Geometri - Teori og opgaveløsning

Formålet med disse noter er at give en grundig introduktion til geometri med fokus på hvad man har brug for til internationale matematikkonkurrencer. Noterne forudsætter kendskab til grundlæggende viden om vinkler, retvinklede trekanter og ensvinklede trekanter samt trigonometri. I hvert afsnit er der engelske gloser, og til slut er der en oversigt over teorien.

Indhold

1 Trekantens linjer 1

2 Cirkler og vinkler 6

3 Indskrivelige firkanter 9

4 Et punkts potens 11

5 Multiplikation omkring et punkt 12

6 Radikalakse og radikalcentrum 14

7 Cevas sætning 17

8 Herons formel 19

9 Trekantens ydre røringscirkler 20

10 Menelaos sætning 21

11 Eulerlinjen og Simsonlinjen 23

12 Ptolemæus' ulighed 24

13 Inversion 25

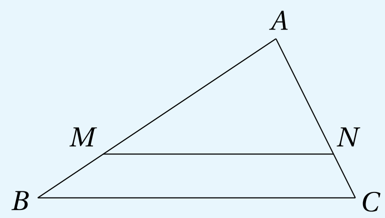
14 Løsningsskitser 31

1 Trekantens linjer

De vigtigste linjer i en trekant udover siderne er medianerne, midtnormalerne, vinkelhalveringslinjerne og højderne. De har alle hver deres særlige egenskaber som vi skal se nærmere på i dette kapitel. Men først ser vi på transversalers egenskaber da vi får brug for dem i det følgende.

Definition af transversal

En *transversal* i en trekant er et linjestykke der forbinder to punkter på hver sin side i trekanten. En transversal kaldes en *paralleltransversal* hvis den er parallel med en af siderne i trekanten, og en *midtpunktstransversal* hvis den forbinder midtpunkterne af to sider.



Sætning om transversaler

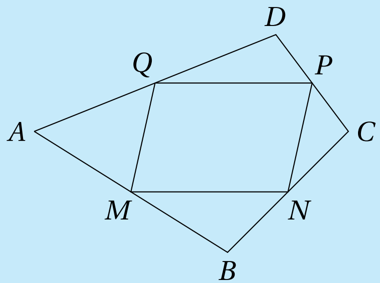
En transversal fra punktet M på siden AB til punktet N på siden AC er en paralleltransversal netop hvis

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{eller} \quad \frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|MB|}{|NC|}.$$

Bevis. At MN er parallel med BC, er ensbetydende med at $\triangle BAC$ er ensvinklet med $\triangle MAN$, hvilket igen er ensbetydende med at $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ da de to trekanter har en fælles vinkel A. En midtpunktstransversal er derfor også en paralleltransversal.

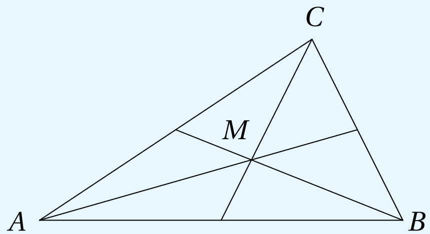
At forholdet $\frac{|AM|}{|AN|}$ er lig med forholdet $\frac{|AB|}{|AC|}$, er ensbetydende med at forholdet $\frac{|AM|}{|AN|}$ er lig med forholdet $\frac{|MB|}{|NC|}$. Dette følger af brøkregnereglen der siger at $\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$ er ensbetydende med at $\frac{s}{t} = \frac{s-u}{t-v}$ når $t \neq v$.

Sætning om midtpunkterne af siderne i en firkant
Lad $ABCD$ være en firkant og punkterne M, N, P og Q midtpunkterne af henholdsvis AB, BC, CD og DA. Da er $MNPQ$ et parallellogram.



Opgave 1.1. Vis ovenstående sætning.

Definition af median
En *median* er et linjestykke i en trekant der forbinder en vinkelspids med midtpunktet af modstående side.

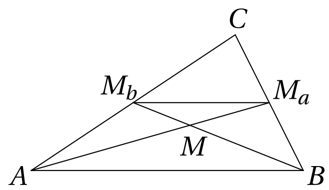


Sætning om medianer
De tre medianer i en trekant går igennem samme punkt, og dette punkt deler medianerne i forholdet 1:2.

Medianernes skæringspunkt betegnes normalt M.

Bevis. Lad ABC være en trekant, og kald medianerne for henholdsvis m_a, m_b og m_c, og medianernes fodpunkter på siderne a, b og c for henholdsvis M_a, M_b og M_c. Medianerne m_a og m_b skærer hinanden i et punkt vi kalder M.

Vi vil nu vise at de skærer hinanden i forholdet 1 : 2. Da M_a og M_b er midtpunkter på henholdsvis a og b, er M_aM_b midtpunktstransversal og dermed parallel med c. Dvs. at $\triangle ABC$ og $\triangle M_bM_aC$ er ensvinklede med forholdet 1 : 2 og specielt $2|M_aM_b| = |AB|$.

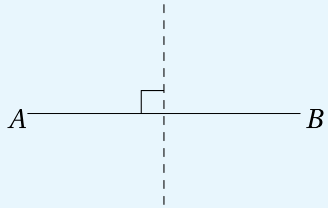


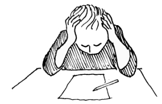
Desuden er trekanterne ABM og M_aM_bM ensvinklede da M_aM_b og AB er parallelle, og forholdet mellem trekanterne er netop forholdet mellem M_aM_b og AB, dvs. 1 : 2. Her af ses at m_a og m_b deler hinanden i forholdet 1 : 2.

Da m_a og m_b var vilkårlige medianer, må m_a og m_c også skære hinanden i forholdet 1 : 2, dvs. at alle tre medianer går gennem samme punkt M.

Definition af midtnormal
En *midtnormal* til et linjestykke AB er det *geometriske sted* for de punkter P der har samme afstand til A og B, altså mængden af punkter P som opfylder at $|AP| = |BP|$.

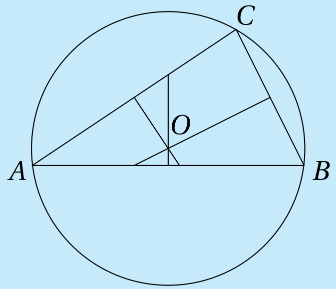
Midtnormalen er dermed en linje som går gennem midtpunktet af linjestykket AB og står vinkelret på AB, da det netop er punkterne på denne linje som opfylder betingelsen.





Sætning om midtnormaler

I en trekant går de tre midtnormaler gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den *omskrevne cirkel*, dvs. den cirkel som går gennem trekantens tre vinkelspidser.

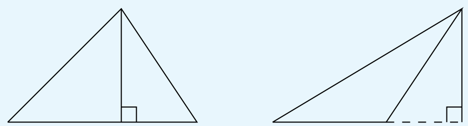


Midtnormalernes skæringspunkt betegnes normalt O.

Opgave 1.2. Bevis ovenstående sætning.
Hint: Betragt to af midtnormalerne, og vis at deres skæringspunkt ligger i samme afstand til alle tre vinkelspidser i trekanten.

Definition af højde

En *højde* i en trekant er en linje der går gennem en vinkelspids og står vinkelret på modstående side. Bemærk at en højde både kan falde indenfor og udenfor trekanten.



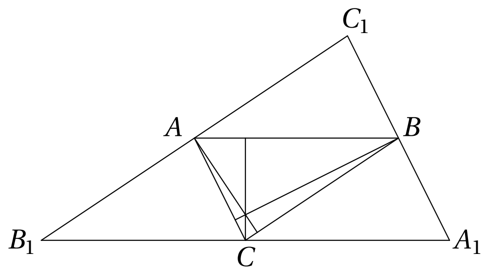
Sætning om højder

I en trekant går højderne gennem samme punkt.

Højdernes skæringspunkt betegnes normal H.

Bevis. Tegn linjer gennem henholdsvis A, B og C som er parallelle med modstående sider, og lad A_1, B_1 og C_1 være skæringspunkterne mellem disse linjer som vist på figuren.

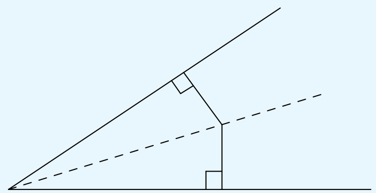
Firkant $ACBC_1$ og firkant ACA_1B er parallelogrammer, dvs. at $|C_1B| = |AC| = |BA_1|$. Tilsvarende ses at $|C_1A| = |AB_1|$ og $|B_1C| = |CA_1|$. Højderne i $\triangle ABC$ er derfor midtnormaler i $\triangle A_1B_1C_1$, og de går ifølge sætningen om midtnormaler gennem samme punkt.



Man kan også vise sætningen uden brug af resultatet for midtnormaler, fx med trigonometri.

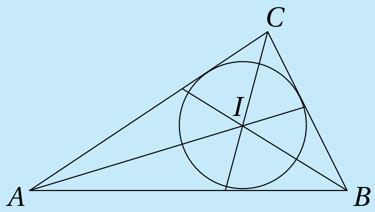
Definition af vinkelhalveringslinje

En *vinkelhalveringslinje* til en vinkel er det *geometriske sted* for de punkter der har samme afstand til vinklens ben.



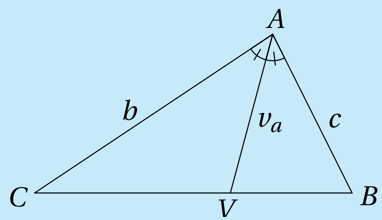
Vinkelhalveringslinjen er altså en linje som deler en vinkel i to lige store vinkler, da det netop er punkterne på denne linje som opfylder betingelsen.

Sætning om vinkelhalveringslinjer
I en trekant går de tre vinkelhalveringslinjer gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den *indskrevne cirkel*, dvs. den cirkel som tangerer alle tre sider i trekanten.



Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt betegnes normalt I.

En vinkelhalveringslinje deler modstående side i trekanten i samme forhold som forholdet mellem vinklens to hosliggende sider.



Dvs. hvis fodpunktet for vinkelhalveringslinjen v_a fra A til siden BC betegnes V, så er

$$\frac{|CV|}{|VB|} = \frac{b}{c}.$$

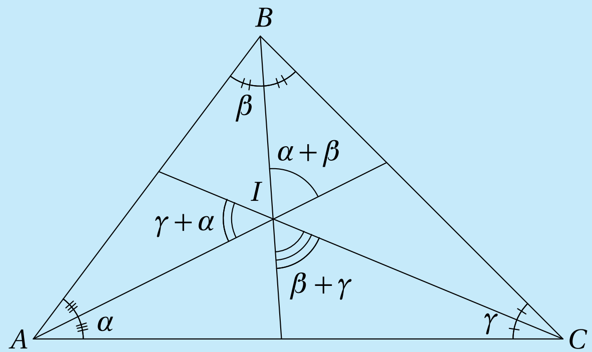
Opgave 1.3. Bevis ovenstående sætning.
Hint: Første del: Betragt to vinkelhalveringslinjer, og vis at deres skæringspunkt har samme afstand til alle tre sider i trekanten.
Anden del: Benyt sinusrelationen på $\triangle AVC$ og $\triangle AVB$, eller indlæg en ny smart trekant.

Sætning om areal og radius i den indskrevne cirkel
I en trekant betegner r radius i den indskrevne cirkel, s trekantens halve omkreds og T trekantens arealet. Der gælder at

$$T = rs.$$

Opgave 1.4. Bevis ovenstående sætningen.

Sætning om vinkler
I en trekant ABC betegner I centrum for den indskrevne cirkel, og $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$ og $\angle C = 2\gamma$.



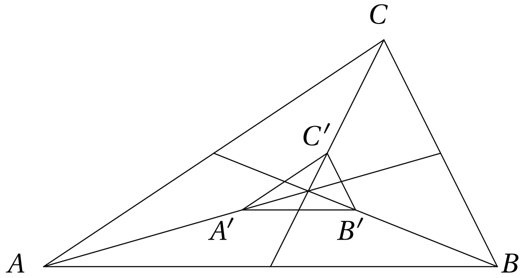
Vinklerne ved I er henholdsvis $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ og $\gamma+\alpha$ som vist på figuren.

Opgave 1.5. Bevis ovenstående sætning.

Opgave 1.6. Vis at medianerne i en trekant deler trekanten i seks små trekanter med samme areal.

Opgave 1.7. Fra vinkelspidsen C i trekant ABC tegnes en ret linje der halverer medianen fra A. I hvilket forhold deler denne linje siden AB? (Georg Mohr-Konkurrencen 1995)

Opgave 1.8. I en trekant ABC med areal 1 indtegnes medianerne. Midtpunktet af medianen m_a kaldes for A', midtpunktet af medianen m_b kaldes for B', og midtpunktet af medianen m_c kaldes for C'.



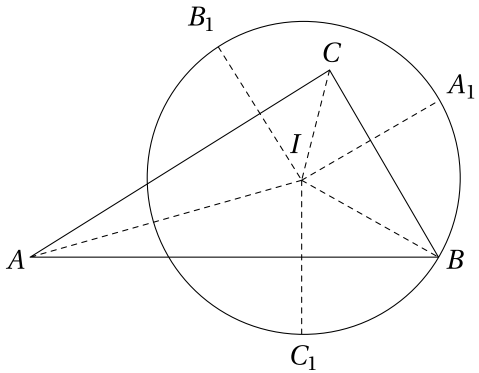
Bestem arealet af trekant $A'B'C'$.

Opgave 1.9. Lad I være centrum i den indskrevne cirkel til trekant ABC, og lad yderligere A_1 og A_2 være to forskellige punkter på linjen BC så $|AI| = |A_1I| = |A_2I|$, B_1 og B_2 være to forskellige punkter på linjen AC så $|BI| = |B_1I| = |B_2I|$, og C_1 og C_2 være to forskellige punkter på linjen AB så $|CI| = |C_1I| = |C_2I|$. Vis at

$$|A_1A_2| + |B_1B_2| + |C_1C_2|$$

er trekantens omkreds.

Opgave 1.10. Lad I være vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt i en trekant ABC, og lad yderligere A_1, B_1 og C_1 være spejlingerne af I i henholdsvis a, b og c. Cirklen gennem A_1, B_1 og C_1 går også gennem B. Bestem vinklen $\angle ABC$.

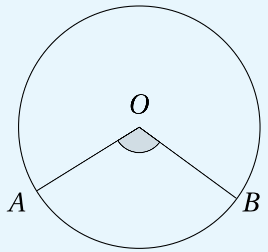


Gloser

centrum for den indskrevne cirkel *the incenter*
centrum for den omskrevne cirkel *the circumcenter*
den indskrevne cirkel *the incircle*
den omskrevne cirkel *the circumcircle*
ensvinklede trekanter *similar triangles*
højde *altitude*
højdernes skæringspunkt *orthocenter*
ligebenet trekant *isosceles triangle*
ligesidet trekant *equilateral triangle*
linjestykke *line segment*
median *median*
medianernes skæringspunkt *centroid*
midtnormal *perpendicular bisector*
omkreds *perimeter*
transversal *transversal*
vinkelhalveringslinje *angle bisector*

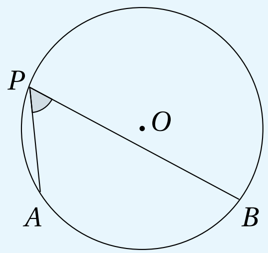
2 Cirkler og vinkler

Definition af centervinkel
En *centervinkel* er en vinkel der har toppunkt i centrum og radier som vinkelben. En centervinkel måles ved den bue den spænder over.



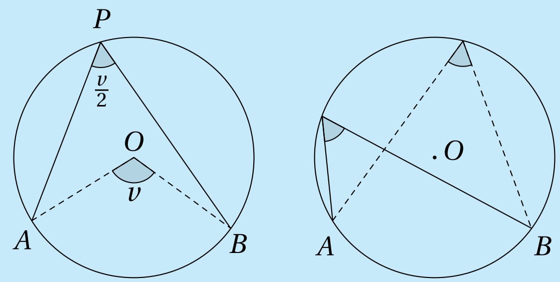
På figuren er $\angle AOB$ en centervinkel som spænder over buen AB, og vi skriver $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$.

Definition af periferivinkel
En *periferivinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og korder som vinkelben.



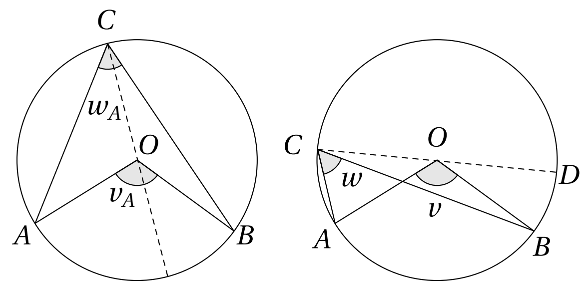
På figuren er $\angle APB$ en periferivinkel som spænder over buen AB.

Sætning om periferivinkler
En periferivinkel er halvt så stor som den bue den spænder over.



Dermed er to periferivinkler som spænder over samme bue, lige store, og en periferivinkel der spænder over en halvcirkel, er ret.

Bevis. Lad v være en centervinkel og w en periferivinkel der begge spænder over buen AB. Kald centrum for O og punktet hvor w rører periferien, for C. Antag først at vinkelbenene for vinkel v kun skærer vinkelbenene for w i punkterne A og B. Da deler diameteren gennem C vinklerne v og w i to vinkler som vi kalder henholdsvis v_A og v_B og w_A og w_B. Trekant AOC er nu en ligebenet trekant med to lige store vinkler w_A, og den sidste vinkel er $180° - v_A$. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er $2w_A = v_A$. Tilsvarende fås $2w_B = v_B$, dvs. $2w = v$.

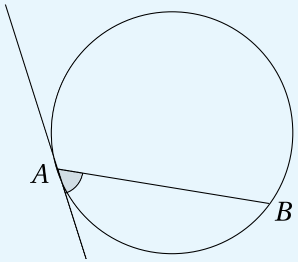


Antag nu at w's ene vinkelben CB skærer v's vinkelben OA. Diameteren gennem C skærer da yderligere periferien i et punkt vi kalder for D. Ifølge det vi lige har vist, er $2\angle BCD = \angle BOD$ og $2\angle ACD = \angle AOD$, og dermed

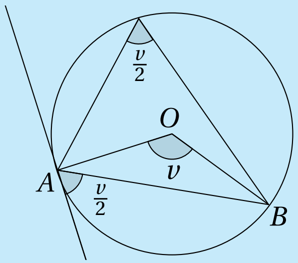
$$2w = 2\angle ACD - 2\angle BCD = \angle AOD - \angle BOD = v.$$

Opgave 2.1. I en spidsvinklet trekant ABC kaldes centrum for den omskrevne cirkel O og højdernes skæringspunkt for H. Linjen gennem BO skærer den omskrevne cirkel i et punkt Q forskelligt fra B. Vis at $AQCH$ er at parallelogram.

Definition af korde-tangent-vinkel
En *korde-tangent-vinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og en korde samt en tangent som vinkelben.

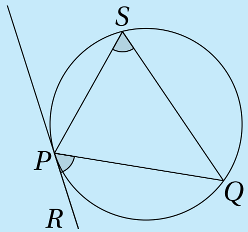


Sætning om korde-tangent-vinkel
En korde-tangent-vinkel er halvt så stor som den bue korden spænder over, og dermed lige så stor som en periferivinkel der spænder over buen.



Opgave 2.2. Bevis sætningen.
Hint: Husk at AO står vinkelret på tangenten.

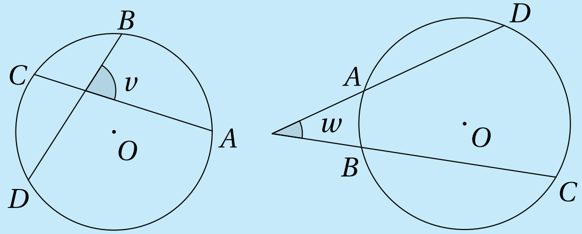
Den omvendte sætning om korde-tangent-vinkler
Lad PQ være en korde i en cirkel og l en linje gennem P. Lad yderligere R være et punkt på linjen l forskelligt fra P og S et punkt på cirkelperiferien så R og S ligger på hver sin side af linjen PQ. Hvis $\angle RPQ = \angle PSQ$, da er l tangent til cirklen.



Opgave 2.3. Bevis sætningen.

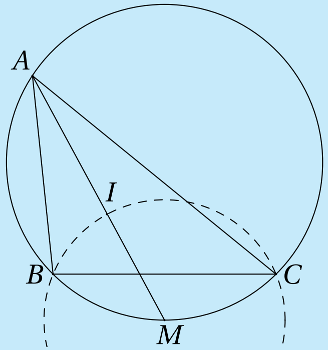
Sætning om vinkler i cirkler
Om vinklerne v og w på figurerne gælder:

$$v = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} \quad \text{og} \quad w = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$



Opgave 2.4. Bevis sætningen.
Hint: Vinkel v: Kald skæringen mellem AC og BD for P. Tegn linjestykket AD, og betragt $\triangle PAD$ og periferivinkler. Vinkel w: Tegn linjestykket BD, og kald vinkelspidsen ved w for P. Betragt $\triangle PBD$ og periferivinkler.

Sætning om superpunktet
I en trekant ABC betegner I centrum for den indskrevne cirkel, og M er skæringen mellem AI og den omskrevne cirkel. Da er M centrum for cirklen gennem B, C og I. Punktet M kaldes nogle gange for superpunktet, fordi det har mange interessante egenskaber.



Opgave 2.5. Bevis sætningen.

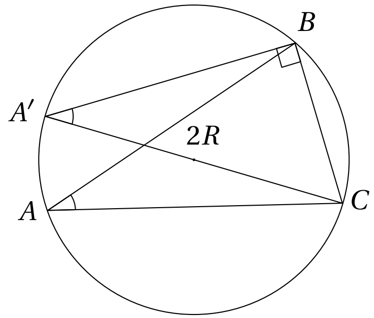
Opgave 2.6. Lad to cirkler C_1 og C_2 skære hinanden i punkterne A og B. Tangenten til C_1 gennem B skærer C_2 i punktet C, og tangenten til C_2 gennem B skærer C_1 i punktet D. Desuden oplyses at $|AC| = 3$ og $|AD| = 4$. Bestem længden af AB.

Sætning om radius i den omskrevne cirkel
Lad R være readius i den omskrevne cirkel til trekant ABC, og T arealet af trekanten. Da er

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{og} \quad 4RT = abc.$$

Bevis. Lad AC' være diameter i den omskrevne cirkel til trekant ABC. Da er

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}.$$



Tilsvarende ses at $\sin B = \frac{b}{2R}$ og $\sin C = \frac{c}{2R}$, og dermed i alt

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Ved at benytte formlen for arealet af en trekant $T = \frac{1}{2}bc\sin(A)$ fås yderligere

$$4RT = 2 \cdot 2R \cdot T = 2 \cdot \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = abc.$$

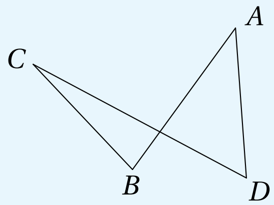
Opgave 2.7. Vis for en trekant ABC at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

Gloser
bue *arc*
centervinkel *central angle*
korde *chord*
periferivinkel *inscribed angle*
ret vinkel *right angle*
spids vinkel *acute angle*
stump vinkel *obtuse angle*
tangent *tangent*

3 Indskrivelige firkanter

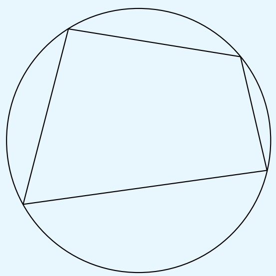
Definition af simple firkanter
En firkant kaldes *simpel* hvis dens sider ikke skærer hinanden. I disse noter betegner ordet *firkant* fremover en simpel firkant. Figuren viser et eksempel på en ikke-simpel firkant.



Definition af konvekse firkanter
En firkant kaldes *konveks* hvis der for vilkårlige to indre punkter gælder at linjestykket mellem punkterne er indeholdt i firkanten. De konvekse firkanter er altså netop dem der ikke har en vinkel der overstiger 180°.

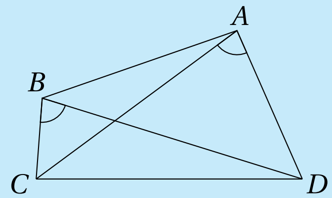
Generelt defineres en *konveks* figur på tilsvarende måde.

Definition af indskrivelige firkanter
En firkant kaldes *indskrivelig* hvis den har en omskreven cirkel.



Sætning om indskrivelige firkanter
Følgende udsagn om firkanten $ABCD$ er ævivalente:

- Firkant $ABCD$ er indskrivelig.
- Summen af modstående vinkler er 180°.
- $\angle CBD = \angle CAD$ eller tilsvarende.



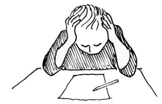
Bevis
Antag at en firkant er indskrivelig. To modstående vinkler spænder da tilsammen over hele cirkelperiferien, og summen er derfor 180°.

Antag at det for en given firkant $ABCD$ gælder at summen af to modstående vinkler er 180°. Betragt nu den omskrevne cirkel til trekant ABC, og lad punktet E være skæringen mellem cirklen og linjen gennem C og D. Hvis firkanten er indskrivelig, er D lig E. Vi ved at $\angle BAD = 180° - \angle BCD = 180° - \angle BCE = \angle BAE$, dvs. at punktet E ligger på linjen AD og derfor er identisk med D.

Vi har nu vist at de første to udsagn er ækvivalente. Resten af beviset overlades til læseren i følgende opgave.

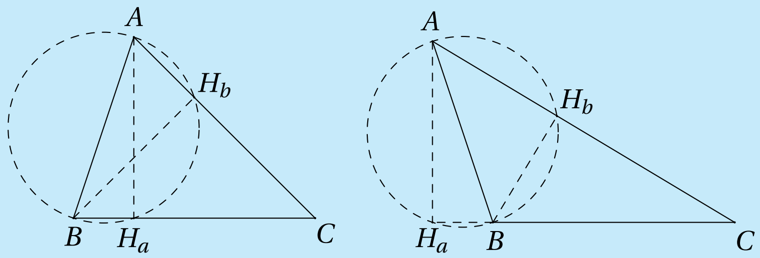
Opgave 3.1. Bevis resten af sætningen.

Opgave 3.2. Lad H_a og H_b være fodpunkterne for højderne fra henholdsvis A og B i trekant ABC. Vis at firkant ABH_aH_b er indskrivelig (evt. AH_aBH_b hvis A eller B er stump). Vis desuden at $\triangle CAB$ og $\triangle CH_aH_b$ er ensvinklede.

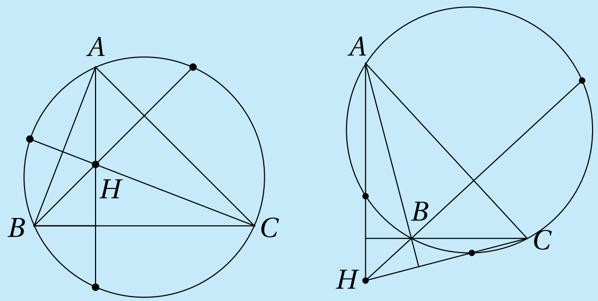


Sætning om højder og indskrivelige firkanter
I trekant ABC betegner H højdernes skæringspunkt og H_a og H_b fodpunkterne for højderne fra henholdsvis A og B.

1) Firkant ABH_aH_b er indskrivelig (evt. AH_aBH_b hvis A eller B er stump), og $\triangle CAB$ og $\triangle CH_aH_b$ er ensvinklede.



2) Spejlingen af H i en vilkårlig af trekantens sider ligger på trekantens omskrevne cirkel.



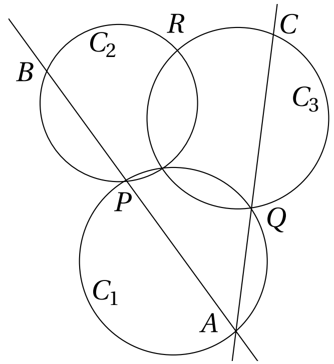
Del 1) er allerede vist i opgave 3.2. Del 2) overlades til læseren at bevise.

Opgave 3.3. Bevis del 2) af sætningen.

Opgave 3.4. Lad H_a, H_b opg H_c være fodpunkterne for højderne fra henholdsvis A, B og C i en spidsvinklet trekant ABC. Vis at AH_a er vinkelhalveringslinje i $\triangle H_aH_bH_c$.

Opgave 3.5. Lad ABC være en spidsvinklet trekant, BL og AK højder i trekanten og M midtpunktet af AB. Vis at linjen ML og linjen MK tangerer den omskrevne cirkel til trekant CKL.

Opgave 3.6. Tre cirkler C_1, C_2 og C_3 skærer hinanden i et fælles punkt, C_1 og C_2 skærer hinanden i P, C_1 og C_3 skærer hinanden i Q, og C_2 og C_3 skærer hinanden i R.



Lad A være et punkt på cirkelbuen PQ som vist på figuren. Linjen gennem A og P skærer cirklen C_2 i punktet B, og linjen gennem A og Q skærer cirklen C_3 i C. Vis at punkterne B, C og R ligger på linje.

Opgave 3.7. I rektanglet $ABCD$ er M midtpunktet af siden AB, og H er et punkt på linjestykket DM så CH står vinkelret på DM. Vis at trekant BCH er ligebenet.

Opgave 3.8. En firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med AB som diameter. Lad S være skæringspunktet mellem diagonalerne AC og BD, og lad T være projektionen af S på AB. Vis at linjen ST halverer vinkel $\angle CTD$.

Gloser
indskrivelig firkant *cyclic quadrilateral*
konveks firkant *convex quadrilateral*
parallelogram *parallelogram*
simpel firkant *simple quadrilateral*

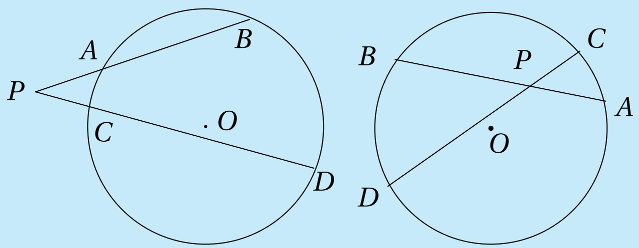
4 Et punkts potens

Definition af et punkts potens
I en given cirkel ω betegnes centrum O og radius r. Et punkt P's potens mht. cirklen ω er tallet

$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = |PO|^2 - r^2.$$

Hvis P ligger på cirkelperiferien, er $\mathrm{Pow}(P,\omega)$ derfor 0, mens den er positiv hvis P ligger uden for cirklen, og negativ hvis P ligger inden for cirklen.

Sætning om et punkts potens
I en given cirkel ω betegnes centrum O og radius r. Lad P være et punkt og l og m være to linjer gennem P, hvor l skærer cirklen i A og B, og m skærer cirklen i C og D. (Hvis en af linjerne tangerer cirklen, er de to punkter sammenfaldende.)



Da gælder at

$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

Hvis P ligger uden for cirklen, er

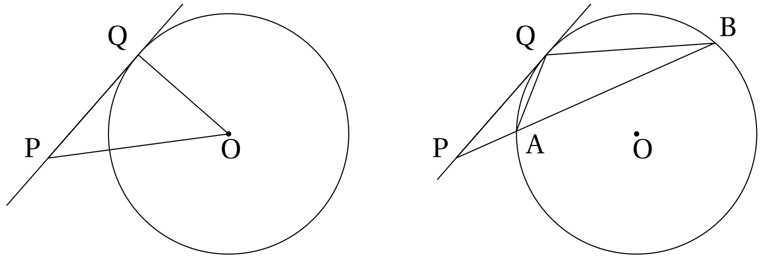
$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = |AP||BP|.$$

Hvis P ligger inden for cirklen, er

$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = -|AP||BP|.$$

Bevis i tilfældet hvor punktet ligger uden for cirklen
Lad P være et punkt uden for cirklen, og lad l være en vilkårlig linje gennem P som skærer cirklen i punkterne A og B. Vi viser først at

$$|AP||BP| = \mathrm{Pow}(P,\omega).$$



Tegn tangenten til cirklen gennem P som vist på figuren, og kald røringspunktet for Q. Ifølge Pythagoras' sætning er

$$|PQ|^2 = |PO|^2 - r^2 = \mathrm{Pow}(P,\omega).$$

Betragt nu trekanterne $\triangle AQP$ og $\triangle QBP$. Korde-tangent-vinklen $\angle PQA$ er lige så stor som periferivinklen $\angle PBQ$, ifølge sætningerne om periferivinkler og korde-tangent-vinkler. Dermed er $\triangle AQP$ og $\triangle QBP$ ensvinklede, og dette giver

$$|PQ|^2 = |AP||BP|.$$

Samlet har vi at

$$|AP||BP| = \mathrm{Pow}(P,\omega).$$

Lad nu m være endnu en linje gennem P som skærer cirklen i punkterne C og D. Ifølge det vi netop har vist, må også

$$|CP||DP| = \mathrm{Pow}(P,\omega),$$

dvs. at

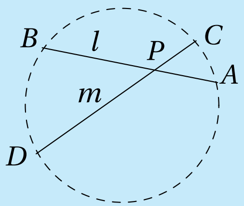
$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

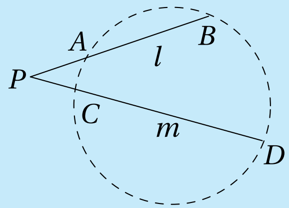
Opgave 4.1. Bevis sætningen om et punkts potens i det tilfælde hvor punktet ligger inden i cirklen.
Hint: Tegn linjen gennem P og centrum, og vis at

$$|AP||PB| = (r - |PO|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2.$$

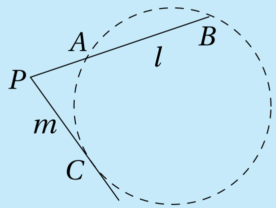
Den omvendte sætning om et punkts potens
Lad l og m være to forskellige linjer med skæringspunkt P. Lad A og B være to punkter på l på hver sin side af P, og lad C og D være to punkter på m på hver sin side af P. Eller lad både A og B ligge på samme side af P og C og D ligge på samme side af P.

Hvis $|PA||PB| = |PC||PD|$, da ligger A, B, C og D på samme cirkel.





I det tilfælde hvor A og B ligger på samme side af P, og C og D er sammenfaldende, da ligger A, B og C på en cirkel med m som tangent.



Opgave 4.2. Bevis sætningen.

Opgave 4.3. To cirkler skærer hinanden i punkterne M og N, og den fælles tangent til de to cirkler nærmest N rører cirklerne i P og Q . Vis at trekant PMN og trekant QMN har samme areal.

Opgave 4.4. I den spidsvinklede trekant ABC skærer højden fra B cirklen med diameter AC i P og Q og højden fra C cirklen med diameter AB i S og T. Vis at P, Q, S og T ligger på samme cirkel.

Gloser
et punkts potens *the power of a point*

5 Multiplikation omkring et punkt

Her gives en kort introduktion til den affine afbildning *multiplikation omkring et punkt* samt eksempler på hvordan denne afbildning kan bruges i løsningen af geometriopgaver. Hvis du ønsker en mere teoretisk indføring i affine afbildninger og deres egenskaber, så se Jens-Søren Andersens noter *Affine transformationer*.

Definition af multiplikation omkring et punkt
Multiplikation omkring punktet O med multiplikationsfaktoren k er en afbildning af planen i sig selv hvor et punkt P afbildes i punktet P' så

$$\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}.$$

I det følgende ser vi bort fra tilfældet $k = 0$.

Hvis $k = 1$ er det blot identitetsafbildningen, mens fx $k = -1$ giver en drejning på 180° om O.

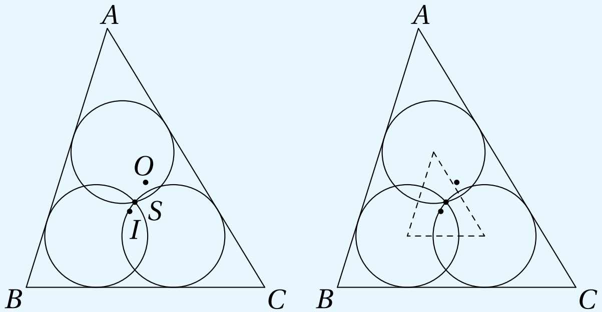
Egenskaber

- Ved multiplikation omkring et punkt afbildes en linje i en linje parallel med linjen.
- Multiplikation omkring et punkt bevarer vinkler
- Alle figurer afbildes i ligedannede figurer.
- For to cirkler med forskellige radier findes netop et punkt og en multiplikation omkring dette med positiv multiplikationsfaktor som afbilder den ene cirkel i den anden.
- For to cirkler findes netop et punkt og en multiplikation med negativ multiplikationsfaktor som fører den ene cirkel i den anden.

- For to ensvinklede trekanter som ikke er kongruente, og hvor ensliggende sider er parallelle, findes netop et punkt og en multiplikation omkring dette som afbilder den ene trekant i den anden.
- Sammensætningen af to multiplikationer om to punkter, hvor produktet af de to multiplikationsfaktorer ikke er 1, er igen en multiplikation omkring et punkt, og multiplikationsfaktoren er produktet af de to multiplikationsfaktorer.

Eksempel 1 Multiplikation omkring et punkt kan fx benyttes til at vise at tre punkter ligger på linje, ved at vise at en multiplikation omkring et af punkterne kan afbilde det andet punkt i det tredje.

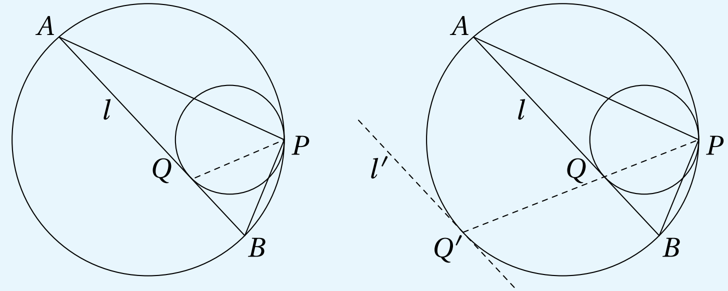
Hvis vi fx betragter tre cirkler med samme radius som skærer hinanden i et fælles punkt S, og den trekant ABC der opstår ved at tegne tangenter som vist på figuren, kan vi vise at S, centrum I for den indskrevne cirkel og centrum O for den omskrevne cirkel til trekant ABC ligger på linje.



Trekanten som opstår når man forbinder centrerne for de tre cirkler, har parvis parallelle sider med trekant ABC da de tre cirkler har samme radius. Da I er skæringen mellem vinkelhalveringslinjerne i trekant ABC, og de tre centre ligger på disse vinkelhalveringslinjer, må I være centrum for den multiplikation som afbilder den lille trekant i trekant ABC. Punktet S er centrum for den omskrevne cirkel til den lille trekant da de tre cirkler har samme radius, og dermed afbildes S i O. Dette viser at I, S og O ligger på samme linje.

Eksempel 2 Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise noget om vinkler fx ved at udnytte sætningen om periferivinkler i en cirkel. Betragt en cirkel C_1 som tangerer en cirkel C_2 indvendigt i punktet P. Lad l være en tangent til C_1 i et punkt Q forskelligt fra P. Linjen l skærer C_2 i henholdvis A og B. Vi ønsker at vise at PQ er vinkelhalveringslinje i trekant APB.

Multiplikationen i P som fører C_1 i C_2, fører Q i Q' og tangenten l til C_1 i en tangent l' til C_2 i punktet Q'.



Da l og l' er parallelle, og l' er tangent til C_2, er cirkelbuerne AQ' og BQ' lige store. Derfor er $\angle APQ' = \angle BPQ'$, og altså PQ vinkelhalveringslinje i trekant APB.

Bemærkning Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise at nogle punkter ligger på samme cirkel, fx ved at finde en multiplikation som afbilder punkterne i en allerede kendt cirkel. Man kan også vha. af multiplikation omkring et punkt vise at to linjer er parallelle ved at finde en multiplikation der afbilder den ene i den anden, og man kan benytte multiplikation omkring et punkt til at bestemme forholdet mellem forskellige linjestykker ud fra multiplikationsfaktoren. I de følgende opgaver kan du selv prøve kræfter med dette.

Opgave 5.1. To cirkler C_1 og C_2 med samme radius tangerer en større cirkel C indvendigt i henholdsvis A_1 og A_2. Lad M være et punkt på C forskelligt fra A_1 og A_2, og lad B_1 og B_2 være skæringspunkterne mellem henholdvis MA_1 og C_1 og mellem MA_2 og C_2. Vis at B_1B_2 er parallel med A_1A_2.

Opgave 5.2. En cirkel C_1 tangerer en cirkel C_2 indvendigt i punktet A. En linje l skærer de to cirkler i punkterne M, N, P og Q så punkterne ligger i nævnte rækkefælge på linjen. Vis at $\angle MAN = \angle PAQ$.

Opgave 5.3. En cirkel C_1 tangerer en cirkel C_2 indvendigt i punktet A. Om to forskellige linjer gennem A oplyses at den ene skærer C_1 og C_2 i henholdsvis X_1 og X_2 og den anden skærer C_1 og C_2 i henholdsvis Y_1 og Y_2. Linjerne X_1Y_2 og X_2Y_1 skærer hinanden i punktet B. Vis at hvis B ligger på C_1, da tangerer den omskrevne cirkel til BX_2Y_2 cirklen C_1.

Opgave 5.4. Punktet P er et indre punkt i en spidsvinklet trekant ABC, og X, Y og Z er projektionerne af P på henholdsvis a, b og c. Cirklen gennem X, Y og Z skærer henholdsvis a, b og c i tre nye punkter X_1, Y_1 og Z_1. Vis at linjerne gennem henholdsvis X_1, Y_1 og Z_1 vinkelret på henholdsvis a, b og c skærer hinanden i et punkt.

Opgave 5.5. I en trekant ABC kaldes midtpunkterne af BC, AC og AB for henholdsvis M_a, M_b og M_c. Trekant ABC's *Spieker centrum* er centrum for den indskrevne cirkel til trekant $M_aM_bM_c$. Vis at centrum I for den indskrevne cirkel til trekant ABC, medianernes skæringspunkt M og trekantens Spieker centrum S alle ligger på samme linje.

Opgave 5.6. I trekant ABC kaldes højdernes skæringspunkt for H og fodpunkterne for de tre højder for henholdsvis H_a, H_b og H_c. Lad M_a, M_b og M_c være midtpunkterne af henholdsvis AH, BH og CH. Vis at H_a, H_b, H_c, M_a, M_b og M_c ligger på en cirkel. Vis desuden at radius for den omskrevne cirkel til trekant ABC er dobbelt så så stor som radius for den omskrevne cirkel til trekant $H_aH_bH_c$.

Opgave 5.7. (IMO 1978) I trekant ABC er $|AB| = |AC|$. En cirkel tangerer siderne AB og AC i henholdsvis P og Q samt den omskrevne cirkel til trekant ABC indvendigt. Vis at midtpunktet af PQ er centrum for den indskrevne cirkel til trekant ABC.

Gloser
multiplikation omkring et punkt *homothety*
muliplikation omkring O med multiplikationsfaktor k *homothety with center O and ratio k*

6 Radikalakse og radikalcentrum

I kapitlet om punkts potens så vi at et punkt P's potens mht. en cirkel ω med centrum O og radius r defineres som tallet

$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = |OP|^2 - r^2.$$

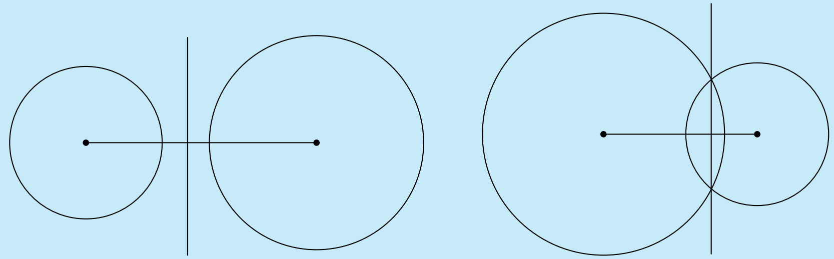
Denne definition og sætningen om punkts potens er grundlaget for at indføre begrebet radikalakse:

Definition af radikalakse
Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

Sætning om radikalakse
Kald centrum i de to cirkler for henholdsvis O_1 og O_2, cirklernes radier for henholdsvis r_1 og r_2, og lad d betegne afstanden mellem de to centre. Da er radikalaksen en ret linje der står vinkelret på linjen O_1O_2.

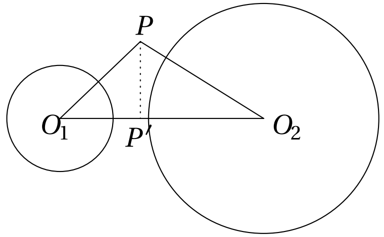
Radikalaksens afstand til henholdsvis O_1 og O_2 er

$$\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad \text{og} \quad \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}.$$



Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Bevis. Lad Q være punktet på linjen O_1O_2 med $|QO_1| = \frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}$ og $|QO_2| = \frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d}$. (Dette er muligt da $\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d} + \frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d} = d$).



Antag at P er et punkt på radikalaksen, og lad P' være projektionen af P på O_1O_2. At P er et punkt på radikalaksen, er ensbetydende med at

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2.$$

Dette er ensbetydende med at

$$|PP'|^2 + |O_1P'|^2 - r_1^2 = |PP'|^2 + (d - |O_1P'|)^2 - r_2^2,$$

og yderligere at

$$|O_1P'| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Dette er ensbetydende med at $P' = Q$, og dermed at P ligger på linjen gennem Q vinkelret på O_1O_2. Vi har dermed vist at alle punkter på radikalaksen ligger på denne linje. Man kan tilsvarende vise at alle punkter på linjen har samme potens mht. de to cirkler, og altså samlet at radikalaksen netop består af punkterne på denne linje.

Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, har begge punkter potens nul mht. de to cirkler, og dermed er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

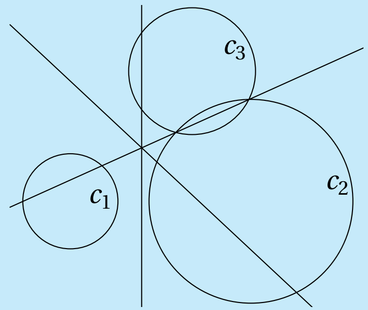
Definition af radikalcentrum

Radikalcentrum for tre cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de tre cirkler.

Sætning om radikalcentrum

For tre cirkler c_1, c_2 og c_3 med forskellige centre som ikke alle tre ligger på linje, gælder at radikalakserne for henholdsvis, c_1 og c_2, c_1 og c_3 samt c_2 og c_3 skærer hinanden i et punkt, og at dette punkt er deres radikalcentrum.

Hvis de tre centre ligger på linje, er radikalakserne for henholdsvis, c_1 og c_2, c_1 og c_3 samt c_2 og c_3 parallelle og evt. sammenfaldende, dvs. i dette tilfælde er deres radikalcentrum den tomme mængde eller en ret linje.



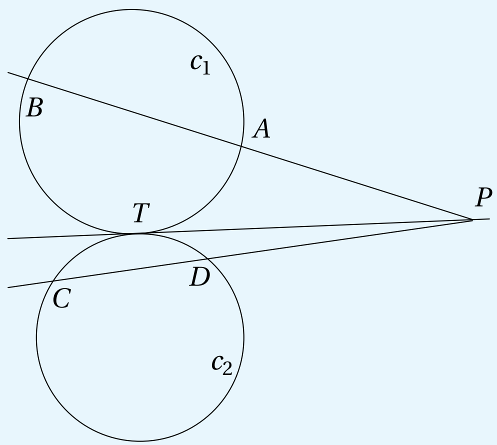
Bevis. Hvis de tre centre ikke ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis c_1 og c_2, c_1 og c_3 samt c_2 og c_3 parvis ikke er parallelle, samt at radikalcentrum for de tre cirkler pr. definition er indeholdt i fællesmængden af disse radikalakser. Lad P være skæringspunktet mellem radikalaksen for c_1 og c_2 og radikalaksen for c_1 og c_3. Dermed er potensen af P mht. c_1 lig potensen af P mht. c_2, og potensen af P mht. c_1 er lig med potensen af P mht. c_3. Altså er potensen af P mht. c_2 også lig med potensen af P mht. c_3, hvilket betyder at P ligger på radikalaksen for c_2 og c_3. Dermed går alle tre radikalakser gennem P, og P er dermed radikalcentrum for de tre cirkler.

Hvis de tre centre ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis c_1 og c_2, c_1 og c_3 samt c_2 og c_3 alle er parallelle. Hvis de ikke alle er sammenfaldende, er radikalcentrum for de tre cirkler den tomme mængde, og hvis de alle er sammenfaldende, er radikalcentrum identisk med den fælles radikalakse.

Degenererede cirkler med radius 0
Både for radikalakse og radikalcentrum giver definitionen også mening hvis en eller flere af cirklerne er en degenereret cirkel med radius 0, og sætningerne gælder også i dette tilfælde.

Eksempel på anvendelse af radikalakse
To cirkler c_1 og c_2 tangerer hinanden udvendigt i punktet T. Lad P være et punkt på deres fælles tangent gennem T, og lad A og B være to punkter på c_1 så A, B og P ligger på linje, og lad C og D være to punkter på c_2 så C, D og P ligger på linje.

Vi ønsker at vise at A, B, C og D ligger på en cirkel.

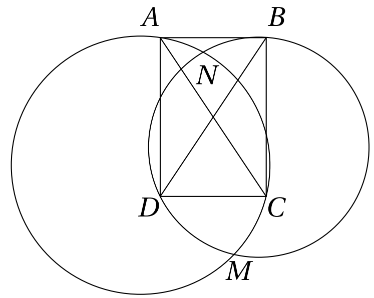


Kald cirklen gennem A, B og C for c_3. Linjen TP er radikalakse for c_1 og c_2, og linjen AP er radikalakse for c_1 og c_3. Dermed må skæringspunktet P mellem AP og PT ligge på radikalaksen for c_2 og c_3, dvs. denne radikalakse er PC. Da radikalaksen yderligere skærer c_2 i D, må dette punkt også ligge på c_3. Dermed ligger A,B,C og D på en cirkel.

Dette var et eksempel på anvendelse af radikalakse til at vise at fire punkter ligger på en cirkel, men man kan også benytte radikalakser til meget andet. Fx at vise at to linjer står vinkelret på hinanden ved at vise at den ene er linjen gennem centrum af to cirkler, mens den anden er cirklernes radikalakse.

Radikalcentrum kan fx benyttes til at vise at tre linjer skærer hinanden i samme punkt, hvis man kan vise at de tre linjer er radikalakser for hvert par af tre cirkler.

Opgave 6.1. To cirkler S_1 og S_2 skærer hinanden i punkterne M og N. Vis at hvis rektanglet $ABCD$ er placeret så A og C ligger på S_1, og B og D ligger på S_2, så vil skæringspunktet mellem rektanglets diagonaler ligge på linjen MN.



Opgave 6.2. Lad ABC være en trekant, og lad trekanterne BCD, CAE og ABF være ligebenede trekanter med henholdsvis BC, CA og AB som grundlinje, så disse tre trekanter ligger uden for trekant ABC. Vis at de tre linjer gennem henholdsvis A, B og C som står vinkelret på henholdsvis EF, FD og DE, skærer hinanden i samme punkt.

Opgave 6.3. Punkterne P, Q, R og S ligger på cirklen c i denne rækkefølge så PQ og RS ikke er parallelle. Lad L være mængden af punkter I for hvilke der findes en cirkel c_1 gennem P og Q samt en cirkel c_2 gennem R og S så de to cirkler tangerer hinanden i I. Beskriv punktmængden L.

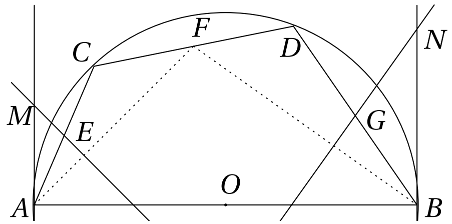
Opgave 6.4. Punkterne C, E, D og F ligger på en cirkel med centrum O (i denne rækkefølge), og korderne CD og EF skærer hinanden i punktet N. Tangenterne til cirklen i C og D skærer hinanden i punktet A, og tangenterne til cirklen i E og F skærer hinanden i B. Vis at ON står vinkelret på AB.

Opgave 6.5. Lad ABC være en trekant, og lad A', B', C' være punkter på henholdsvis siden BC, siden CA og siden AB. Lad yderligere M, $M \neq A'$, være skæringspunktet mellem cirklerne ABA' og $A'B'C'$, og N, $N \neq B'$, skæringspunktet mellem cirklerne ABB' og $A'B'C'$. Definer punkterne P, Q og R, S, på tilsvarende måde. Vis at da vil mindst en af følgende gælde:

(i) De tre linjer AB, $A'M$ og $B'N$ skærer hinanden i et punkt vi kalder C'', de tre linjer BC, $B'P$ og $C'Q$ skærer hinanden i et punkt vi kalder A'', de tre linjer CA, $C'R$ og $A'S$ skærer hinanden i et punkt vi kalder B'', og A'', B'', C'' ligger på linje.

(ii) Linjerne $A'M$ og $B'N$ er parallelle med AB, eller linjerne $B'P$ og $C'Q$ er parallelle med BC, eller linjerne $C'R$ er $A'S$ paralelle med CA.

Opgave 6.6. Lad AB være diameter i halvcirklen c med centrum O, og C og D to punkter på c så A, C, D og B er fire forskellige punkter der ligger på c i den nævnte rækkefølge. Midtpunkterne af henholdsvis AC, CD og DB betegnes E, F og G. Linjen gennem E vinkelret på AF skærer tangenten til c i A i punktet M, og linjen gennem G vinkelret på FB skærer tangenten til c i B i punktet N. Lad cirklerne c_1, c_2 og c_3 have henholdsvis AO, BO og EG som diameter.



(i) Bevis at radikalaksen for c_1 og c_3 er ME, samt at radikalaksen for c_2 og c_3 er NG.

(ii) Find radikalcentrum for c, c_1 og c_3 samt radikalcentrum for c, c_2 og c_3.

(iii) Vis at MN er parallel med CD.

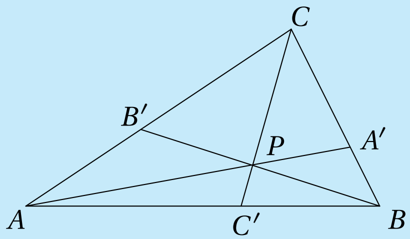
Gloser
radikalakse *radical axis/power line*
radikalcentrum *radical center*

7 Cevas sætning

Definition af cevian
En *cevian* er en linje i en trekant fra en vinkelspids til den modstående side (eller dens forlængelse). Fx er højder, medianer og vinkelhalveringslinjer alle cevianer.

Cevas sætning
Cevas sætning siger at cevianerne AA', BB' og CC' (hvor A' ligger på BC osv.), skærer hinanden i samme punkt, netop hvis

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

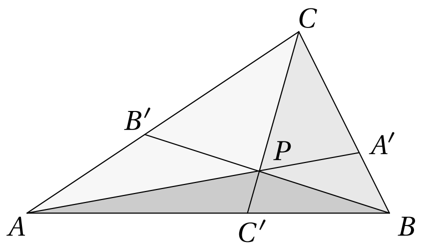


Cevas sætning gælder også hvis nogle af cevianerne går fra en vinkelspids til et punkt der ikke ligger på den modstående side men kun dens forlængelsen. I dette tilfælde er det dog nødvendigt at regne længderne med fortegn så postiv retning er AB, BC og CA. Hvis C' fx ligger på forlængelsen af AB tættest på B, da er $|C'B|$ negativ.

Bevis. Her beviser vi kun sætningen i tilfældet hvor alle tre cevianer ligger inden for trekanten. Hvis nogle af cevianerne falder uden for trekanten, foregår beviset stort set på samme måde.

Først viser vi at hvis de tre cevianer går gennem samme punkt, så vil

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$



Antag at cevianerne går gennem samme punkt P. Der gælder at hvis to trekanter har samme højde, da er forholdet mellem arealerne det samme som forholdet mellem grundlinjerne. Lad $T(\triangle ABC)$ betegne arealet af en trekant. Dermed er

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle ABB')}{T(\triangle CBB')} \quad \text{og} \quad \frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle APB')}{T(\triangle B'PC)}.$$

Samlet får vi

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle ABB')-T(\triangle APB')}{T(\triangle CBB')-T(\triangle B'PC)}=\frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}.$$

Her har vi benyttet brøkregnereglen der siger at hvis $\frac{s}{t}=\frac{u}{v}$, er $\frac{s}{t}=\frac{s-u}{t-v}$, når $t\neq v$.

Tilsvarende fås

$$\frac{|BC'|}{|C'A|}=\frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \quad \text{og} \quad \frac{|CA'|}{|A'B|}=\frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}.$$

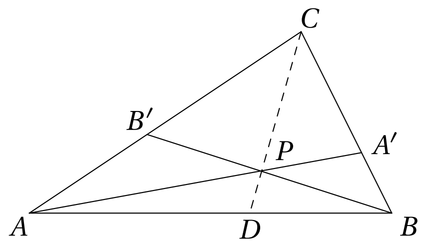
Samlet giver dette

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}=\frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}\cdot\frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)}\cdot\frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}=1.$$

Nu viser vi den modsatte vej. Antag at

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$

Kald skæringspunktet mellem AA' og BB' for P, og betragt cevianen CD fra C gennem P.



Da cevianerne AA', BB' og CD går gennem samme punkt, gælder ifølge det vi lige har vist, at

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$

Ifølge vores antagelse er

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1,$$

dvs. at $\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC'|}{|C'B|}$. Af dette ses at D og C' er samme punkt, og dermed at cevianerne AA', BB' og CC' skærer hinanden i samme punkt P.

Opgave 7.1. Tidligere har vi benyttet sætningen om midtnormaler til at bevise at højderne skærer hinanden i samme punkt. Benyt nu i stedet Cevas sætning til at bevise dette.

Opgave 7.2. I trekant ABC er P og Q punkter på henholdsvis linjestykket AB og linjestykket AC så PQ er parallel med BC, og X er skæringspunktet mellem BQ og CP. Vis at AX deler linjestykket BC på midten.

Sætning om Gergonne punktet
I en trekant ABC tangerer den indskrevne cirkel siderne siderne BC, AC og AB i henholdsvis X, Y g Z. Linjerne AX, BY og CZ skærer hinanden i et punkt, og dette punkt kaldes trekantens Gergonne punkt.

Opgave 7.3. Bevis sætningen om Gergonne punktet.

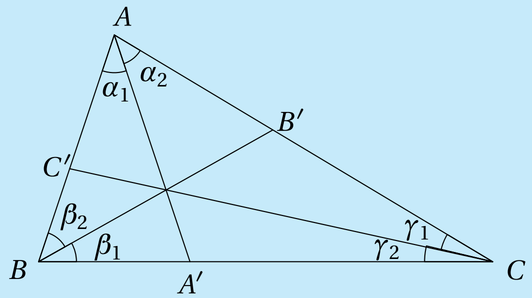
Opgave 7.4. I trekant ABC er AD vinkelhalveringslinje og AH højde, og P og Q er projektionerne af D på henholdsvis AC og AB. Vis at AH, BP og CQ skærer hinanden i et punkt.

Cevas sætning med vinkler
Cevas sætning kan også formuleres med de vinkler cevianerne danner med siderne, i stedet for med det forhold de deler siderne i.

Lad ABC være en trekant og AA', BB' og CC' cevianer i trekanten. Lad $\alpha_1 = \angle BAA'$, $\alpha_2 = \angle A'AC$, $\beta_1 = \angle CBB'$, $\beta_2 = \angle B'BA$, $\gamma_1 = \angle ACC'$ og $\gamma_2 = \angle C'CB$. Vinklerne regnes her med fortegn ligesom længderne i Cevas sætning, dvs. hvis fx A' ligger på forlængelsen af siden BC tættest på B, da er α_1 negativ.

Cevas sætning siger i denne version at cevianerne AA', BB' og CC' skærer hinanden i samme punkt, netop hvis

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$$



Opgave 7.5. Bevis sætningen.

Opgave 7.6. Lad AA', BB' og CC' være tre cevianer i trekant ABC som skærer hinanden i et fælles punkt. Lad A'' være skæringen mellem BC og spejlingen af AA' i vinkelhalveringslinjen til A, og lad B'' og C'' være defineret tilsvarende. Vis at de tre cevianer AA'', BB'' og CC'' skærer hinanden i et punkt.

Gloser
Cevas sætning *Ceva's theorem*
cevian *cevian*

8 Herons formel

Herons formel
Arealet T af en trekant ABC, hvor s betegner den halve omkreds, kan beregnes ud fra trekantens sidelængder vha. Herons formel:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bevis. Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2\cos^2 A = (b^2+c^2-a^2)^2.$$

Vi ved at $4T = 2bc\sin A$, og ved kvadrering $16T^2 = (2bc)^2\sin^2 A$. Desuden er $\sin^2 A = 1-\cos^2 A$. Samlet giver dette

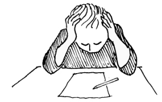
$$\begin{aligned}
16T^2 &= (2bc)^2-(2bc)^2\cos^2 A \\
&= (2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2 \\
&= (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2) \\
&= ((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2) \\
&= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\
&= 16s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Hermed er Herons formel bevist.

Opgave 8.1. Højderne i en trekant er 12, 15 og 20. Hvad er arealet af trekanten? (Baltic Way 2006)

Opgave 8.2. Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995)

Gloser
Herons formel *Heron's formula*

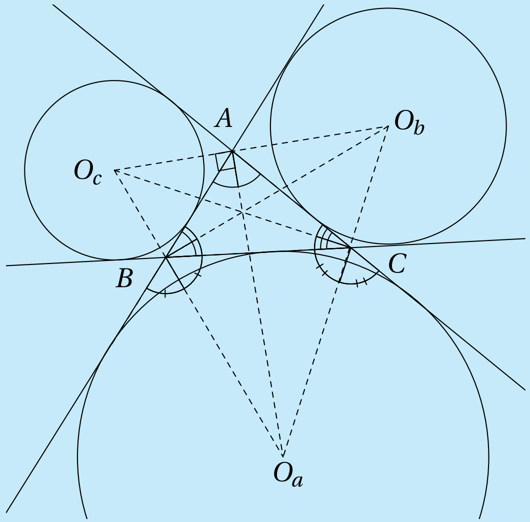


9 Trekantens ydre røringscirkler

Definition af trekantens ydre røringscirkler
En trekant ABC har tre ydre røringscirkler, en for hver side i trekanten. Den ydre røringscirkel til siden BC er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden BC samt forlængelserne af AB og AC.

Sætning om de ydre røringscirklers centre
Centrum for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel A og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og C.

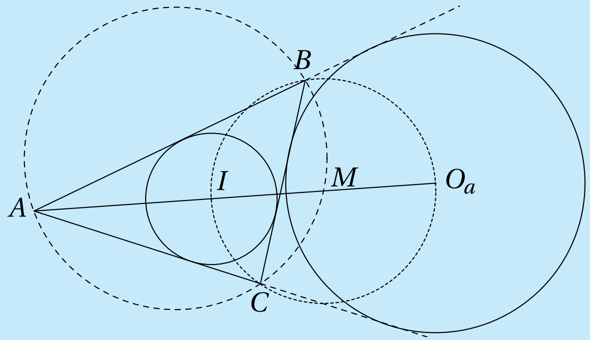
De tre ydre røringscirklers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant ABC er højder.



Bevis.Da den ydre røringscirkel til siden BC tangerer BC samt forlængelserne af AB og AC, må dens centrum ligge i samme afstand til disse tre linjer. Da vinkelhalveringslinjen netop er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til de to vinkelben, må den ydre røringscirkel centrum ligge på vinkelhalveringslinjen til vinkel A samt de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og vinkel C.

Af dette ses at de ydre røringscirklers centre O_a, O_b og O_c danner en trekant hvis sider går gennem henholdsvis A, B og C. Vinkelhalveringslinjen til vinkel A står vinkelret på siden O_bO_c, da $\angle BAO_a = \angle CAO_a$ og $\angle O_bAC = \angle O_cAB$. Dermed er O_aA højde i trekant $O_aO_bO_c$.

Sætning om den ydre røringscirkel
Lad ABC være en trekant, s den halve omkreds, ω_a den ydre røringscirkel til siden BC med centrum O_a, I centrum for den indskrevne cirkel, og M skæringen mellem den omskrevne cirkel til trekant ABC og vinkelhalveringslinjen fra A.



Da gælder at

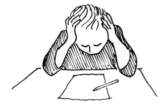
i) Potensen af A mht. ω_A er s^2.

ii) Røringspunktet mellem BC og den indskrevne cirkel og røringspunktet mellem BC og den ydre røringscirkel ω_A ligger symmetrisk på linjestykket BC omkring dets midtpunkt.

iii) Punkterne B, I, C og O_a ligger på en cirkel med M som centrum.

iv) Der gælder at $|AI||AO_a| = |AB||AC|$.

Opgave 9.1. Vis sætningen.



Sætning
I trekant ABC indtegnes tre cevianer fra vinkelspidserne til røringspunkterne for de tre røringscirkler. Disse tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 9.2. Vis sætningen

Sætning om radierne i de ydre røringscirkler.
For en trekant ABC betegner T arealet, s den halve omkreds, r radius i den indskrevne cirkel og r_a, r_b og r_c radierne i de tre ydre røringscirkler mht. henholdsvis A, B og C. Da gælder at

$$T = r_a(s-a) \quad \text{og} \quad T^2 = r\, r_a r_b r_c.$$

Opgave 9.3. Vis sætningen.

Opgave 9.4. Lad I være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ABC, og lad Γ være trekantens omskrevne cirkel. Lad linjen AI skære Γ i et punkt D forskelligt fra A. Lad E være et punkt på cirkelbuen CD som ikke indeholder A, og lad F være et punkt på siden BC så $\angle BAF = \angle CAE$. Lad yderligere G være midtpunktet af linjestykket IF. Vis at linjerne DG og EI skærer hinanden på Γ. (IMO 2010)

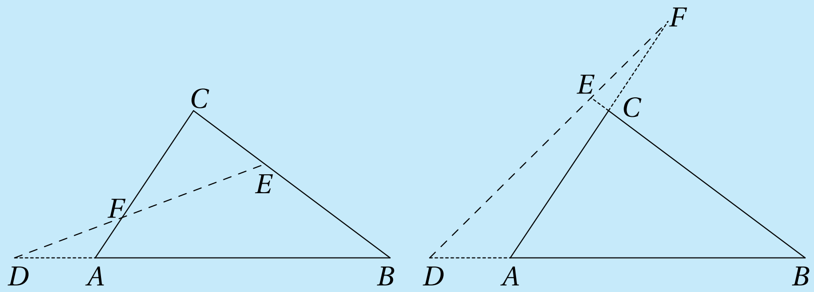
Gloser
centrum for den ydre røringscirkel *excenter*
ydre røringscirkel *excircle*

10 Menelaos sætning

Menelaos sætning
Lad ABC være en trekant. Menelaos' sætning siger at tre punkter D, E og F, som ligger på henholdsvis linjen AB, linjen BC og linjen CA, ligger på samme linje netop hvis

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|} = -1.$$

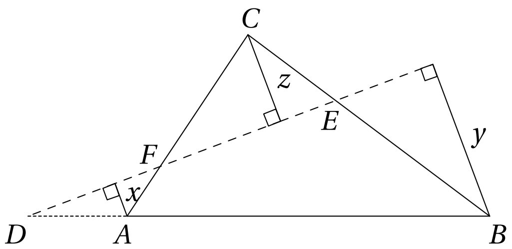
Her regnes linjestykkerne ligesom ved Cevas sætning med fortegn så positiv retning er AB, BC og CA. Hvis D fx ligger på forlængelsen af AB tættest på A som på figuren, da er $|AD|$ negativ.



Bevis. Antag først at punkterne D, E og F ligger på samme linje. Bemærk at da denne linje skærer trekanten nul eller to gange, vil der i udtrykket

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}$$

være enten en eller tre længder med negativt fortegn, dvs. udtrykket er altid negativt. Hvis vi kun regner med positive længder, er det derfor nok at vise at udtrykket er lig med 1. Lad x være længden af projektionen fra A på linjen DEF, y længden af projektionen fra B på linjen DEF og z længden af projektionen fra C på linjen DEF, som vist på figuren.



Pga. ensvinklede trekanter er

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{x}{y}, \quad \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{y}{z} \quad \text{og} \quad \frac{|CF|}{|FA|} = \frac{z}{x},$$

og dette er uafhængigt af om linjen DEF skærer trekanten to eller nul gange. Dermed er

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1,$$

når vi regner med fortegn.

Antag omvendt at der om D, E og F gælder at

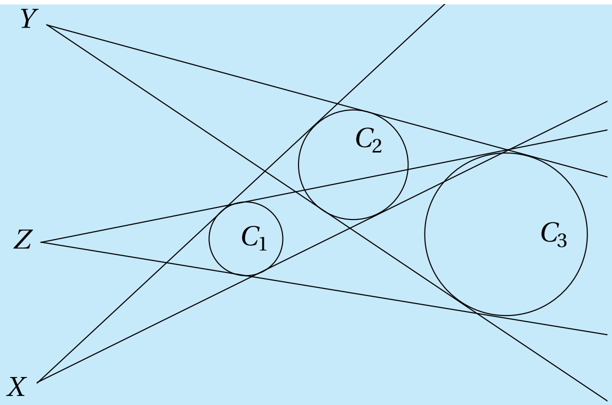
$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1.$$

Lad D' være skæringspunktet mellem EF og AB. Da ved vi fra før at

$$\frac{|AD'|}{|D'B|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1,$$

og dermed må $D = D'$, dvs. at D, E og F ligger på linje.

Monges sætning
Lad C_1, C_2 og C_3 være cirkler som ikke rører hinanden, og som har forskellige radier. Lad X være skæringspunktet mellem de to tangenter til C_1 og C_2 som har cirklerne på samme side af tangenten, lad tilsvarende Y være skæringspunktet mellem de to tangenter til C_2 og C_3 som har cirklerne på samme side af tangenten, og Z være skæringspunktet mellem de to tangenter til C_1 og C_3 som har cirklerne på samme side af tangenten.



Da ligger punkterne X, Y og Z på linje.

Opgave 10.1. Vis Monges sætning.

Monge-d'Alemberts sætning
Lad C_1, C_2 og C_3 være cirkler som ikke rører hinanden, og som har forskellige radier. Lad X være skæringspunktet mellem de to tangenter til C_1 og C_2 som har cirklerne på samme side af tangenten, lad Y være skæringspunktet mellem de to tangenter til C_2 og C_3 som har cirklerne på hver sin side af tangenten, og Z være skæringspunktet mellem de to tangenter til C_1 og C_3 som har cirklerne på hver sin side af tangenten. Da ligger punkterne X, Y og Z på linje.

Opgave 10.2. Vis Monge-d'Alemberts sætning.

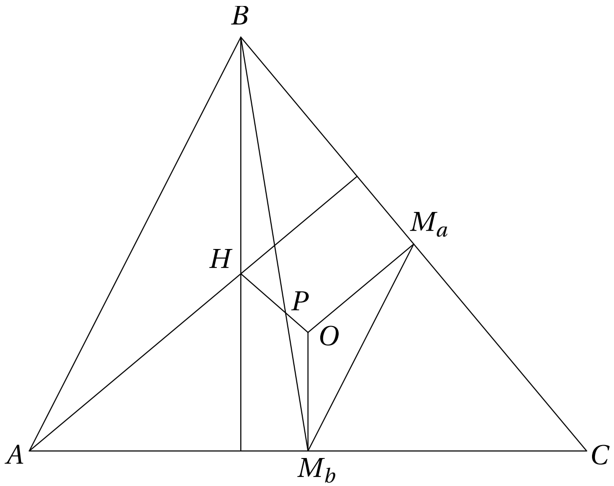
Gloser
Menelaos sætning *Menelaus' Theorem*

11 Eulerlinjen og Simsonlinjen

Sætning om Eulerlinjen
I en trekant ABC kaldes medianernes skæringspunkt som sædvanligt M, højdernes skæringspunkt H og midtnormalernes skæringspunkt O. Punkterne H, M og O ligger på en ret linje som kaldes Eulerlinjen, og M deler HO så

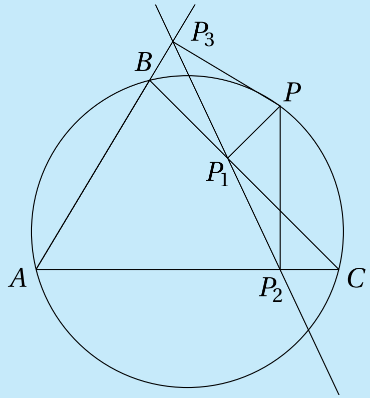
$$2|MO| = |MH|.$$

Bevis. Kald midtpunkterne af BC og AC for henholdsvis M_a og M_b, og skæringspunktet mellem BM_b og HO for P. Vi ønsker at vise at $P = M$ samt at $2|OM| = |HM|$.



Da AB er parallel med midtpunktstransversalen M_aM_b, OM_b er parallel med BH da de begge står vinkelret på AC, og OM_a er parallel med AH da de begge står vinkelret på BC, er trekanterne ABH og M_aM_bO ensvinklede med forholdet $2:1$. Desuden er trekant OPM_b ensvinklet med trekant HPB med samme forhold. Dermed er $2|M_bP| = |PB|$, og heraf ses det ønskede nemlig at $P = M$ og $2|MO| = |MH|$.

Sætning om Simsonlinjen
Lad P være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, P_1 projektionen af P på linjen BC, P_2 projektionen af P på linjen AC og P_3 projektionen af P på linjen AB.



Da ligger punkterne P_1, P_2 og P_3 på en ret linje, og denne linje kaldes Simsonlinjen.

Opgave 11.1. Bevis sætningen om Simsonlinjen.
Hint: Vis at firkanterne PCP_2P_1, PP_3BP_1 og PP_2AP_3 er indskrivelige, og udnyt dette til at vise at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$.

Den omvendte Simson
Lad ABC være en trekant, P et punkt og P_1, P_2 og P_3 projektionerne af P på henholdsvis BC, AC og AB. Hvis punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje, da ligger P på den omskrevne cirkel til trekant ABC. (Beviset udelades).

Opgave 11.2. Lad ABC være en trekant hvor D, E og F er fodpunkterne for højderne på henholdsvis BC, AC og AB. Lad yderligere P, Q, M og N være projekterne af D på henholdsvis AB, AC, BE og CF. Vis at punkterne P, Q, M og N ligger på linje.

Opgave 11.3. I planen er givet fire ikke-parallelle linjer så der ikke er tre som går gennem samme punkt. Hver trippel af linjer danner en trekant, dvs linjerne danner i alt fire trekanter, og hver af disse trekanter har en omskreven cirkel. Vis at de fire omskrevne cirkler har et fælles punkt.

Opgave 11.4. Betragt fem punkter A, B, C, D og E sådan at firkant $ABCD$ er et parallelogram, og firkant $BCED$ har en omskreven cirkel. Lad l være en linje gennem A. Antag at l skærer det indre af linjestykket DC i F og linjen BC i G. Antag derudover at $|EF| = |EG| = |EC|$. Bevis at l er vinkelhalveringslinje for vinkel DAB. (IMO 2007)
Hint: Benyt resultatet om Simsonlinjen til at vise at projektionen af E på linjen BD netop er skæringspunktet mellem diagonalerne i firkant $ABCD$.

Gloser
Eulerlinje *Euler line*
Simsonlinje *Simson line*

12 Ptolemæus' ulighed

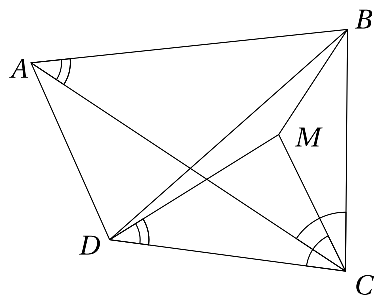
Ptolemæus' ulighed
For alle firkanter $ABCD$ gælder Ptolemæus' ulighed

$$|AB||CD| + |BC||DA| \geq |AC||BD|$$

med lighedstegn netop hvis firkant $ABCD$ er indskrivelig.

I de fleste opgaver har man ikke brug for uligheden, men blot at der for indskrivelige firkanter gælder lighedstegn. Dette kaldes *Ptolemæus' sætning*

Bevis. Givet en firkant $ABCD$ lad M være et punkt så trekant CDM og trekant CAB er ensvinklede og vender samme vej. Dermed er $|AB||CD| = |DM||AC|$.



Pga. konstruktionen er $\angle BCM = \angle ACD$. Da trekant CDM og trekant CAB er ensvinklede, er $|CB|/|CM| = |CA|/|CD|$. Altså er også trekant CAD og trekant CBM ensvinklede med $|AD||BC| = |BM||AC|$. I alt giver dette ifølge trekantsuligheden at

$$|AB||CD| + |BC||DA| = |AC|(|DM| + |MB|) \geq |AC||BD|$$

med lighedstegn netop når M ligger på BD. Punktet M ligger på BD netop når $\angle CDB = \angle CAB$, dvs. netop når firkant $ABCD$ er indskrivelig.

Opgave 12.1. En ligesidet trekant ABC er indskrevet i en cirkel. Lad M være et vilkårligt punkt på cirkelbuen BC. Vis at $|MA| = |MB| + |MC|$.

Opgave 12.2. En firkant $ABCD$ er indskreven i en cirkel med radius 1, $|AB| = 1$, $|AC| = \sqrt{2}$ og $|AD| = 2$. Bestem $|BC|$.

Opgave 12.3. Lad $ABCD$ være et kvadrat, og lad P være et punkt på cirkelbuen AD på den omskrevne cirkel til kvadratet. Vis at

$$\frac{|PA| + |PC|}{|PB|}$$

er konstant uanset valget af P.

Opgave 12.4. Lad $ABCDEFG$ være en regulær syvkant. Vis at

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}.$$

(En regulær n-kant er en n-kant hvor alle sider er lige lange, og alle vinkler er lige store.)

Gloser
Ptolemæus' sætning *Ptolemy's theorem*
Ptolemæus' ulighed *Ptolemy's inequality*

13 Inversion

Inversion er en bestemt type transformation af planen, og ved at benytte transformation på en geometrisk problemstilling omformer man problemstillingen til en anden ækvivalent problemstilling. Inversion er derfor et interessant redskab i nogle typer geometriopgaver. Dettee kapitel er en indføring i inversion, de centrale egenskaber ved inversion samt hvordan man kan benytte inversion.

Inversion
Lad C være en cirkel med centrum O og radius r. Inversion i denne cirkel er en afbildning af planen, fraregnet punktet O, på sig selv. Et punkt A, $A \neq O$, afbildes i det punkt A' som ligger på halvlinjen fra O gennem A, og som opfylder at $|OA||OA'| = r^2$.

Det er oplagt at inversionsafbildningen er sin egen inverse, og den er desuden kontinuert hvilket vi ikke vil komme nærmere ind på her. Bemærk at afbildningen fikserer cirklen C og afbilder dens indre på dens ydre og omvendt. Deraf navnet.

Det interessante ved inversion er at den afbilder linjer og cirkler i linjer og cirkler, samt at den bevarer vinkler mellem kurver, hvilket vi skal se nærmere på når det drejer sig om linjer og cirkler.

Man kan på helt tilsvarende vis definere inversion i en kugle i rummet.

I det følgende ser vi på inversion i en cirkel med centrum O og radius r, og vi betegner billedet af et punkt A med A', billedet af en cirkel α med α', osv.

Sætning om vinkler og afstande
To punkter A og B, begge forskellige fra O, afbildes i punkterne A' og B' så

$$\angle OA'B' = \angle OBA \quad \text{og} \quad |A'B'| = \frac{r^2}{|OA||OB|}|AB|.$$

Bevis. Vi viser at $\triangle OAB$ er ensvinklet med $\triangle OB'A'$ med forholdet $\frac{r^2}{|OA||OB|}$ da det viser sætningen.
Først bemærker vi at $\angle AOB = \angle A'OB'$. Desuden er

$$|OA'| = \frac{r^2}{|AO|} = \frac{r^2}{|OA||OB|}|OB| \text{ og tilsvarende } |OB'| = \frac{r^2}{|OA||OB|}|OA|,$$

hvilket giver det ønskede.

Sætning om linjer og cirkler
Inversion afbilder som sagt linjer og cirkler i linjer og cirkler. Mere præcist gælder

i) En linje gennem O afbildes på sig selv.

ii) En linje som ikke går gennem O, afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med linjen.

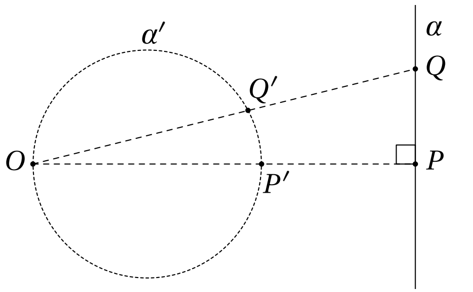
iii) En cirkel gennem O afbildes på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i O.

iv) En cirkel som ikke går gennem O, afbildes på en cirkel som ikke går gennem O.

Bevis.

i) En linje gennem O afbildes oplagt på sig selv.

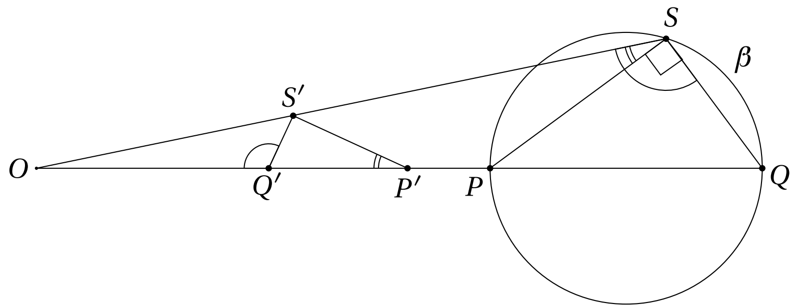
ii) Lad α være en linje som ikke går gennem O, og betragt projektionen P af O på α.



Påstanden er nu at α' er cirklen med diameter OP'. Lad Q være et punkt på α. Da gælder at $\angle OQ'P' = \angle OPQ = 90°$, dvs. at Q' ligger på cirklen med diameter OP'. Der gælder dermed at α afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med α.

iii) Tilsvarende afbildes en cirkel gennem O på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i O.

iv) Lad β være en cirkel som ikke går gennem O, og betragt linjen l gennem O og centrum af β. Linjen l skærer β i punkterne P og Q, og disse er forskellige fra O da β ikke går gennem O. Vi viser nu at β afbildes i cirklen med $P'Q'$ som diameter. Betragt et punkt S på β forskelligt fra P og Q.



Da ved vi at

$$\begin{aligned}\angle Q'S'P' &= 180° - \angle P'Q'S' - \angle S'P'Q' = \angle S'Q'O - \angle S'P'O \\ &= \angle QSO - \angle PSO = \angle PSQ = 90°,\end{aligned}$$

hvor vi til slut har udnyttet at PQ er diamter i S. Altså ligger S' på cirklen med diamter $P'Q'$, og dette viser at en cirkel som ikke går gennem O, afbildes i en cirkel som ikke går gennem O.

Det er vigtigt at bemærke at hvis α er en cirkel som ikke går gennem O, da er billedet af centrum som oftest ikke centrum i α'.

Nu vil vi vise at vinkler mellem linjer og cirkler bevares ved inversion, men først beviser vi at tangens mellem linjer og cirkler bevares ved inversion.

Sætning om tangens mellem linjer og cirkler
En linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i punktet P, $P \neq O$, afbildes ved inversion på en linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i P'.

Bevis. Da antallet af skæringspunkter forskellig fra O bevares ved inversion, følger det let.

Opgave 13.1. Lad α være en cirkel som ikke går gennem O. Vis at centrum af α, centrum af α' og O ligger på linje.

Opgave 13.2. Lad ABC være en trekant, og lad s betegne den halve omkreds. Vis at den ydre røringscirkel til siden c afbildes på sig selv ved inversion i en cirkel med centrum C og radius s.

Sætning om at vinkler bevares ved inversion
Vinklen mellem to linjer, en linje og en cirkel samt to cirkler bevares ved inversion.

Bevis. Hvis to linjer skærer i punktet O bevares vinklen oplagt ved inversion.

Lad α og β være to linjer som skærer hinanden i P, $P \neq O$. Da vil α' og β' have netop to skæringspunkter P' og O. Vinklen mellem α' og β' i P' vil være identisk med vinklen mellem dem i O. Da en linje gennem O afbildes på sig selv, og en linje der ikke går gennem O, afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med linjen, vil vinklen mellem α' og β' i O være identisk med vinklen mellem α og β i P.

Lad α være en linje og β en cirkel som skærer hinanden i P, $P \neq O$. Lad γ være tangenten til β i P. Da er vinklen mellem α og β i P lig med vinklen mellem α og γ i P som ifølge det vi lige har vist er identisk med vinklen mellem α' og γ' i P' som er lig med vinklen mellem α' og β' i P' da tangens bevares ved inversion.

På tilsvarende vis ses at vinklen mellem to cirkler bevares ved inversion.

Opgave 13.3. I en trekant ABC kaldes røringspunkterne mellem den indskrevne cirkel og siden AB og siden AC for henholdsvis M og N. Vis at ved inversion i den indskrevne cirkel afbildes A i midtpunktet af linjestykket MN.

Nu skal vi se på hvorfor inversion i nogle sammenhænge er rigtig smart. Fx er Ptolemæus' ulighed helt lige til hvis man inverterer problemstillingen.

Ptolemæus' ulighed
Som vi så i et tidligere kapitel siger Ptolemæus' ulighed at der for en firkant $ABCD$ gælder at

$$|AB||CD| + |AD||BC| \geq |AC||BD|$$

med lighedstegn netop hvis firkant $ABCD$ er indskrivelig.

Bevis. Vi inverterer i en cirkel med centrum i A og radius r. Dette giver

$$\begin{aligned} |AB||CD| + |AD||BC| &= \frac{r^2}{|AB'|}\frac{r^2}{|AC'||AD'|}|C'D'| + \frac{r^2}{|AD'|}\frac{r^2}{|AB'||AC'|}|B'C'| \\ &= \frac{r^4}{|AB'||AC'||AD'|}(|B'C'| + |C'D'|) \end{aligned}$$

og

$$|AC||BD| = \frac{r^2}{|AC'|}\frac{r^2}{|AB'||AD'|}|B'D'| = \frac{r^4}{|AB'||AC'||AD'|}|B'D'|.$$

Ptolemæus' ulighed er i den inverterede situation derfor blot trekantsuligheden

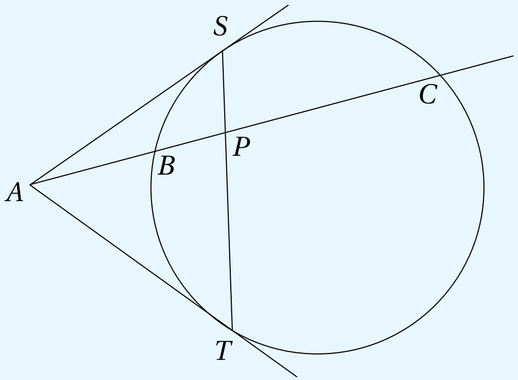
$$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$$

hvor der gælder lighedstegn netop hvis B', C' og D' ligger på en linje i nævnte rækkefølge. I det ikke inverterede tilfælde er dette netop ækvivalent med at B, C og D ligger på en cirkel gennem A, så C ikke ligger ved siden af A, dvs. at firkant $ABCD$ er indskrivelig.

I beviset for Ptolemæus' ulighed benyttede vi kun formlen for hvordan afstande ændres ved inversion, samt at en cirkel gennem inversionscirklens centrum afbildes på en linje der ikke går gennem centrum og omvendt. Og så selvfølgelig trekantsuligheden.

Eksempel med NMC-opgave fra 2007

En linje gennem A skærer en cirkel i to punkter, B og C, på en sådan måde at B ligger mellem A og C. Fra punktet A tegnes de to tangenter til cirklen. Tangenterne rører cirklen i punkterne S og T. Lad P være skæringspunktet mellem linjerne ST og AC.



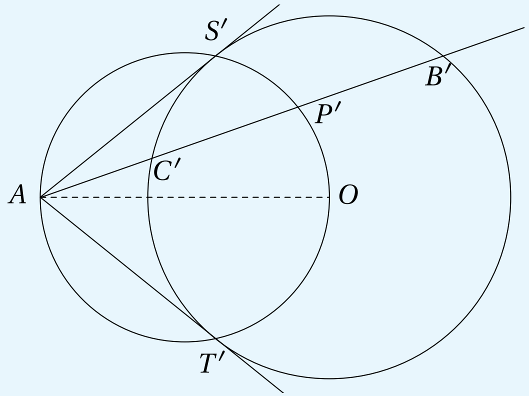
Vi skal vise at

$$\frac{|AP|}{|PC|} = 2\frac{|AB|}{|BC|}.$$

Allerførst skal vi overveje hvilket punkt vi skal invertere i. De to mest centrale punkter er P og A, og man kan faktisk invertere i dem begge med succes. Her ser vi på en inversion i A.

Inversion i en cirkel med centrum i A

Ved inversion i en cirkel med centrum A og radius r afbildes linjerne gennem A på sig selv, linjen ST afbildes i en cirkel gennem A, og cirklen afbildes i en cirkel som tangerer linjerne AS' og AT' som vist på figuren.



Nu skal vi først udregne hvad det er vi skal vise:

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{r^2/|AP'|}{r^2|P'C'|/(|AP'||AC'|)} = \frac{|AC'|}{|P'C'|}$$

$$2\frac{|AB|}{|BC|} = 2\frac{r^2/|AB'|}{r^2|B'C'|/(|AB'||AC'|)} = 2\frac{|AC'|}{|B'C'|}.$$

Vi skal altså i det inverterede tilfælde blot vise den simplere sammenhæng at

$$|B'C'| = 2|P'C'|.$$

Lad AO være diameter i cirkel $AS'P'T'$. Da er $\angle AS'O = \angle AT'O = 90°$, og derfor er O centrum i cirkel $B'T'C'S'$. Der gælder yderligere at $\angle AP'O = 90°$, hvilket betyder at radius fra O gennem P' i cirkel $B'T'C'S'$ står vinkelret på korden $C'B'$, og derfor deler den på midten. Altså er $|B'C'| = 2|P'C'|$ som ønsket.

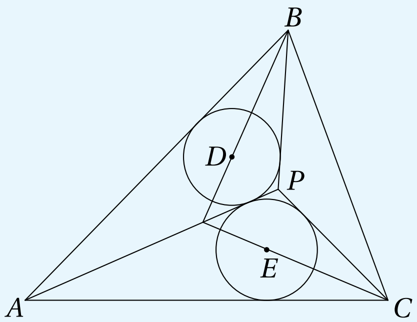
Nu skal vi se på en IMO-opgave fra 1996 hvor inversion er et utroligt effektivt redskab.

Eksempel fra IMO 1996

Opgaven lyder: Lad P være et indre punkt i trekant ABC så

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Lad D og E være centrene for henholdsvis de indskrevne cirkler i trekant APB og trekant APC.
Vis at linjerne AP, BD og CE skærer hinanden i et punkt.



Først bemærker vi at linjen BD er vinkelhalveringslinjen fra B i trekant ABP, og det er kendt at vinkelhalveringslinjen deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de to hosliggende sider. Linjen BD deler altså linjestykket AP i forholdet $|AB|/|BP|$. På tilsvarende vis ses at linjen CE deler linjestykket AP i forholdet $|AC|/|PC|$. At vise at de tre linjer BD, CE og AP går gennem samme punkt, er altså ækvivalent med at vise at

$$\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|PC|}.$$

Nu skal vi overveje hvilket centrum vores inversionscirkel skal have. I dette tilfælde er der en del vinkler hvis ene vinkelben går gennem A, og i sådan et tilfælde er det ofte en god ide at invertere i en cirkel med centrum i A. Valget af radius er derimod ikke væsentligt.

Når vi inverterer i en cirkel med centrum i A og radius r, svarer ligheden vi skal vise til den væsentlige simplere lighed

$$|P'B'| = |P'C'|.$$

Vi har endnu ikke benyttet oplysningerne om vinklerne, så derfor ser vi på hvad disse giver os af information i den inverterede situation.

$$\angle APB - \angle ACB = \angle AB'P' - \angle AB'C' = \angle C'B'P'.$$

Tilsvarende er

$$\angle APC - \angle ABC = \angle AC'P' - \angle AC'B' = \angle B'C'P'.$$

Ifølge antagelsen om vinklerne har vi nu at $\angle C'B'P' = \angle B'C'P'$, dvs. at

$$|P'B'| = |P'C'|$$

som ønsket.

Ved først at udnytte at vinkelhalveringslinjer deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende cirkler, og efterfølgende invertere omformes problemstillingen til en problemstilling der nærmest giver sig selv.

Kunsten er selvfølgelig at gennemskue at inversion i en cirkel med centrum i A forsimpler problemstillingen.

Opgave 13.4. Lad ABC være en trekant, og lad s betegne den halve omkreds. Punkterne P og Q ligger på linjen AB så $|CP| = |CQ| = s$. Vis at den omskrevne cirkel til trekant CPQ tangerer den ydre røringscirkel til siden c i trekant ABC.

Opgave 13.5. Fire cirkler tangerer hinanden så C_1 og C_3 tangerer C_2 og C_4, samt så cirklerne ikke overlapper hinanden. Røringspunkterne mellem C_1 og C_2, C_2 og C_3, C_3 og C_4 samt C_4 og C_1 betegnes henholdsvis A, B, C og D. Vis at disse fire punkter enten ligger på en ret linje eller på en cirkel.

Opgave 13.6. Tre cirkler Γ_A, Γ_B og Γ_C har et fælles skæringspunkt O. Det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_B er C, det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_C er B, og det andet skæringspunkt mellem Γ_B og Γ_C er A. Linjen AO skærer cirklen Γ_A i et punkt X forskelligt fra O. Ligeledes skærer linjen BO cirklen Γ_B i et punkt Y forskelligt fra O, og linjen CO skærer cirklen Γ_C i et punkt Z forskelligt fra O. Vis at

$$\frac{|AY||BZ||CX|}{|AZ||BX||CY|} = 1.$$

(NMC 2010)

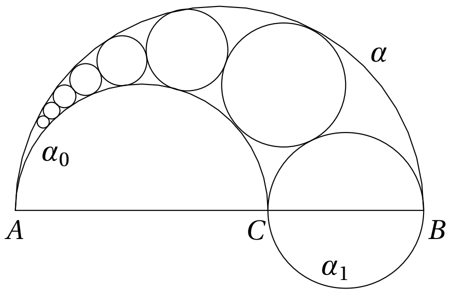
Opgave 13.7. Lad B_1 og C_1 være midtpunkterne af henholdsvis AB og AC i trekant ABC. Skæringspunktet mellem de omskrevne cirkler til trekant AB_1C og trekant ABC_1 betegnes P, og skæringspunktet forskelligt fra A mellem linjen AP og den omskrevne cirkel til trekant AB_1C_1 betegnes P_1. Vis at $2|AP| = 3|AP_1|$. (Baltic Way 2006)

Opgave 13.8. Fire cirkler α_1, α_2, α_3 og α_4 går alle gennem et punkt P så α_1 og α_3 tangerer hinanden udvendigt i P, og α_2 og α_4 ligeledes tangerer hinanden udvendigt i P. Antag yderligere at α_1 og α_2, α_2 og α_3, α_3 og α_4 samt α_4 og α_1 skærer hinanden i henholdsvis A, B, C og D alle forskellige fra P. Vis at

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}.$$

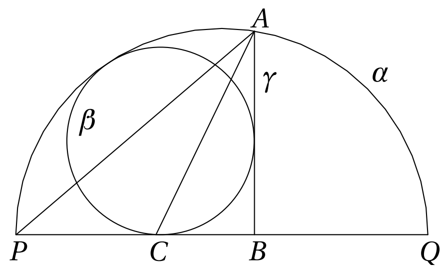
Opgave 13.9. Lad $ABCD$ være en konveks firkant så de to diagonaler står vinkelret på hinanden. Kald skæringspunktet mellem diagonalerne for O, og kald fodpunkterne for højderne fra O i trekant OAB, OBC, OCD og ODA for henholdsvis P, Q, R og S. Vis at punkterne P, Q, R og S ligger på en cirkel.

Opgave 13.10. Lad α være en halvcirkel med diameter AB, C et punkt på linjestykket AB forskelligt fra A og B, og α_0 en halvcirkel med AC som diameter så α og α_0 ligger på samme side af AB. Nu definerer vi en følge af cirkler på følgende måde. Cirklen α_1 er cirklen med diameter BC, og cirklen α_n er cirklen som tangerer α, α_0 og α_{n-1} som vist på figuren.



Kald røringspunktet mellem α_i og α_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots$, for P_i. Vis at alle røringspunkterne $P_1, P_2, P_2, \ldots$ ligger på en cirkel.

Opgave 13.11. Lad α være en halvcirkel med diameter PQ, β en cirkel som tangerer linjestykket PQ og halvcirklen α, førstnævnte i punktet C, og γ en linje som tangerer β og står vinkelret på PQ i punktet B, så B ligger mellem C og Q. Kald det andet skæringspunkt mellem α og γ for A. Vis at AC er vinkelhalveringslinje i trekant PAB.

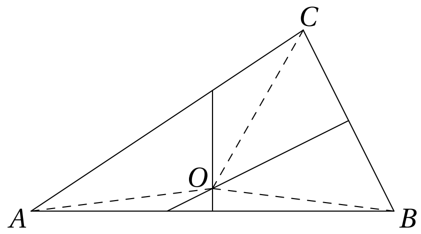


Gloser
inversion *inversion*

14 Løsningsskitser

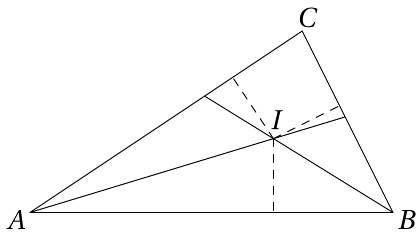
Opgave 1.1 Da MN er midtpunktstransversal i trekant ABC, og PQ er midtpunktstransversal i trekant CDA, er både MN og PQ parallelle med AC og derfor også med hinanden. På samme måde ses at NP og MQ er parallelle. Derfor er firkant $MNPQ$ et parallelogram.

Opgave 1.2 Lad ABC være en trekant, tegn midtnormalerne på AB og BC, og kald deres skæringspunkt for O.

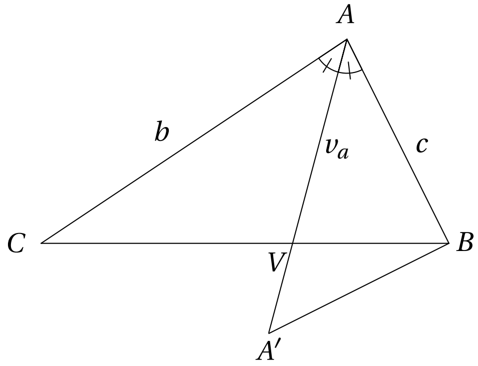


Da midtnormalen på AB er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til A og B, og midtnormalen på BC er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til B og C, må afstandene fra O til henholdsvis A, B og C være lige store. Punktet O er dermed centrum for den omskrevne cirkel, og midtnormalen på AC vil på tilsvarende vis gå gennem O.

Opgave 1.3 Lad ABC være en trekant, tegn vinkelhalveringslinjerne fra A og B, og kald deres skæringspunkt for I.



Da vinkelhalveringslinjerne er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, må afstandene fra I til alle tre sider være lige store. Punktet I er dermed centrum for den indskrevne cirkel, og vinkelhalveringslinjen fra C vil på tilsvarende vis gå gennem I.



Ved at udnytte at

$$\sin(\angle CVA) = \sin(180^\circ - \angle CVA) = \sin(\angle AVB)$$

får vi

$$\frac{b}{|CV|} = \frac{\sin(\angle CVA)}{\sin(\frac{A}{2})} = \frac{\sin(\angle BVA)}{\sin(\frac{A}{2})} = \frac{c}{|VB|}.$$

Heraf ses at vinkelhalveringslinjen deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende sider.

Sidste del kan også vises på en anden måde uden brug af trigonometri: Lad A' være skæringspunktet mellem linjen gennem B parallel med AC og linjen AV. Da er

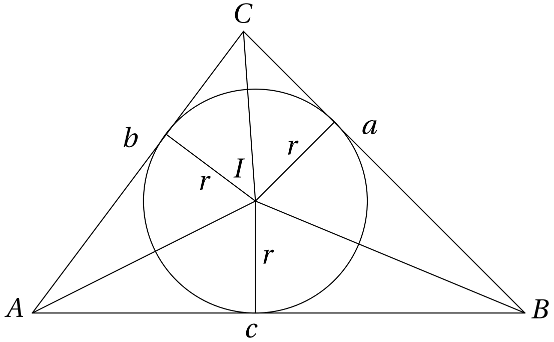
$$\angle AA'B = \angle CAV = \angle VAB = \angle A'AB,$$

dvs. trekant $AA'B$ er ligebenet med $|A'B| = c$. Trekanterne CAV og $BA'V$ er pr. konstruktion ligedannede, hvilket giver

$$\frac{b}{|CV|} = \frac{|A'B|}{|BV|} = \frac{c}{|BV|}$$

som ønsket.

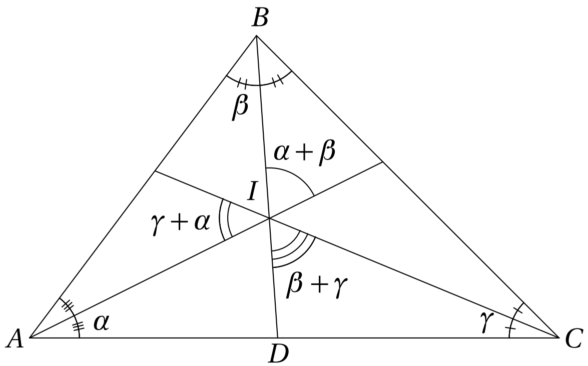
Opgave 1.4 Kald centrum for den indskrevne cirkel for I.



Arealet af trekant ABI er da $\frac{1}{2}rc$ da r er højden, og c er grundlinjen. Tilsvarende er arealet af trekant ACI og BCI henholdsvis $\frac{1}{2}rb$ og $\frac{1}{2}ra$. Da arealet af trekant ABC netop er summen af arealerne af disse tre trekanter, er

$$T = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr.$$

Opgave 1.5 Lad D være fodpunktet for vinkelhalveringslinjen fra B.

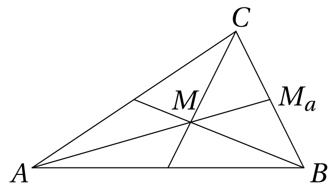


Da $\alpha+\beta+\gamma = 90°$, er $\angle BDC = 180° - \beta - 2\gamma = 2\alpha + \beta$. Dermed er

$$\angle DIC = 180° - (2\alpha+\beta) - \gamma = \beta + \gamma.$$

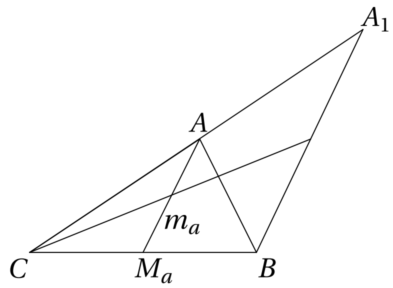
De andre vinkler vises på tilsvarende måde.

Opgave 1.6 Lad M betegne medianernes skæringspunkt og M_a betegne fodpunktet for medianen på siden a.



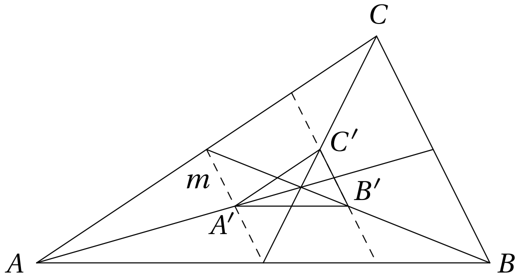
Da $3|MM_a| = |AM_a|$, er højden fra A i trekant ABC tre gange så stor som højden fra M i trekant MBC. Dermed udgør arealet af trekant MBC en tredjedel af arealet af trekant ABC. Desuden har trekant MM_aB og trekant MM_aC samme areal da de har samme højde og lige store grundlinjer. Dermed deler medianerne en trekant i seks små trekanter med samme areal.

Opgave 1.7 Kald fodpunktet af medianen m_a på a for M_a. Tegn en linje gennem B parallel med M_aA, og lad A_1 være skæringspunktet mellem denne linje og forlængelsen af AC.



Trekanterne ACM_a og A_1CB er ensvinklede med forholdet $1:2$, dvs. at $|CA| = |AA_1|$. Linjen gennem C som halverer m_a, halverer også A_1B da m_a og A_1B er parallelle. Denne linje og AB er derfor begge medianer i trekant A_1BC, og linjen deler dermed AB i forholdet $1:2$.

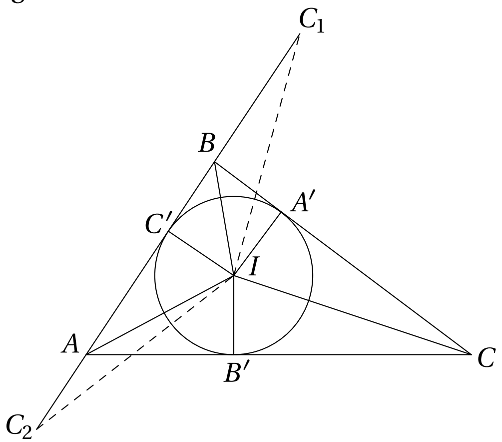
Opgave 1.8 Først viser vi at siderne i trekant $A'B'C'$ er parallelle med siderne i trekant ABC. Indtegn midtpunktstransversalen m gennem siderne AB og AC.



Denne midtpunktstransversal går gennem A' og er parallel med BC. Punkterne B' og C' ligger lige langt fra linjen m og linjen BC, og dermed er siden $B'C'$ parallel med BC. Tilsvarende gælder for de andre to sider i trekant $A'B'C'$. Vi har nu at siderne i trekant ABC og siderne i trekant $A'B'C'$ er parallelle.

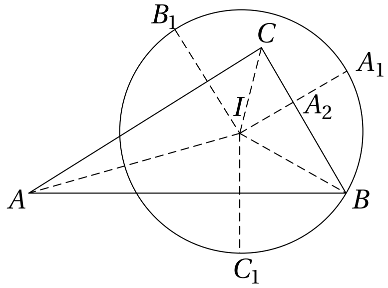
Da midtpunktstransversalen m deler siden AB på midten, må linjen $B'C'$ dele siden AB i forholdet $1:3$, dvs. at $|AB| = 4|A'B'|$. Dermed er forholdet mellem siderne i trekant $A'B'C'$ og siderne i trekant ABC $1:4$, dvs. at forholdet mellem arealerne er $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Arealet af trekant $A'B'C'$ er derfor $\frac{1}{16}$.

Opgave 1.9 Lad A', B' og C' være den indskrevne cirkels røringspunkter med henholdsvis a, b og c.



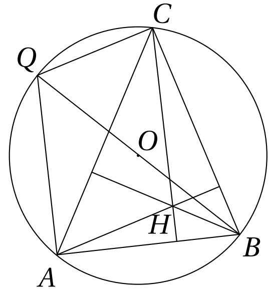
Trekanterne $IC'C_1$, $IC'C_2$, $IA'C$ og $IB'C$ er kongruente, dvs. at $|C_1C_2| = |C_1C'| + |C'C_2| = |A'C| + |CB'|$. På tilsvarende vis fås $|A_1A_2| = |B'A| + |AC'|$ og $|B_1B_2| = |A'B| + |BC'|$. Dette giver det ønskede.

Opgave 1.10 Lad A_2 være skæringspunktet mellem IA_1 og BC.



Trekant BA_2I er retvinklet, og $|BI| = 2|A_2I|$. Dermed er $\angle IBA_2 = 30°$. Da BI er vinkelhalveringslinje, er vinkel $B = 60°$.

Opgave 2.1 Da BQ er diameter i den omskrevne cirkel, står QC vinkelret på CB og er dermed parallel med AH som også står vinkelret på CB.



På samme måde ses at QA er parallel med CH. Dermed er $AQCH$ et parallelogram.

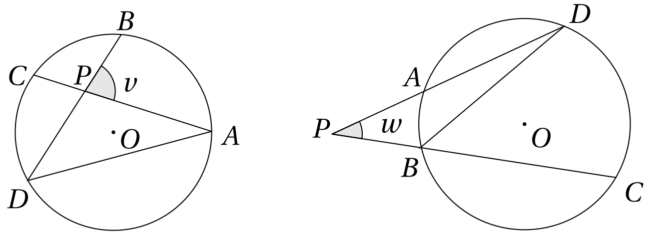
Opgave 2.2 Vi skal vise at korde-tangentvinklen w er halvt så stor som den centervinkel v der spænder over korden. Da linjestykket fra centrum til tangentens røringspunkt står vinkelret på tangenten, er

$$w = 90° - \angle OAB = 90° - \frac{180° - v}{2} = \frac{v}{2}.$$

Opgave 2.3 Antag at $\angle RPQ = \angle PSQ = \alpha$. Ifølge sætningen om korde-tangentvinkler danner tangenten i P en vinkel α med PQ. Dermed er l sammenfaldende med denne tangent.

Opgave 2.4 Betragt trekant ADP. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

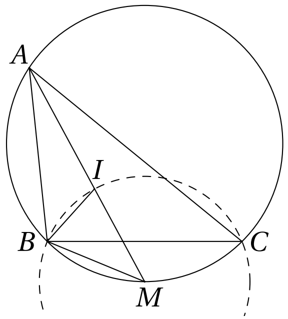
$$v = 180^\circ - \angle APD = \angle PDA + \angle PAD = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$



Bemærk først at $\angle PBD = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$. Betragt nu trekant PBD. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

$$w = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \left(180^\circ - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\right) = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

Opgave 2.5 Da AI er vinkelhalveringslinje i trekant ABC, må M være midtpunktet af cirkelbuen BC. Dermed er $|BM| = |CM|$. Lad som sædvanligt α, β og γ være de halve vinkler.

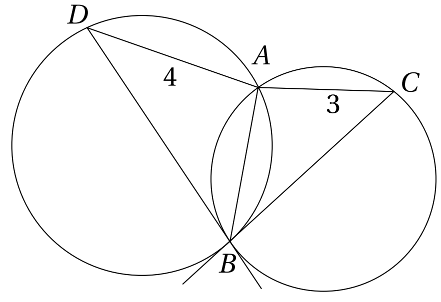


Vi mangler at bevise at $|IM| = |BM|$. Ved at benytte sætningen om vinkler ved I fås at $\angle BIM = \alpha + \beta$. Desuden er

$$\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \angle MAC + \beta = \alpha + \beta.$$

Dermed er $|IM| = |BM|$, og M er centrum for cirklen gennem B, C og I.

Opgave 2.6 Ifølge sætningen om korde-tangentvinkler er trekant ABD og trekant ACB ensvinklede. Dette giver $|AB|^2 = |AC||AD| = 12$, og altså $|AB| = \sqrt{12}$.



Opgave 2.7 Bemærk først at

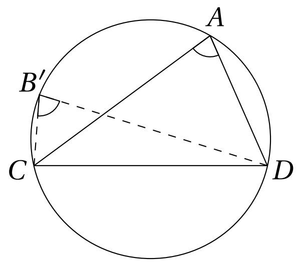
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

Kald arealet af trekanten for T. Da er $a+b+c = \frac{2T}{r}$ og $abc = 4RT$. Vi har nu

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{2T}{r4RT} = \frac{1}{2rR}.$$

som ønsket.

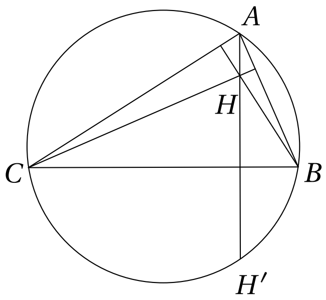
Opgave 3.1 Lad $ABCD$ være en firkant hvor $\angle CAD = \angle CBD$. Tegn den omskrevne cirkel til trekant ACD, og lad B' være skæringspunktet mellem BD og den omskrevne cirkel. Da B' ligger på cirkelperiferien, er $\angle CB'D = \angle CAD = \angle CBD$. Trekanterne CDB og CDB' er dermed kongruente da de også har vinklen ved D fælles og siden CD. Dermed er $B = B'$ og firkant $ABCD$ indskrivelig.



Lad omvendt $ABCD$ være en indskrivelig firkant. Da gælder ifølge sætningen om periferivinkler at $\angle CAD = \angle CBD$.

Opgave 3.2 Vi ser på tilfældet hvor vinkel A og B er spidse. Firkant AH_bH_aB er indskrivelig da $\angle AH_aB = 90° = \angle AH_bB$. Da AH_bH_aB er indskrivelig, må $\angle CH_aH_b = 180° - \angle BH_aH_b = \angle CAB$. Dermed er $\triangle CAB$ ensvinklet med $\triangle CH_aH_b$. Beviset foregår stort set tilsvarende hvis vinkel A eller B er stump.

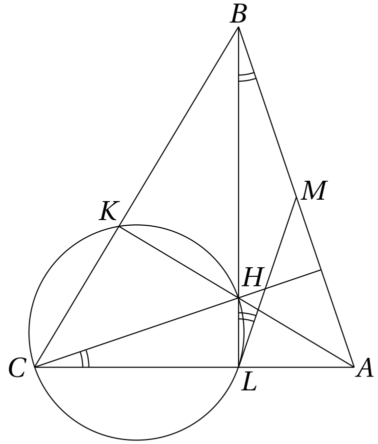
Opgave 3.3 Vi viser det i tilfældet hvor ABC er en spidsvinklet trekant. Lad H' være skæringen mellem AH og den omskrevne cirkel til trekant ABC.



Da er $\angle H'CB = \angle H'AB = 90° - \angle ABC = \angle HCB$. Da HA står vinkelret på BC, følger det at H' er spejlingen af H i siden BC. Beviset foregår stort set på samme måde hvis trekant ABC er stumpvinklet.

Opgave 3.4 Da firkant AH_bH_aB er indskrivelig, er $\angle AH_aH_b = \angle ABH_b$. Tilsvarende er $\angle AH_aH_c = \angle ACH_c$. Da $\triangle ABH_b$ og $\triangle ACH_c$ er retvinklede og har vinkel A fælles, er de ensvinklede, og dermed er $\angle ABH_b = \angle ACH_c$. Samlet er AH_a vinkelhalveringslinje i $\triangle H_aH_bH_c$.

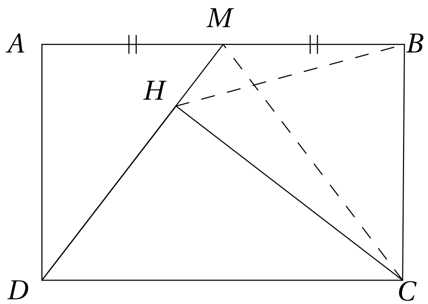
Opgave 3.5 Kald højdernes skæringspunkt for H. Da firkant $CKHL$ er indskrivelig, ligger H på den omskrevne cirkel til trekant CKL. Da højderne skærer hinanden i samme punkt, er linjen CH også højde i trekanten. Derfor er $\angle ABL = 90° - \angle BAC = \angle HCA$.



Da M er midtpunktet af hypotenusen i den retvinklede trekant ALB, er $\angle ABL = \angle MLB$. Dermed er vinklen mellem linjen ML og korden HL den samme som periferivinklen $\angle HCL$ der spænder over korden HL. Altså er ML tangent til cirklen ifølge den omvendte sætning om korde-tangentvinkler. Helt tilsvarende vises at MK er tangent til cirklen.

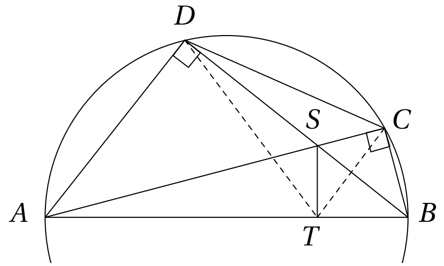
Opgave 3.6 Kald punktet hvor alle tre cirkler skærer hinanden, for S. Da summen af modstående vinkler i indskrivelige firkanter er 180°, er $\angle BRS = \angle APS = \angle SQC$ og $\angle SQC + \angle SRC = 180°$. Dermed er $\angle SRC + \angle SRB = 180°$ som ønsket.

Opgave 3.7 Da $\angle MHC = \angle MBC = 90°$, er firkant $MHCB$ indskrivelig.



Dermed er $\angle BCH = \angle AMD = \angle BMC = \angle BHC$, hvilket viser at $|BC| = |BH|$.

Opgave 3.8 Vinkel ADB og vinkel ACB er rette da de spænder over en diameter i cirklen.

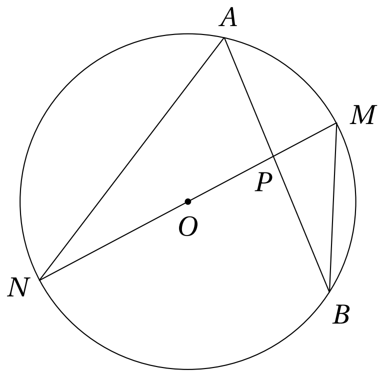


Firkanterne $ADST$ og $BCST$ er derfor indskrivelige da de har to modstående rette vinkler, og firkant $ABCD$ er pr. konstruktion indskrivelig. Dermed er

$$\angle CTS = \angle CBS = \angle CBD = \angle CAD = \angle SAD = \angle STD,$$

hvilket viser at linjen ST halverer vinkel $\angle CTD$.

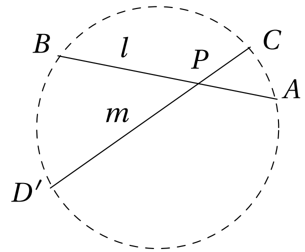
Opgave 4.1 Lad P være et punkt inden i cirklen, så $P \neq O$.



Tegn linjen gennem P og O, og kald skæringspunkterne med cirklen for M og N. Trekanterne $\triangle AMP$ og $\triangle NBP$ er ensvinklede ifølge sætningen om periferivinkler. Altså er

$$|AP||BP| = |MP||NP| = (r - |OP|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2 = -\text{Pow}(P, \omega).$$

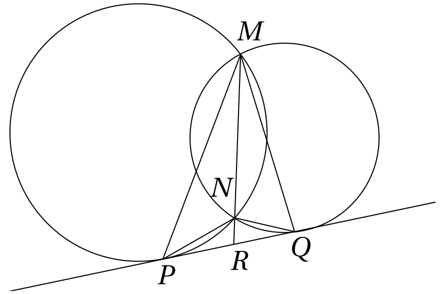
Opgave 4.2 Antag at A og B ligger på l på hver sin side af P, og at C og D ligger på m på hver sin side af P. Antag yderligere at $|PA||PB| = |PC||PD|$.



Lad ω være cirklen gennem A, B og C, og lad D' være skæringen (forskellig fra C) mellem ω og linjen m. Da P ligger på korden AB, må P være et indre punkt i ω. Dermed ligger P også på korden CD', dvs. at D og D' ligger på samme side af P på linjen m. Ifølge sætningen om et punkts potens er $|PA||PB| = |PC||PD'|$. Dermed er $|PD| = |PD'|$ og altså $D = D'$. De fire punkter A, B, C og D ligger derfor på samme cirkel.

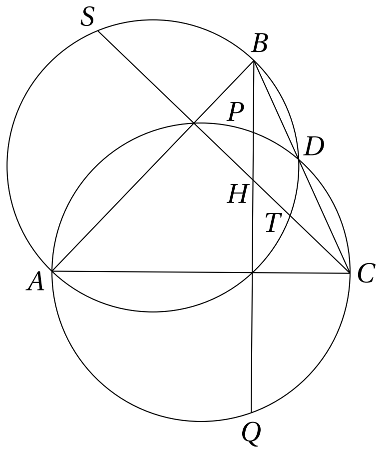
Beviset føres stort set tilsvarende når både A og B ligger på samme side af P, og C og D ligger på samme side af P. I dette tilfælde er P blot et punkt der ligger uden for cirklen.

Opgave 4.3 Lad R være skæringspunktet mellem NM og PQ. Ifølge sætningen om punkts potens er $|PR|^2 = |RN||RM| = |QR|^2$, og altså $|PR| = |QR|$.



Dermed har trekant MRP og trekant MRQ samme areal, og trekant NPR og trekant NQR samme areal, og dermed har også trekant MNP og trekant MNQ samme areal.

Opgave 4.4 Lad D være skæringspunktet mellem de to cirkler. Da er vinklerne $\angle ADB$ og $\angle ADC$ begge rette da de spænder over en diameter, og dermed er D fodpunktet for højden fra A på siden BC.

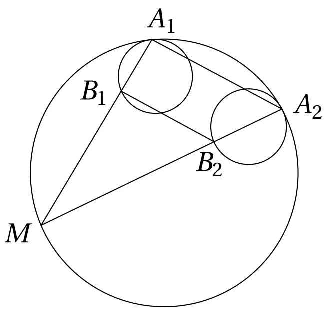


Højdernes skæringspunkt H ligger derfor på AD, hvilket ifølge sætningen om et punkt potens giver at

$$|HS||HT| = |HA||HD| = |HP||HQ|.$$

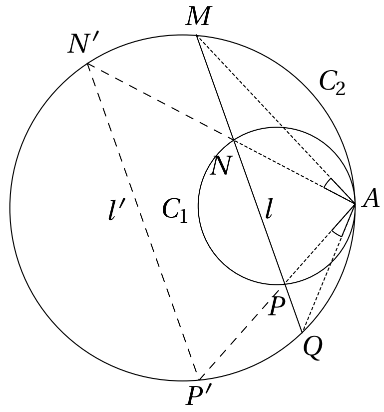
Dermed ligger P, Q, S og T på en cirkel ifølge den omvendte sætning om et punkts potens.

Opgave 5.1 Der findes en multiplikation omkring A_1 med multiplikationsfaktor k_1 som fører C_1 i C, og tilsvarende en multiplikation omkring A_2 med multiplikationsfaktor k_2 som fører C_2 i C.



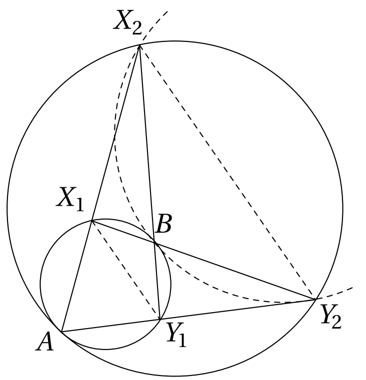
Da C_1 og C_2 har samme radius, betyder det at $k_1 = k_2$. Altså vil en multiplikation omkring M med multiplikationsfaktor $\frac{k_1}{k_1-1}$ afbilde B_1 i A_1 og B_2 i A_2, og dermed B_1B_2 i A_1A_2. De to linjer er derfor parallelle.

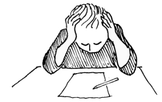
Opgave 5.2 Der findes en multiplikation omkring A som afbilder C_1 i C_2. Ved denne multiplikation afbildes N i N' og P i P' som vist på figuren.



Linjerne l og l' er parallelle og cirkelbuerne $\overset{\frown}{MN'}$ og $\overset{\frown}{QP'}$ derfor ligestore. Altså er $\angle MAN = \angle PAQ$.

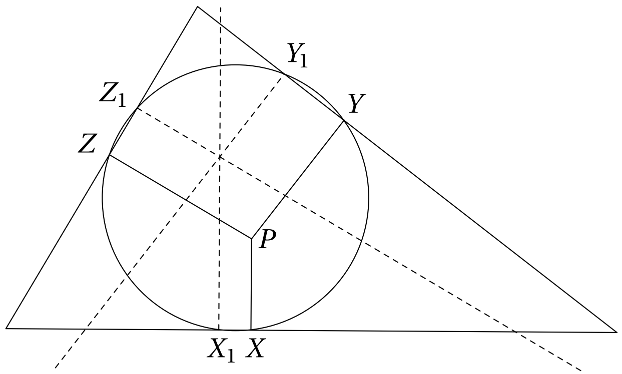
Opgave 5.3 Der findes en multiplikation omkring A som afbilder C_1 i C_2, og multiplikationsfaktoren for denne afbildning kaldes k. Dermed er $|X_2Y_2| = k|X_1Y_1|$.





Trekanterne X_1BY_1 og Y_2BX_2 er derfor ensvinklede så $|BY_2| = k|BX_1|$ og $|BX_2| = k|BY_1|$. En multiplikation omkring B med multiplikationsfaktoren $-k$ fører dermed X_1 i Y_2 og Y_1 i X_2, og altså cirklen C_1 i den omskrevne cirkel til BX_2Y_2. Dermed tangerer C_1 og den omskrevne cirkel til BX_2Y_2 hinanden (overvej).

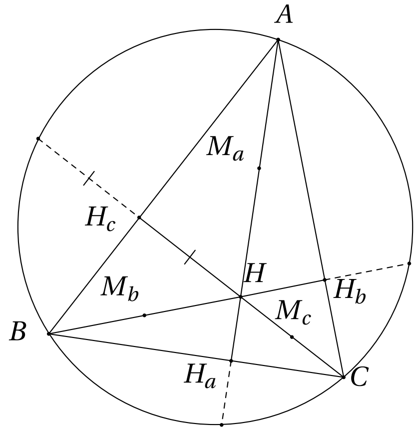
Opgave 5.4 Linjen gennem X_1 vinkelret på a og linjen gennem X vinkelret på a er parallelle, og da de begge står vinkelret på korden XX_1 i cirklen, må de have samme afstand til cirklens centrum.



Ved en multiplikation i cirklens centrum med multiplikationsfaktor -1 føres linjen gennem X_1 vinkelret på a derfor i linjen gennem X vinkelret på a. Tilsvarende føres linjen gennem Y_1 vinkelret på b i linjen gennem Y vinkelret på b, og linjen gennem Z_1 vinkelret på c i linjen gennem Z vinkelret på c. Da de tre linjer føres i tre linjer som skærer hinanden i et punkt, må de tre linjer også selv skærer hinanden i et punkt.

Opgave 5.5 En multiplikation i M med multiplikationsfaktor $k = -\frac{1}{2}$ fører A i M_a, B i M_b og C i M_c. Dermed føres I i S, og punkterne I , M og S ligger på linje.

Opgave 5.6 Ifølge sætning om højder og indskrivelige firkanter ligger spejlingen af H i linjen AB på den omskrevne cirkel til trekant ABC.



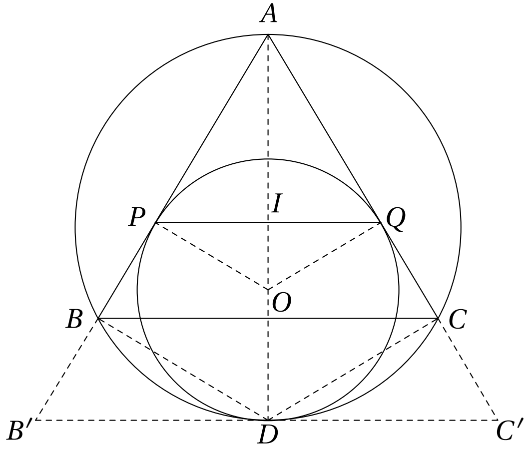
Ved en multiplikation omkring H med multiplikationsfaktor 2 bliver H_c derfor afbildet i et punkt på den omskrevne cirkel. Tilsvarende bliver H_a og H_b afbildet i punkter på den omskrevne cirkel. Punkterne M_a, M_b og M_c bliver afbildet i henholdsvis A, B og C. De seks punkter H_a, H_b, H_c, M_a, M_b og M_c bliver dermed alle afbildet på den omskrevne cirkel, og derfor ligger de alle på samme cirkel. Den omskrevne cirkel til trekant $H_aH_bH_c$ afbildes desuden i den omskrevne cirkel til trekant ABC, hvilket viser at radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC er dobbelt så stor som radius i den omskrevne cirkel til trekant $H_aH_bH_c$.

Opgave 5.7 Betragt multiplikationen i A som fører trekant ABC i en trekant $AB'C'$ så D ligger på $B'C'$, og kald multiplikationsfaktoren for k. Kald midtpunktet af PQ for I. Vi vil vise at multiplikationen fører I i centrum O for cirklen gennem PQD da denne cirkel er indskreven cirkel til trekant $AB'C'$ og dette derfor viser det ønskede.

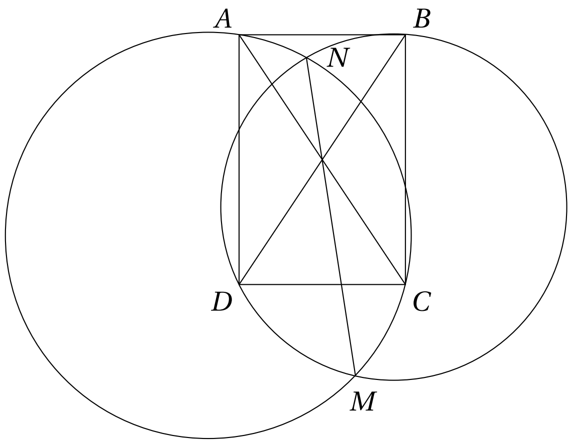
Trekanterne AIP, APO, ABD og ADB' er ensvinklede da de er retvinklede og deler vinklen ved A. Dermed er

$$\frac{|AO|}{|AI|} = \frac{|AO|}{|AP|}\frac{|AP|}{|AI|} = \frac{|AD|}{|AB|}\frac{|AB'|}{|AD|} = \frac{|AB'|}{|AB|} = k.$$

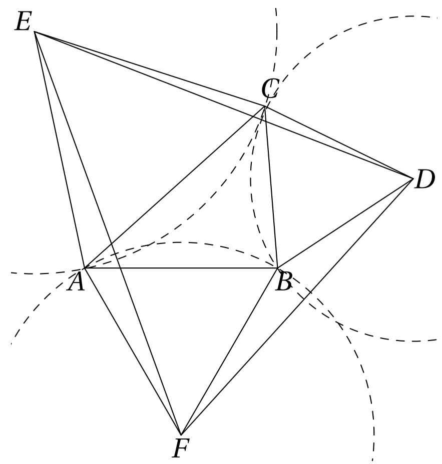
Altså afbildes I i O, og I er derfor centrum for den indskrevne cirkel til trekant ABC.



Opgave 6.1 Radikalaksen for S_1 og S_2 er linjen MN. Kald den omskrevne cirkel til rektanglet $ABCD$ for S. Radikalaksen for S og S_1 er AC, og radikalaksen for S og S_2 er BD. Ifølge sætningen om radikalcentrum skærer de tre radikalakser hinanden i et punkt, eller også er de alle tre parallelle. Det sidste er ikke muligt her da AC og BD er diagonalerne i et rektangel. Dermed ligger skæringen mellem AC og BD på linjen MN.

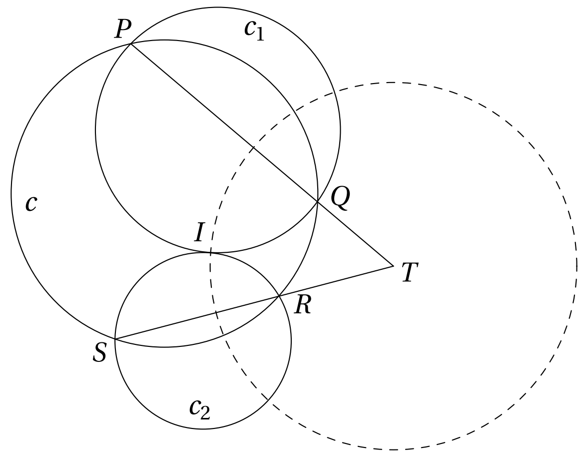


Opgave 6.2 Lad S_1 være cirklen med centrum i D gennem B og C, S_2 være cirklen med centrum i E gennem A og C, og C_3 cirklen med centrum i F gennem A og B. Radikalaksen for S_1 og S_2 er linjen gennem deres fælles punkt C som står vinkelret på linjen gennem deres centre, dvs. vinkelret på linjen DE. Tilsvarende er radikalaksen for S_1 og S_3 linjen gennem B vinkelret på linjen DF, og radikalaksen for S_2 og S_3 linjen gennem A vinkelret på EF. Ifølge sætningen om radikalcentrum skærer de tre linjer hinanden i et punkt, hvis de ikke alle er parallelle. Det sidste er ikke en mulighed da de tre linjer står vinkelret på hver sin side i trekant DEF.

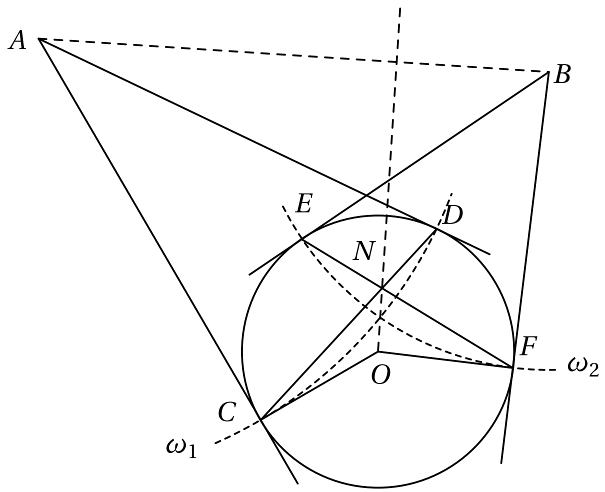


Opgave 6.3 Lad T være skæringspunktet mellem PQ og RS, og lad c_1 og c_2 være to cirkler gennem henholdsvis P og Q samt R og S som tangerer hinanden i I. Da T ligger på radikalaksen for c og c_1, samt på radikalaksen for c og c_2, må T være radikalcentrum for de tre cirkler, hvilket betyder at $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$ uanset valget af c_1 og c_2. Dvs. at L er en delmængde af cirklen med T som centrum og $\sqrt{|TP||TQ|}$ som radius. Lad omvendt I være et punkt på denne cirkel som ikke ligger på nogen af linjerne SR og PQ og ikke på cirklen $PQRS$. Da vil T være radikalcentrum for cirklen c samt de omskrevne cirkler til trekant PQI og trekant RSI. Fordi $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$ må de omskrevne cirkler til trekant PQI og trekant RSI tangere hinanden i I ifølge sætningen om et punkts potens. Dermed er L cirklen med centrum i T og radius $\sqrt{|TP||TQ|}$

fraregnet punkterne på linjerne RR og PQ og punkterne på cirklen $PQRS$. (Disse punkter opfylder oplagt ikke betingelsen).



Opgave 6.4 Kald cirklen gennem C, E, D, F for ω, cirklen med centrum i A og radius $|AC|$ for ω_1 og cirklen med centrum i B og radius $|BE|$ for ω_2. Vi ønsker at vise at O og N ligger på radikalaksen for ω_1 og ω_2 da dette viser at ON står vinkelret på linjen AB.



Da AC er tangent til ω og dermed står vinkelret på CO, må CO være tangent til ω_1. Tilsvarende er FO tangent til ω_2. Derfor er $P(O,\omega_1) = |OC|^2 = |OE|^2 = P(O,\omega_2)$, dvs. at O ligger på radikalaksen for ω_1 og ω_2. Desuden er

$$P(N,\omega_1) = -|CN||ND| = P(N,\omega) = -|EN||FN| = P(N,\omega_2).$$

Dermed ligger også N på radikalaksen for ω_1 og ω_2, og det ønskede er vist.

Opgave 6.5 Linjerne AB, $A'M$ og $B'N$ er radikalakserne for de tre par af cirklerne ABA', ABB' og $A'B'C'$. Derfor er de enten parallelle, eller også går de gennem samme punkt. Hvis de ikke er parallelle, kaldes det fælles punkt C''. Helt tilsvarende er BC, $B'P$ og $C'Q$ radikalakserne for de tre par af cirklerne BCB', BCC' og $A'B'C'$. Hvis de ikke er parallelle, kaldes det fælles punkt A''. Igen helt tilsvarende er CA, $C'R$ og $A'S$ radikalakserne for de tre par af cirklerne ACC', ACA' og $A'B'C'$. Hvis de ikke er parallelle, kaldes det fælles punkt B''. Hvis (ii) ikke er opfyldt, har vi derfor tre punkter A'', B'' og C'' som beskrevet.

Punktet A'' har samme potens mht. cirklerne ABA', ABB' og $A'B'C'$, dvs.

$$|A''A||A''B| = |A''M||A''A'| = |A''N||A''B'|.$$

Dermed har A'' også samme potens mht. cirklerne ABC og $A'B'C'$, dvs. A'' ligger på deres radikalakse. Helt tilsvarende ses at B'' og C'' ligger på radikalaksen for ABC og $A'B'C'$, og dermed ligger de tre punkter på linje.

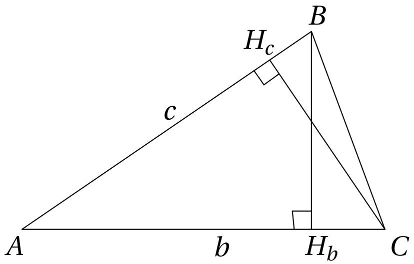
Opgave 6.6

(i) Kald centrene i cirklerne c_1, c_2 og c_3 for henholdsvis O_1, O_2 og O_3. Firkant $EFGO$ er pr. konstruktion et parallelogram, diagonalerne skærer dermed hinanden på midten, og O_3 er derfor deres skæringspunkt. Linjen gennem O_1O_3 er derfor midtpunktstransversal i trekant AFO, og altså parallel med AF, og dermed ortogonal med ME. Punktet E ligger på c_1 da E er midtpunktet af korden AC i cirklen c, og vi dermed ved at $\angle AEO = 90°$. Radikalaksen for c_1 og c_3 er derfor ME da E ligger på begge cirkler, og ME står vinkelret på linjen gennem cirklernes centre. Tilsvarende ses at NG er radikalakse for c_2 og c_3.

(ii) Radikalaksen for c og c_1 er deres fælles tangent i A, og dermed er radikalcentrum for c, c_1 og c_3 skæringen mellem denne tangent og radikalaksen for c_1 og c_3, dvs. punktet M. På tilsvarende vis ses at radikalcentrum for c, c_2 og c_3 er N.

(iii) Af ii) følger at MN er radikalakse for c og c_3, og dermed står NM vinkelret på OO_3. Vi ved desuden at CD står vinkelret på OO_3, da OO_3 halverer CD. Dermed er MN parallel med CD.

Opgave 7.1 Kald fodpunkterne for højderne i trekant ABC for H_a, H_b og H_c.



Da er

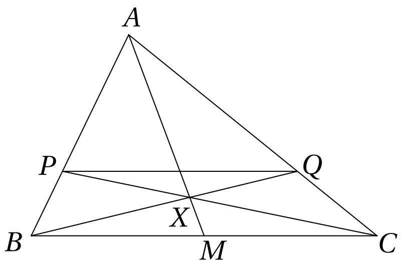
$$\cos A = \frac{|AH_b|}{c} = \frac{|AH_c|}{b}, \text{ og dermed } \frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{c}{b}.$$

Det tilsvarende gælder for de andre sider. Derfor er

$$\frac{|AH_b|}{|H_bC|}\frac{|BH_c|}{|H_cA|}\frac{|CH_a|}{|H_aB|} = \frac{abc}{abc} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning går højderne dermed gennem samme punkt.

Opgave 7.2 Da PQ er paralleltransversal i trekant ABC, er $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|BP|}{|CQ|}$ ifølge sætningen om transversaler. Kald skæringen mellem AX og BC for M.

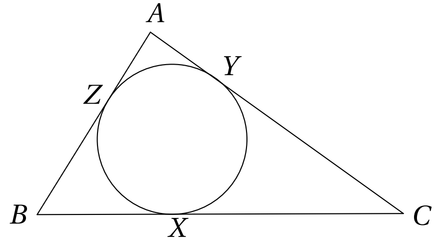


Ifølge Cevas sætning er

$$\frac{|CQ|}{|QA|}\frac{|AP|}{|PB|}\frac{|BM|}{|MC|} = 1.$$

Da $\frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AP|}{|PB|} = 1$, må $\frac{|BM|}{|MC|} = 1$, og AM deler dermed BC på midten.

Opgave 7.3 Da den indskrevne cirkel tangerer AB og AC, er afstanden fra A til de to røringspunkter Y og Z den samme. Altså er $|AY| = |AZ|$, og tilsvarende $|BX| = |BZ|$ og $|CX| = |CY|$.

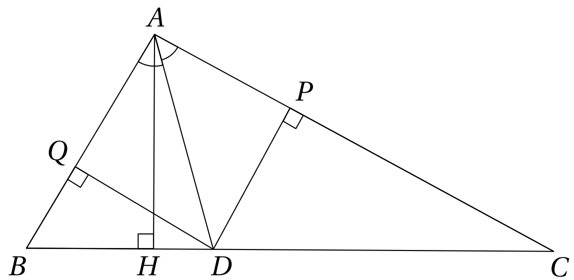


Altså må

$$\frac{|AZ|}{|ZB|}\frac{|BX|}{|XC|}\frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning betyder dette at AX, BY og CZ skærer hinanden i et punkt.

Opgave 7.4 Trekant APD og trekant AQD er kongruente da de har en fælles side AD, $\angle PAD = \angle QAD$ og $\angle APD = 90° = \angle AQD$, dvs. at $|AP| = |AQ|$.



Trekant AHB og trekant DQB er ensvinklede da de begge har en ret vinkel samt den fælles vinkel B. Dermed er $\frac{|BQ|}{|BH|} = \frac{|BD|}{|AB|}$. Tilsvarende er $\frac{|CP|}{|CH|} = \frac{|CD|}{|AC|}$. Da AD er vinkelhalveringslinje, er $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$. Samlet er

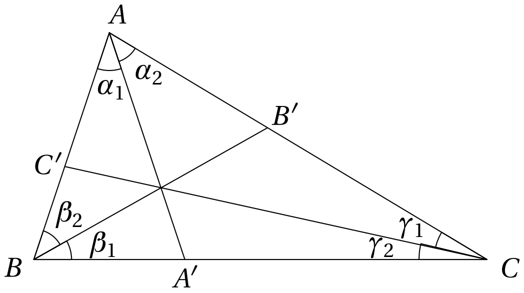
$$\frac{|AP|}{|PC|}\frac{|CH|}{|HB|}\frac{|BQ|}{|QA|} = \frac{|CH|}{|PC|}\frac{|BQ|}{|HB|} = \frac{|AC|}{|CD|}\frac{|BD|}{|AB|} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning skærer linjerne AH, BP og QC hinanden i et punkt.

Opgave 7.5 Vi viser at

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}$$

da dette viser det ønskede.



Ifølge sinusrelationen er $\sin\alpha_1 = |BA_1|\frac{\sin B}{|AA'|}$ og $\sin\alpha_2 = |A'C|\frac{\sin C}{|AA'|}$. (Bemærk at dette også holder i tilfældes hvor A' ligger på forlængelsen af BC tættest på B, da både $|BA'|$ og α_1 og dermed $\sin\alpha_1$ er negative i dette tilfælde). Dermed er

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|BA'|}{|A'C|}\frac{\sin B}{\sin C}.$$

Da det tilsvarende gælder for de andre vinkler, er

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} &= \frac{|BA'|}{|A'C|}\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{|AC'|}{|C'B|}\frac{\sin A}{\sin B}\\ &= \frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}\end{aligned}$$

Opgave 7.6 Det ønskede følger af Cevas sætning med vinkler, da $\alpha_1' = \angle BAA'' = \angle A'AC = \alpha_2$ osv.

Opgave 8.1 Kald trekanten ABC og de tre højder for h_a, h_b og h_c, så $h_a = 12$, $h_b = 15$ og $h_c = 20$. Pga. ensvinklede trekanter er $\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b}$, og altså $b = \frac{h_a}{h_b}a = \frac{4}{5}a$. Tislvarende $c = \frac{h_a}{h_c} = \frac{3}{5}a$. Dermed er trekantens halve omkreds $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a+\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}a) = \frac{6}{5}a$. Arealet T af trekant ABC er derfor

$$T = \frac{1}{2}ah_a = 6a.$$

Vi ved yderligere ifølge Herons formel at

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{6}{5}a\cdot\frac{1}{5}a\cdot\frac{2}{5}a\cdot\frac{3}{5}a} = \frac{6}{25}a^2.$$

Altså er $a = 25$ og $T = 150$.

Opgave 8.2 Lad $n \geq 3$, og lad $n-1$, n og $n+1$ være sidelængderne i en trekant. Den halve omkreds er da $\frac{3n}{2}$. Ifølge Herons formel er arealet

$$T_n = \sqrt{\frac{3n}{2}\Big(\frac{3n}{2}-n+1\Big)\Big(\frac{3n}{2}-n\Big)\Big(\frac{3n}{2}-n-1\Big)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2-4)}.$$

For $n = 4$ er $T = 6$, så vi har mindst en trekant der opfylder betingelserne. Vi viser nu at vi ud fra en trekant der opfylder betingelserne, kan konstruere endnu en trekant med den ønskede egenskab og større sidelængde. Dette giver nemlig at der findes uendeligt mange. Lad n være et lige tal, $n \geq 4$, og antag at $\frac{3}{4}(n^2-4)$ er et kvadrattal. Betragt trekanten med sidelængderne $m-1$, m og $m+1$ hvor $m = n^2-2$. Da er $m > n$, m er lige, og

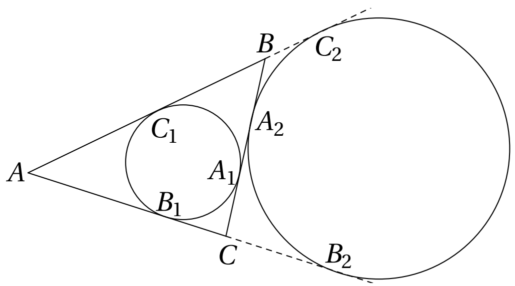
$$\frac{3}{4}(m^2-4) = \frac{3}{4}(m-2)(m+2) = \frac{3}{4}(n^2-4)n^2.$$

Dermed er

$$T_m = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$$

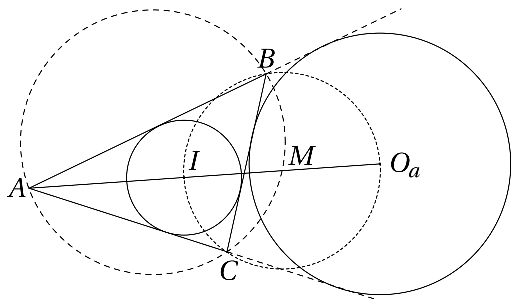
et helt tal. Der findes altså uendeligt mange trekanter med de ønskede egenskaber.

Opgave 9.1 Lad A_1, B_1 og C_1 være røringspunkterne for den indskrevne cirkel med henholdsvis BC, AC og AB, og lad A_2, B_2 og C_2 være røringspunkterne mellem den ydre røringscirkel ω_a og henholdsvis BC, AC og BC.



i) Potensen af A mht. ω_A er $|AB_2|^2$, og $|AB_2| = \frac{1}{2}(|AB_2| + |AC_2|) = \frac{1}{2}(|AC| + |CB_2| + |AB| + |AC_2|) = \frac{1}{2}(|AC| + |CA_2| + |AB| + |BA_2|) = s$. Altså er potensen af A mht. ω_A lig s^2.

ii) Ifølge i) er $|CA_2| = s - |AC| = s - (|CB_1| + |B_1A|)$, og da $s = |BA_1| + |CB_1| + |B_1A|$, er $|BA_1| = |CA_2|$. Altså ligger A_1 og A_2 symmetrisk på linjestykket BC omkring dets midtpunkt.



iii) Ifølge sætningen om superpunktet ligger punkterne B, C og I på en cirkel med M som centrum. Sæt $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ og $\angle ACB = 2\gamma$.

Da er

$$\begin{aligned}\angle IO_aB &= 180^\circ - \angle O_aBI - \angle O_aIB \\ &= 180^\circ - \angle O_aBC - \angle CBI - \angle O_aIB \\ &= 180^\circ - (\alpha+\gamma) - \beta - (\alpha+\beta) \\ &= \gamma = \angle BCI\end{aligned}$$

Dermed er firkant $BICO_a$ indskrivelig, og B, I, C og O_a ligger på en cirkel med M som centrum.

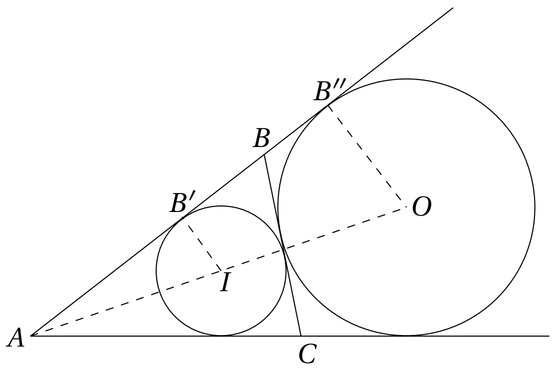
iv) Trekanterne $\triangle ACI$ og $\triangle AO_aB$ er ensvinklede da $\angle CAI = \angle O_aAB$, og $\angle BO_aA = \angle BO_aI = \angle BCI = \angle ACI$. Dermed er $|AI||AO_a| = |AB||AC|$.

Opgave 9.2 Kald røringscirklernes røringspunkter med siderne BC, AC og AB for henholdsvis A', B' og C' og den indskrevne cirkels røringspunkter med siderne BC, AC og AB for henholdsvis A_1, B_1 og C_1. Fra sætningen om de ydre røringscirkler ved vi at

$$\frac{|CB'|}{|B'A|}\frac{|BA'|}{|A'C|}\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|}\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1.$$

Cevas sætning giver nu at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 9.3 Kald centrum for den indskrevne cirkel for I, og røringspunktet mellem cirklen og linjen AB for B'. Betragt den ydre røringscirkel til siden a, kald centrum for O_a og røringspunktet mellem cirklen og linjen AB for B''.



Trekanterne $AB'I$ og $AB''O_a$ er oplagt ensvinklede. Desuden ved vi at $|AB'| = s-a$ og $|AB''| = s$. Dette giver $\frac{s-a}{r} = \frac{s}{r_a}$, og altså

$$T = sr = r_a(s-a).$$

Nu har vi

$$T = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c).$$

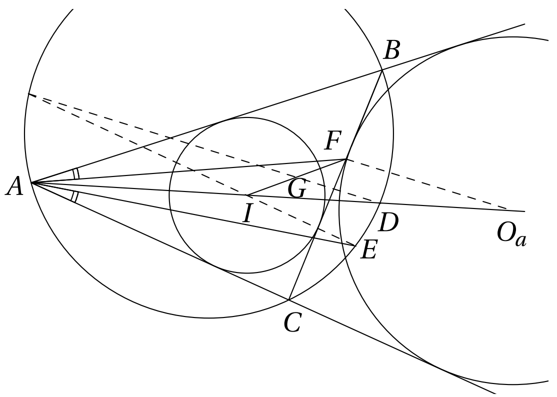
Fra Herons formel fås yderligere at

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Dette giver samlet

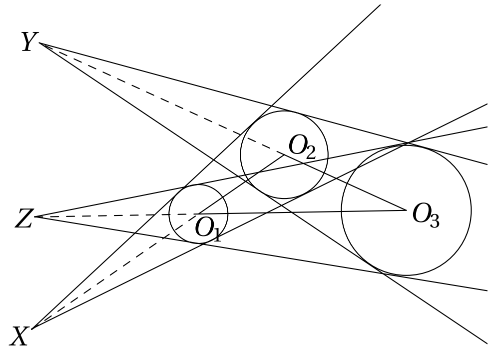
$$T^2 = \frac{T^4}{T^2} = \frac{rsr_a(s-a)r_b(s-b)r_c(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = r\,r_a\,r_b\,r_c.$$

Opgave 9.4 Lad O_a være centrum for den ydre røringscirkel til siden BC. Ifølge Sætning om den ydre røringscirkel iv) er $|AI||AO_a| = |AB||AC|$. Trekanterne $\triangle ABF$ og $\triangle AEC$ er ensvinklede fordi $\angle BAF = \angle CAE$ pr konstruktion og $\angle ABF = \angle AEC$ da de spænder over samme buestykke.



Dermed er $|AF||AE| = |AB||AC| = |AI||AO_a|$, hvilket viser at $\triangle AO_aF$ og $\triangle AEI$ er ensvinklede. Ifølge Sætning 2 om den ydre røringscirkel i) er DG midtpunktstransversal i trekant $\triangle IO_aF$, dvs. $\angle ADG = \angle AO_aF = \angle AEI$, hvilket viser at $\angle AEI$ og $\angle ADG$ spænder over samme buestykke i Γ, og dermed at DG og EI skærer hinanden på Γ.

Opgave 10.1 Kald centrene for de tre cirkler O_1, O_2 og O_3 og deres radier for r_1, r_2 og r_3. Lad desuden P_1 og P_2 være røringspunktet på henholdsvis C_1 og C_2 for en af de fælles tangenter. Da er trekanterne XO_1P_1 og XO_2P_2 ensvinklede, og altså $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$. Tilsvarende ses at $\frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$ og $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$.



Betragt trekanten $O_1O_2O_3$. Punkterne X, Y og Z er henholdsvis punkter på linjerne O_1O_2, O_2O_3 og O_3O_1. Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at X, Y og Z ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|}\frac{|O_2Y|}{|YO_3|}\frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \Big(-\frac{r_1}{r_2}\Big)\Big(-\frac{r_2}{r_3}\Big)\Big(-\frac{r_3}{r_1}\Big) = -1.$$

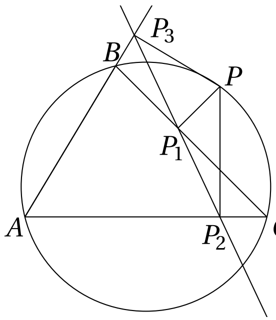
Dermed ligger de tre punkter X, Y og Z på linje.

Opgave 10.2 Kald centrene for de tre cirkler O_1, O_2 og O_3 og deres radier for r_1, r_2 og r_3. Som i opgave 10.1 ses at $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$, $\frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$ og $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$. Betragt trekanten $O_1O_2O_3$. Punkterne X, Y og Z er henholdsvis punkter på linjerne O_1O_2, O_2O_3 og O_3O_1. Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at X, Y og Z ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|}\frac{|O_2Y|}{|YO_3|}\frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \Big(-\frac{r_1}{r_2}\Big)\Big(\frac{r_2}{r_3}\Big)\Big(\frac{r_3}{r_1}\Big) = -1.$$

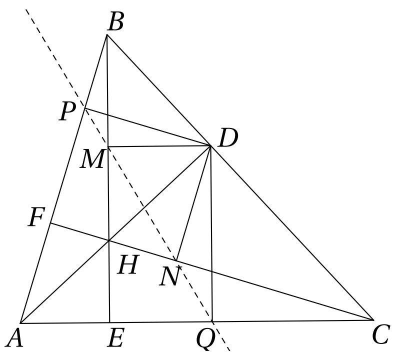
Dermed ligger de tre punkter X, Y og Z på linje.

Opgave 11.1 Lad P være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, og antag wlog at P ligger på buestykket BC så projektionen P_2 af P på linjen AC ligger på linjestykket AC, mens projektionen P_3 af P på linjen AB ikke ligger på linjestykket AB, men dets forlængelse.



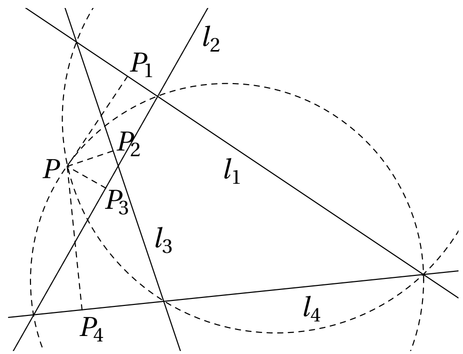
Firkant PCP_2P_1 er indskrivelig da begge diagonaler star vinkelret på en side, og dermed er $\angle CP_1P_2 = \angle CPP_2$. Firkant PP_1BP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og dermed er $\angle BP_1P_3 = \angle BPP_3$. Firkant PP_2AP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og da firkant $ABPC$ pr. konstruktion er indskrivelig, er $\angle P_3PP_2 = 180° - \angle BAC = \angle BPC$. Af dette følger at $\angle BPP_3 = \angle CPP_2$, og samlet at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$, dvs. at punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.

Opgave 11.2 Firkant $CDHE$ er cyklisk da den har to modstående rette vinkler. Dermed ligger D på den omskrevne cirkel til trekant CHE, hvilket betyder at Q, M og N ligger på en linje (Simsonlinjen).



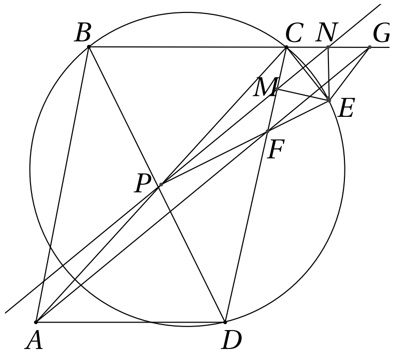
Tilsvarende ligger D på den omskrevne cirkel til trekant HFB, hvilket betyder at M, N og P ligger på linje. Dette viser samlet at alle fire punkter P, Q, M og N ligger på en ret linje.

Opgave 11.3 Lad P være skæringen mellem den omskrevne cirkel til trekanten dannet af linjerne l_1, l_2 og l_4, og den omskrevne cirkel til trekanten dannet af linjerne l_1, l_3 og l_4. Lad yderligere punkterne P_1, P_2, P_3 og P_4 være projektionerne af P på henholdsvis l_1, l_2, l_3 og l_4.



Da P ligger både på den omskrevne cirkel til trekanten dannet af linjerne l_1, l_2 og l_4 og trekanten dannet af linjerne l_1, l_3 og l_4, ligger P_1, P_2, P_3 og P_4 på linje ifølge sætningen om Simsonlinjen. Men dermed må P også ligge på den omskrevne cirkel for trekanten dannet af linjerne l_1, l_2 og l_3 og trekanten dannet af l_2, l_3 og l_4 ifølge den omvendte Simpson. Altså går alle fire omskrevne cirkler gennem P.

Opgave 11.4 Lad P, M og N være midtpunkterne af linjestykkerne CA, CF og CG. Da punkterne A, F og G ligger på linjen l, ligger P, M og N på en linje som er parallel med l. Da $ABCD$ er et parallelogram, er P skæringspunktet mellem diagonalerne. Punktet E ligger på den omskrevne cirkel til trekant BCD, og da $|EF| = |EG| = |EC|$ må projektionen af E på henholdsvis CD og BC være M og N. Projektionen af E på BD ligger ifølge sætningen om Simsonlinjen på linjen gennem M og N, dvs. at P er projektionen af E på BD.



Da firkant $BCED$ er indskrivelig, er $\angle DBE = \angle DCE$, hvilket giver at trekant BEP og trekant CEM er ensvinklede, dvs. at $\angle PEB = \angle MEC$. Firkant $CMEN$ er også indskrivelig da to modstående vinkler er rette, dvs. at $\angle CNM = \angle CEM$. Alt dette giver samlet

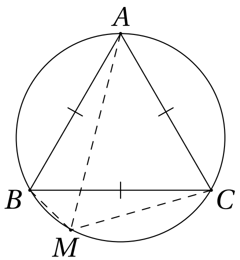
$$\angle FAD = \angle CNM = \angle CEM = \angle BEP =$$

$$\frac{1}{2}\angle BED = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BAD.$$

Hermed har vi vist at linjen l er vinkelhalveringslinje for vinkel BAD

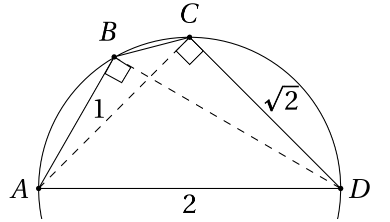
Opgave 12.1 Ifølge Ptolemæus' sætning gælder at

$$|MA||BC| = |MB||AC| + |MC||AB|.$$



Da trekant ABC er ligesidet, fås $|MA| = |MB| + |MC|$.

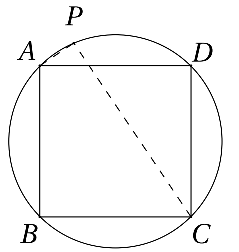
Opgave 12.2 Bemærk at AD er diameter i cirklen, og dermed at trekanterne ACD og ABD er retvinklede.



Pythagoras' sætning giver dermed at $|BD| = \sqrt{3}$ og $|CD| = \sqrt{2}$. Ved at anvende Ptolemæus' sætning får vi nu at

$$|BC| = \frac{|AC||BD| - |AB||CD|}{|AD|} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Opgave 12.3 Kald kvadratets sidelængde for x.



Ifølge Ptolemæus' sætning anvendt på firkant $ABCP$ er

$$|AP||BC| + |AB||CP| = |BP||AC|$$

og dermed

$$|PA| \cdot x + |PC| \cdot x = |PB| \cdot \sqrt{2}x.$$

Samlet er

$$\frac{|PA| + |PC|}{|PB|} = \sqrt{2}$$

uanset valget af P.

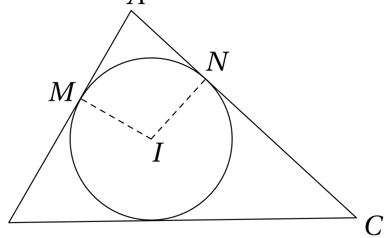
Opgave 12.4 Da syvkanten er regulær, er $|AB| = |BC|$, $|AC| = |CE|$, $|AD| = |AE|$ og $|AD| = |BE|$. Ved at benytte Ptolemæus' sætning på firkant $ABCE$ som er indskrivelig da syvkanten er regulær, fås:

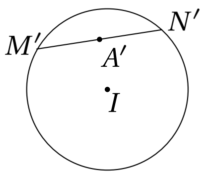
$$|AB||CE| + |BC||AE| = |AC||BE|$$
$$|AB||AC| + |AB||AD| = |AC||AD|$$
$$\frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|AC|} = \frac{1}{|AB|}.$$

Opgave 13.1 Betragt diameteren hvis forlængelse går gennem O. Denne diameter vil af symmetrigrunde afbildes i diameteren til α', og da linjer gennem O afbildes på sig selv følger det at centrum for α, centrum for α' og punktet O ligger på linje.

Opgave 13.2 Kald røringspunkterne for den ydre røringscirkel og linjerne AC og BC for henholdsvis M og N. Det er velkendt fra kapitlet om ydre røringscirkler at $|CM| = |CN| = s$. Punkterne M og N fikses derfor ved inversionen, dvs. at den ydre røringscirkel afbildes i en cirkel gennem M og N som tangerer billederne af linjerne AC og BC. Da AC og BC afbildes på sig selv, må også cirklen afbildes på sig selv.

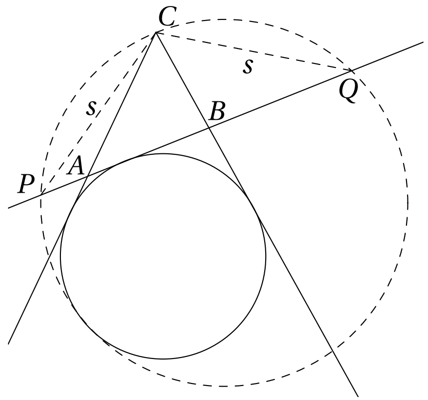
Opgave 13.3 Kald centrum for den indskrevne cirkel for I. Firkant $AMIN$ er indskrivelig da $\angle AMI = \angle ANI = 90°$.





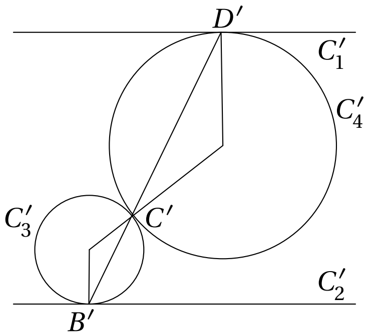
Cirklen AMN afbildes derfor i en linje gennem M og N da disse to punkter ligger på inversionscirklen. Billedet af A er altså skæringspunktet mellem linjestykket NM og linjen AI. Dette skæringspunkt er netop midtpunktet af MN, da AI er vinkelhalveringslinje til vinkel $\angle NAM$ og $|AM| = |AN|$.

Opgave 13.4



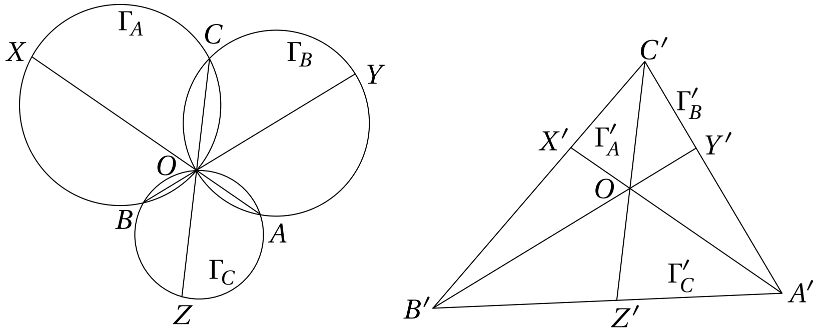
Ved inversion i en cirkel med centrum C og radius s afbildes den ydre røringscirkel på sig selv ifølge opgave 13.2. Vi skal altså vise at billedet af den omskrevne cirkel til trekant CPQ tangerer den ydre røringscirkel. Da P og Q afbildes på sig selv, vil den omskrevne cirkel til trekant CPQ afbildes i linjen PQ som tangerer røringscirklen.

Opgave 13.5 Ved inversion i en cirkel med centrum i A afbildes C_1 og C_2 i to parallelle linjer, og C_3 og C_4 afbildes i to cirkler der tangerer hinanden samt henholdsvis billedet af C_2 og C_1.



Ved at regne på vinklerne ses let at B', C' og D' ligger på linje. Hvis denne linje går gennem A, vil A, B, C og D ligge på linje, og hvis linjen ikke går gennem A, vil A, B, C og D ligge på en cirkel.

Opgave 13.6 Ved inversion i punktet O afbildes cirklerne Γ_A, Γ_B og Γ_C i linjer såldes at $A'B'C'$ er en trekant, og $A'X'$, $B'Y'$ og $C'Z'$ cevianer i trekanten som går gennem samme punkt O.

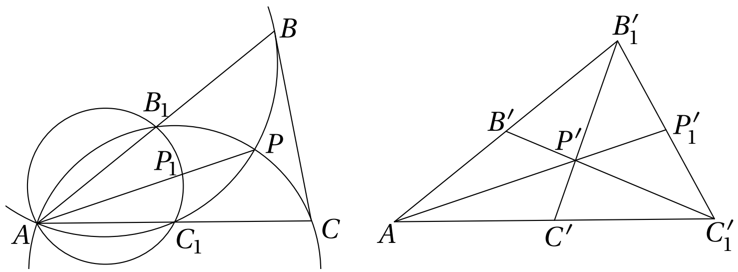


Ved at udnytte at $|AY| = \frac{r^2}{|AO||YO|}|A'Y'|$ osv. ses at ligningen vi skal vise, i det inverterede tilfælde er ækvivalent med

$$\frac{|A'Y'||B'Z'||C'X'|}{|A'Z'||B'X'||C'Y'|} = 1.$$

Dette er sandt ifølge Cevas sætning.

Opgave 13.7 Inverter i en cirkel med centrum i A og radius r. Linjerne AB, AP og AC afbildes på sig selv, cirklen gennem A, B, C_1, P afbildes på en linje gennem B', C_1' og P', cirklen gennem A, B_1, C, P afbildes i en linje gennem B_1', C' og P', og cirklen gennem $AB_1P_1C_1$ afbildes i en linje gennem B_1', C_1' og P_1'.



Da B_1 og C_1 er midtpunkt på henholdsvis AB og AC, er B' og C' midtpunkt på henholdsvis linjestykkerne AB_1' og AC_1'. Dermed er $AB_1'C_1'$ en trekant med $B_1'C'$ og $B'C_1'$ som medianer. Da linjen gennem A, P' og P_1' går gennem skæringspunktet mellem $B_1'C'$ og $B'C_1'$, er AP_1' også median i trekant $AB_1'C_1'$. Da medianerne skærer hinanden i forholdet $1:2$, får vi

$$2|AP| = 2\frac{r^2}{|AP'|} = 3\frac{r^2}{|AP_1'|} = 3|AP_1|.$$

Opgave 13.8 Da P er det centrale punkt, inverterer vi i en cirkel med centrum i P og radius r. Dermed er α_1' og α_3' to parallelle linjer, og α_2' og α_4' er to parallelle linjer. Firkant $A'B'C'D'$ er derfor et paralellelogram.

Nu regner vi på begge sider af lighedstegnet:

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{\frac{r^2|A'B'|}{|PA'||PB'|}\frac{r^2|B'C'|}{|PB'||PC'|}}{\frac{r^2|A'D'|}{|PA'||PD'|}\frac{r^2|D'C'|}{|PD'||PC'|}} = \frac{|A'B'||B'C'||PD'|^2}{|A'D'||D'C'||PB'|^2},$$

og

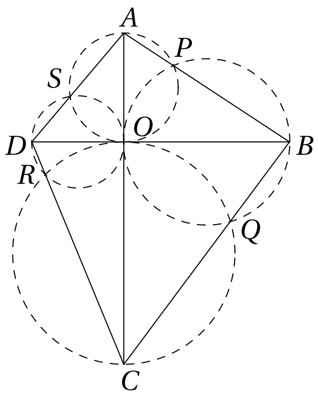
$$\frac{|PB|^2}{|PD|^2} = \frac{\frac{r^4}{|PB'|^2}}{\frac{r^4}{|PD'|^2}} = \frac{|PD'|^2}{|PB'|^2}.$$

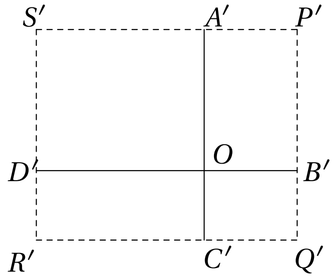
Ligheden som vi skal vise, reduceres dermed til

$$\frac{|A'B'||B'C'|}{|A'D'||D'C'|} = 1,$$

hvilket er sandt da $A'B'C'D'$ er et parallelogram.

Opgave 13.9
Bemærk først at firkant $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ og $DSOR$ er indskrivelige, og kald deres omskrevne cirkler for henholdsvis α_A, α_B, α_C og α_D. Da AO og CO er diameter i henholdsvis α_A og α_C, tangerer α_A og α_C begge linjen BD i O. Tilsvarende tangerer α_B og α_C linjen AC i O.

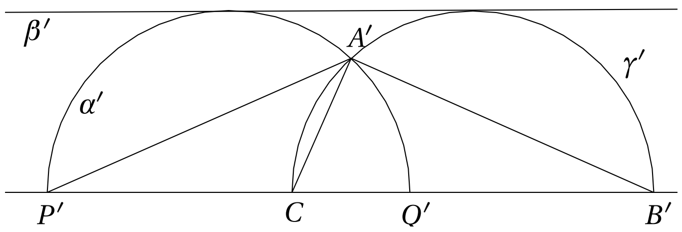




Inverter i en cirkel med centrum i O. Da afbildes α_A og α_C i to linjer som er parallelle med DB, og α_B og α_D i to linjer parallelle med AC. Skæringspunkterne mellem de fire cirkler er netop P, Q, R og S, dvs. at $P'Q'R'S'$ er et rektangel og dermed indskrivelig. Punkterne P, Q, R og S ligger derfor også på en cirkel.

Opgave 13.10
Inverter i en cirkel med centrum i A, da α og α_0 derved afbildes i to parallelle linjer som alle billederne af cirklerne i følgen tangerer. Røringspunkternes billeder $P_1', P_2', P_3', \ldots$ ligger derfor på en ret linje, dvs. at $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ligger på en cirkel gennem A.

Opgave 13.11
Inverter i en cirkel med centrum i C. Da afbildes linjen PQ på sig selv, cirklen β i en linje parallel med $P'Q'$, halvcirklencirklen α i en halvcirkelcirkel som tangerer β' og har $P'Q'$ som diameter, og linjen γ i en cirkel som tangerer β' og har CB' som diameter.



Da linjen gennem P', C, Q' og B' er parallel med linjen β', må de to cirkler α' og γ' have samme radius. Derfor er

$$\angle PAC = \angle A'P'C = \angle A'B'C = \angle BAC,$$

dvs. at AC er vinkelhalveringslinje i trekant PAC.