskede.

Opgave 9.9 Det er muligt at ende med n kanter, men ikke med færre. Først viser vi at det er muligt med n, og det gør vi ved at se på en graf med n knuder og n kanter og derfra udføre processen baglæns til vi ender med K_n. Lad G være en graf med knuderne $v_1, v_2, \dots, v_n$ så to knuder med to på hinanden følgende indeks er forbundet med en kant, og v_1 og v_3 yderligere er forbundet med en kant. Denne graf har n kanter. Knuden v_4 er forbundet med en sti af længde tre til knuderne v_1, v_2, v_3 og kan derfor forbindes med disse når man udfører det tilladte træk baglæns. Dermed opnås at knuderne v_1, v_2, v_3, v_4 udgør en komplet graf med fire knuder. Tilsvarende er v_5 nu forbundet med en sti af længde tre til knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, og der kan derfor tilføjes en kant mellem v_5 og disse knuder så de tilsammen udgør en komplet graf med fem knuder. Ved at fortsætte på denne måde ender vi med K_n.

Nu viser vi at det er umuligt at ende med $n-1$ eller færre kanter. Ved den beskrevne proces bliver grafen ved med at være sammenhængende, dvs. man ikke kan ende med færre end $n-1$ kanter. Hvis man ender med en graf med $n-1$ kanter, er den et træ og dermed todelt. Hvis man herfra udfører processen baglæns, bliver den graf man får, ved med at være todelt da fire er lige, og man kan derfor ikke ende med K_n som ikke er todelt. Dermed er det umuligt at ende med en graf med færre end n kanter, dvs. n kanter er det minimale antal.

Opgave 9.10 Betragt personerne i gruppen som knuder i en graf, og forbind to knuder med en kant hvis de udveksler postkort. Da alle knuder har valens tre, ved vi at grafen indeholder en kreds. Vælg en kreds af minimal længde.

Hvis kredsen har længde tre v_1, v_2, v_3, undersøger vi om der findes en knude v_4 som er forbundet til to af de tre knuder. Hvis der ikke gør, kan man lade den ene gruppe være v_1, v_2, v_3 og den anden gruppe resten. Hvis der gør, og v_4 er nabo til lad os sige v_1 og v_2, undersøger vi om der findes endnu en knude v_5 som er forbundet til to knuder blandt v_1, v_2, v_3, v_4. Hvis der ikke gør, kan vi inddele i to grupper ved at lade v_1, v_2, v_3, v_4 være den ene gruppe. Hvis der gør, må v_5 nødvendigvis være forbundet til v_3 og v_4, da alle knuder har valens tre, og nu er v_1, v_2, v_3, v_4 naboer til tre indenfor gruppen v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, så denne gruppe kan fungere som den ene gruppe da ingen uden for gruppen kan være naboer til to fra gruppen. (Bemærk at der er knuder ud over de nævnte, da $n > 6$.)

Hvis den minimale kreds har længde fire v_1, v_2, v_3, v_4, undersøger vi om der findes en knude v_5 som er nabo til to knuder fra kredsen. Hvis der ikke gør, kan v_1, v_2, v_3, v_4 udgøre den ene gruppe. Hvis der gør, må v_5 være nabo til to knuder som ikke er naboer, fx v_1 og v_3, da der ellers findes en kreds af længde tre. Hvis der ikke findes en knude som er nabo til to af knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, kan disse fem knuder danne den ene gruppe. Hvis der findes en sådan knude v_6, må den være forbundet til to af knuderne v_2, v_4, v_5, lad os wlog sige v_2 og v_4. Hvis der ikke findes en knude som er forbundet til to af knuderne $v_1, v_2, \dots, v_6$, danner disse en gruppe. Hvis der gør, må denne knude v_7 være forbundet til v_5 og v_6 da det er de eneste som ikke allerede er forbundet til tre andre knuder. Knuderne $v_1, v_2, \dots, v_7$ danner nu en gruppe, da ingen knude uden for denne gruppe kan være forbundet til to knuder fra gruppen fordi alle på nær v_7 allerede er forbundet til tre knuder. (Bemærk at der er knuder ud over de nævnte, da $n > 6$, og der umuligt kan være 7 knuder i alt når hver er forbundet til præcis tre andre.)

Hvis den minimale kreds er længere end fire, da findes ingen knude uden for kredsen som er forbundet til to knuder fra kredsen, da kredsen ellers ikke er minimal. Dermed kan knuderne i denne kreds danne en gruppe så det ønskede er opfyldt. Der må desuden være knuder som ikke er indeholdt i kredsen, da hver knude har tre naboer, og kredsen har minimal længde.