Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Kombinatorik

Her er nogle centrale principper om og strategier for hvordan man tæller et antal kombinationer på en smart måde, hvordan man beregner sandsynligheden for at noget indtræffer, og hvordan man løser logiske opgaver. Det er ikke en teoretisk indføring, men der er i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man løser kombinatorikopgaver med fokus på 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. For at blive god til 1. runde er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor mange har været stillet som opgaver til 1. runde.

Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningsskitser til alle opgaver bagerst.

Kombinationer

Først ser vi på hvordan man tæller antallet af kombinationer af noget. Det kan fx være på hvor mange måder man kan farvelægge noget, kombinere noget, udvælge noget eller lignende. Et helt grundlæggende princip når man skal tælle, er multiplikationsprincippet.

Multiplikationsprincippet

Hvis man for at vælge noget først har n valgmuligheder, og derefter for hvert af disse yderligere har m valgmuligheder, så har man samlet $n \cdot m$ valgmuligheder. Man ganger altså antallet af valgmuligheder sammen. Det samme princip gælder hvis man har flere end to delvalg.

Dette princip kaldes for multiplikationsprincippet.

Eksempel Hvis man hver dag til morgenmad har tre forskellige slags morgenmadsprodukter at vælge imellem, så skal man i løbet af en uge træffe syv valg hvor man hver gang har tre valgmuligheder. Der er altså i alt 3^7 forskellige kombinationer af ugens morgenmad.

Eksempel I et blomsterbed skal der plantes fem blomster på række, og der er tre forskellige slags blomster at vælge imellem. Hvor mange forskellige muligheder er der for at vælge de fem blomster, når man ikke kun må plante den samme slags?

For hver af de fem blomster der skal plantes, er der 3 valgmuligheder. Dvs. hvis vi ser bort fra at vi ikke kun må plante en slags blomster, så er der 3^5. I tre af kombinationerne er der kun en slags blomster, dvs. svaret er $3^5 - 3 = 240$.

Nu ser vi på samme problemstilling med den restriktion at to naboblomster skal være forskellige. I dette tilfælde er der 3 muligheder for den første blomst, men derefter kun 2 valgmuligheder for hver af de næste blomster da de ikke må være identiske med den foregående. Derfor er der $3 \cdot 2^4 = 48$ måder at plante blomsterbedet på så to naboblomster ikke er ens.

Opgave 1. På hvor mange måder kan nedenstående skema fyldes ud med kryds og boller?

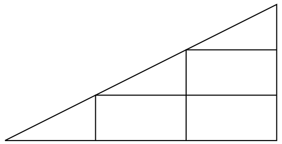
Eksempel:

×	○	×
×	×	×
○	×	×

A) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ B) $2 \cdot 9$ C) 2^9 D) 9^2 E) $3 \cdot 2 \cdot 2$

(*Georg Mohr 2006, opgave 6*)

Opgave 2. I ingeniørfirmaet *Black & Red* har hver medarbejder sit eget individuelle logo bestående af en retvinklet trekant opdelt i seks felter som vist. Hvert felt er enten sort eller rødt, og det er tilladt at alle felter har samme farve. Hvor mange medarbejdere kan der højst være i firmaet?

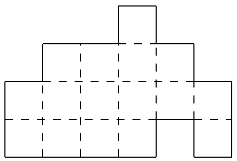


(*Georg Mohr 2014, opgave 13*)

Opgave 3. En perleplade består af 8×8 perler. Anders har fem forskellige farver perler. Hvor mange forskellige perleplader kan Anders lave når han vil have at den yderste kant er ensfarvet?

A) 5^{37} B) 37^5 C) $5^{36}+5$ D) $36 \cdot 5$ E) 36^5+5

Opgave 4. En eller flere af de kedelige grå fliser i det viste område skal hver især erstattes med en gul eller en sort flise. Hvor mange forskellige muligheder er der for det nye udseende af fliseområdet?



A) $16 \cdot 15$ B) $3^{16}-1$ C) $2^{16}-1$ D) 16^2-1 E) 31

(*Georg Mohr 2010, opgave 8*)

Opgave 5. Hvor mange forskellige syvcifrede positive heltal findes der som ikke indeholder cifferet 7?

A) 9^7 B) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ C) $8 \cdot 9^6$ D) 10^7 E) 10^7-7

Tællestrategi

Når man skal tælle hvor mange blandt nogle kombinationer der opfylder en bestemt betingelse, skal man *altid* overveje om det er nemmest at tælle dem der opfylder betingelsen, eller dem der ikke gør.

Eksempel Til en multiple choice-konkurrence er der ti spørgsmål med svarmulighederne A, B, C, D og E. På hvor mange måder kan man svare på de ti spørgsmål så der er mindst to spørgsmål i træk hvor man har sat kryds ved samme svarmulighed?

Her er det meget nemmere at tælle på hvor mange måder man kan sætte krydserne, så man ikke har svaret det samme på to spørgsmål i træk, og derefter trække det fra det samlede antal svarmuligheder. Der er 5^{10} svarmuligheder i alt, og der er $5 \cdot 4^9$ kombinationer hvor der ikke svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, fordi vi har 5 muligheder for at svare på spørgsmål 1, og derefter 4 muligheder for at svare på hvert af de følgende spørsmål, da vi blot ikke må svare det samme som på det foregående. Dermed er der i alt $5^{10}-5 \cdot 4^9$ måder at svare på de ti spørgsmål så at der findes to på hinanden følgende spørgsmål hvor man har svaret det samme.

Opgave 6. Hvor mange forskellige trecifrede positive heltal findes der som indeholder cifferet 7?

Opgave 7. Ved et binært ord af længde n forstås en serie på n cifre som hver er enten 0 eller 1. Ved afstanden mellem to binære ord af samme længde forstås antallet af pladser hvor de to ord afviger. Eksempelvis er afstanden mellem de to ord 100010 og 010011 lig med 3. Hvor mange binære ord af længde seks har afstanden højst 4 fra ordet 100010?

(*Georg Mohr 2008, opgave 20*)

Eksempel Til et stævne er der 14 hold der kæmper om guld, sølv og bronze. Når man skal bestemme på hvor mange forskellige måder medaljerne kan fordeles, har man 14 muligheder for at uddele guld, 13 for sølv og 12 for bronze, dvs. der er i alt $14 \cdot 13 \cdot 12$ måder at fordele medaljerne på ifølge multiplikationsprincippet.

Rækkefølge

Generelt kan man stille n ting i rækkefølge på

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

måder da man først har n muligheder for at vælge hvad der skal først, derefter $n-1$ muligheder for at vælge det næste, osv.

Opgave 8. Seks børn leger *En stol for lidt* hvor der står fem stole på række, og børnene skal skynde sig at sætte sig på en stol så snart musikken stopper. På hvor mange forskellige måder kan børnene sidde på stolene når der sidder præcist et barn på hver stol?

Opgave 9. Som password til et diskussionsforum om datasikkerhed har en person brugt de ni bogstaver GEORGMOHR, dog i en anden rækkefølge - som han desværre har glemt. Han husker kun at M var det første bogstav, at H var det sidste, og at ens bogstaver stod lige efter hinanden. Hvor mange muligheder giver det?

(*Georg Mohr 2009, opgave 13*)

Sandsynlighedsregning

I sandsynlighedsregning udregner man sandsynligheden for at noget indtræffer ud fra nogle betingelser. Meget grundlæggende sandsynlighedsregning bygger på kombinatorik da man ofte skal tælle hvor mange forskellige udfald der er i alt, og hvor mange af disse udfald man er interesseret i.

Sandsynlighed

Når man har en række lige sandsynlige udfald og skal bestemme sandsynligheden for at få nogle bestemte af disse, så er sandsynligheden for dette

$$\frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}},$$

hvor de gundstige er dem man ønsker, og de mulige er alle mulige udfald.

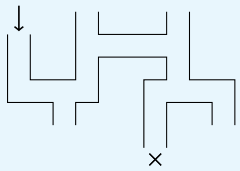
Hvis man skal bestemme sandsynligheden for at to eller flere uafhængige hændelser begge indtræffer, så ganger man sandsynligheden for hver hændelse sammen ligesom ved multiplikationsprincippet.

Eksempel Hvis man skal beregne sandsynligheden for at trække et tal der er deleligt med 4 når man trækker et tilfældigt tal blandt tallene $1, 2, 3, \ldots, 17$, så ved at man at de 17 udfald alle er lige sandsynlige, og at man kun er interesseret i 4 af dem (nemlig $4, 8, 12, 16$). Der er altså fire gundstige og 17 mulige, dvs. sandsynligheden er $\frac{4}{17}$.

Eksempel Hvis man skal beregne sandsynligheden for først at få en 1'er og derefter et lige tal når man kaster en sekssidet terning to gange, så er der først $\frac{1}{6}$ sandsynlighed for at slå en 1'er, og derefter $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ sandsynlighed for at slå et lige tal, dvs. den samlede sandsynlighed er $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Her ganger vi altså sandsynlighederne sammen da vi både skal have en 1'er og derefter et lige tal, og de to hændelser er uafhængige.

Eksempel Marie går ind i labyrinten ved ↓, og ved hver forgrening slår hun plat og krone om hvilken gren hun skal vælge. Hvad er sandsynligheden for at hun kommer ud ved ×?



(*Georg Mohr 2008, opgave 3*)

For at bestemme sandsynligheden bemærker vi at Marie for at komme ud ved × må have slået plat og krone fire gange, og at der for hver gang er sandsynlighed $\frac{1}{2}$ for at hun vælger den rigtige vej. Da vi i hvert af de fire kast skal slå noget bestemt, bliver den samlede sandsynlighed

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

Eksempel Hvis man skal beregne sandsynligheden for at få mindst en 6'er hvis man kaster en almindelig sekssidet terning tre gange, er det nemmere at finde den modsatte sandsynlighed og trække den fra 1. Lidt ligesom vi før nogle gange talte det modsatte af det vi ønskede at tælle.

Sandsynligheden for ikke at få en 6'er i et kast er $\frac{5}{6}$. Sandsynligheden for ikke at få en 6'er i nogen af de tre kast er derfor

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216},$$

og sandsynligheden for at få mindst en 6'er i de tre kast er altså

$$1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}.$$

Opgave 10. Georg slår plat eller krone med en mønt. Efter hvert kast skriver han A hvis han fik krone, og B hvis han fik plat. Hver gang tilføjer han det nye bogstav efter det foregående. Efter fire kast har han et ord på fire bogstaver. Hvilket af følgende ord er der størst sandsynlighed for at han har?

A) ABBA B) BBAB C) ABAB D) AAAA E) alle ordene er lige sandsynlige

(*Georg Mohr 2017, opgave 5*)

Opgave 11. På en spilleterning er øjnene erstattet af bogstaverne M, R, S, S, U og U. Marie og Hans kaster hver terningen tre gange. Hvilket af følgende udfald er mest sandsynligt?'

A) SUR MUR B) SUR MUS C) MUR SUM
D) URS RUS E) MUS SUS

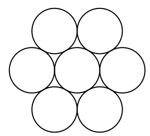
(*Georg Mohr 2013, opgave 2*)

Opgave 12. En spillemaskine vælger hvert sekund et tilfældigt af symbolerne ♡, ♠, ♢ og ♣. Hvad er sandsynligheden for at de fire første symboler den vælger, er ens?

A) $4\cdot\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4\cdot 4}$ C) $\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ D) $\frac{1}{4^4}$ E) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

(*Georg Mohr 2016, opgave 3*)

Opgave 13. De syv tal −3, −2, −1, 0, 1, 2 og 3 anbringes tilfældigt i de syv ringe. Hvad er sandsynligheden for at summen af tallene i de seks yderste ringe er lig med −3?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{3}{49}$

(*Georg Mohr 2008, opgave 7*)

Opgave 14. Otte små almindelige terninger limes sammen til en større terning. Hvad er sandsynligheden for at ingen 1'ere er synlige?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{256}$ C) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

(*Georg Mohr 2006, opgave 10*)

Opgave 15. På et display står de fire cifre 1, 2, 5 og 7. En gang i sekundet rykker et tilfældigt af de tre forreste cifre om bag de andre, f.eks. således:

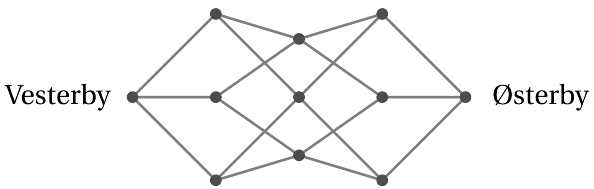
$$\ldots \to 1527 \to 1275 \to 2751 \to 2715 \to \ldots$$

Hvis displayet på et givet tidspunkt viser 1527, hvad er så sandsynligheden for at det to sekunder senere igen viser 1527?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{24}$

(*Georg Mohr 2015, opgave 10*)

Opgave 16. En bil kører fra Vesterby til Østerby ad det viste vejnet. Turen består af fire strækninger der hver tager en time. En anden bil kører fra Østerby til Vesterby, ligeledes ad fire strækninger der hver tager en time. De to biler starter samtidig. Hvad er sandsynligheden for at de mødes?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $(\frac{1}{3})^3$ D) $\frac{1}{9}$ E) $(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{2})^2$

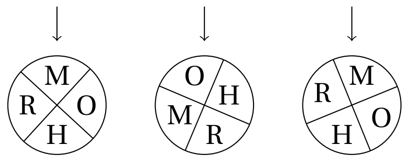
(*Georg Mohr 2018, opgave 7*)

Opgave 17. Ni små papbrikker nummereres med tallene $1,2,3,\ldots,9$ og lægges i en pose. Posen rystes, og Marie stikker hånden ned i posen uden at kikke og tager to papbrikker op. Hvad er sandsynligheden for at både summen og produktet af de to udtrukne tal er ulige?

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{25}{81}$ E) 1

(*Georg Mohr 2011, opgave 9*)

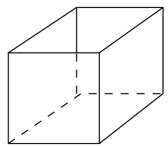
Opgave 18. De tre skiver snurres rundt uafhængigt af hinanden. Der er gevinst hvis en (eller, som i det viste eksempel, flere) af dem stopper ved M. Hvad er sandsynligheden for at der er gevinst?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{64}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{27}{64}$ E) $\frac{37}{64}$

(*Georg Mohr 2009, opgave 12*)

Opgave 19. En kasse uden låg skal males udvendigt og indvendigt. Hver af de fem udvendige flader og fem indvendige flader males enten rød eller blå, og det er helt tilfældigt hvilken farve der vælges til den enkelte flade.



Hvad er sandsynligheden for at mindst én af fladerne får samme farve på ydersiden og indersiden?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{9}{10}$ C) $(\frac{1}{2})^5$ D) $\frac{31}{32}$ E) $\frac{4}{5}$

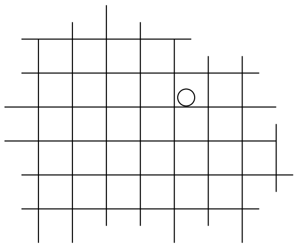
(*Georg Mohr 2015, opgave 10*)

Opgave 20. A og B spiller et terningespil med følgende regler: A kaster en terning. Hvis terningen viser 1 eller 6, har A vundet. Hvis den viser 2, 3 eller 4, har B vundet. Hvis den viser 5, skal A kaste den igen, men denne gang betyder 1 eller 6 at B har vundet, hvorimod 2, 3, 4 eller 5 betyder at A har vundet. Hvad er sandsynligheden for at A vinder dette spil?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{6}$

(*Georg Mohr 2011, opgave 14*)

Opgave 21. En mønt med diameter $\frac{1}{2}$ kastes på et uendeligt kvadratnet bestående af kvadrater med sidelængde 1. Hvad er sandsynligheden for at mønten lander helt inden for et af kvadraterne?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{4}{\pi^2}$

(*Georg Mohr 2009, opgave 8*)

Logik

I logikopgaver skal man ud fra udsagn der enten er sande eller falske, afgøre hvad man kan slutte. Her er det ofte en god idé at inddele i tilfælde. Hvis man fx har nogle personer der enten taler sandt eller lyver, og som hver kommer med en påstand, så kan man komme i gang med opgaven ved at overveje hvad man kan slutte hvis en bestemt person taler sandt, eller hvis en bestemt person lyver. På den måde kan man afdække alle tilfælde, og hvad hvert tilfælde medfører.

Eksempel Nu ser vi på en opgave hvor vi netop har personer der enten taler sandt eller lyver, og som kommer med forskellige påstande:

Netop en af personerne X, Y og Z lyver.

X siger: »Jeg er glad«.

Y siger: »X lyver«.

Z siger: »X og Y er begge to sure«.

Hvad kan heraf sluttes?

A) X er glad B) Y er glad C) Z er glad D) Y er sur E) Z er sur

(*Georg Mohr 2008, opgave 9*)

For at undersøge hvad vi kan slutte, ser vi først på tilfældet hvor X lyver, og derefter på tilfældet hvor X taler sandt.

Hvis det er X som lyver, så må både Y og Z tale sandt da netop en person lyver. Dette stemmer overens med at Y siger »X lyver«. Desuden er Z's udsagn sandt, dvs. X og Y er sure.

Hvis X taler sandt, så er X glad, og Y lyver da Y siger »X lyver«. Da der kun er en som lyver, må Z tale sandt, dvs. X og Y er sure. Hvis vi antager at man ikke både kan være glad og sur, så kan dette ikke lade sig gøre, men dette er ikke vigtigt for opgaven.

Det eneste vi med sikkerhed kan konkludere, er altså at X og Y er sure, dvs. den eneste af de fem påstande vi kan slutte, er D.

Opgave 22. Ole lyver mandag, tirsdag og onsdag og taler sandt resten af ugen. Hans lyver torsdag, fredag og lørdag og taler sandt resten af ugen. »I går løj jeg«, siger Ole en dag. »Det gjorde jeg også«, siger Hans. På hvilken ugedag falder disse udtalelser?

A) mandag B) onsdag C) torsdag D) søndag E) det kan ikke afgøres

(*Georg Mohr 2009, opgave 6*)

Opgave 23. I Venneby er man venner med alle i sin familie og med sine venners venner. Dem man ikke er venner med, hader man. Vi ved at Anders og Bo er brødre til Carla, at Frede er ven med Tim, at Bo hader Dan, og at Dan hader Tims og Carlas datter Else. Heraf følger at

A) Carla er ven med Frede B) Else hader Frede C) Anders hader Tim D) Dan er ven med Tim E) Frede hader Anders

(*Georg Mohr 2009, opgave 13*)

Opgave 24. Anna, Berit, Cecilie og Dorte taler hver især altid sandt eller lyver altid. Pigerne siger følgende:

Anna: "Mindst to blandt os fire lyver."
Berit: "Jeg er den eneste blandt os fire som lyver."
Cecilie: "Jeg er den eneste blandt os fire som taler sandt."
Dorte: "Vi taler alle fire sandt."

Hvor mange af de fire piger lyver?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(*Georg Mohr 2015, opgave 5*)

Opgave 25. Anders, Benjamin, Carla og Dagmar taler hver især enten altid sandt eller lyver altid. De siger:

Anders: *Dagmar lyver.*
Benjamin: *Carla lyver.*
Dagmar: *Den ene af Benjamin og Carla taler sandt, mens den anden lyver.*

Hvem ved vi med sikkerhed altid lyver?

A) Anders B) Benjamin C) Carla D) Dagmar E) alle

(*Georg Mohr 2017, opgave 7*)

Blandede opgaver

Opgave 26. Hvor mange forskellige eksamensspørgsmål skal en lærer mindst lave til et hold på 22 elever, når hvert spørgsmål må bruges op til tre gange, og når den sidste elev skal kunne vælge mellem mindst fire (ikke nødvendigvis forskellige) spørgsmål?

(*Georg Mohr 2009, opgave 1*)

Opgave 27. Anna har kastet en terning tre gange og fået tre forskellige øjental. Summen af disse øjental er 11. I første og tredje kast viste terningen et lige tal. Intet af kastene var en toer. Hvad viste terningen i andet kast?

(*Georg Mohr 2010, opgave 7*)

Opgave 28. Blandt de 20 elever i Maries klasse er der 13 der har været i Spanien, og 12 der har været i Italien. Fire af eleverne har hverken været i Spanien eller Italien. Hvor mange elever har både været i Spanien og Italien?

(*Georg Mohr 2009, opgave 3*)

Opgave 29. På fem kort er der trykt et symbol på hver side. Et af kortene har symbolet ♣ på den ene side og ♠ på den anden, et bærer symbolerne ♠ og ♡, et har ♢ og ♣, et har ♡ og ♢, og endelig er der et med ♢ og ♠. Jeg blander kortene og lægger dem ud i en række på bordet. Du ser symbolerne:

♢ ♣ ♠ ♣ ♢

Hvilket symbol er der på bagsiden af det midterste kort?

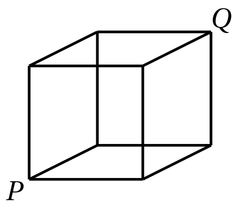
A) ♢ B) ♡ C) ♠ D) ♣ E) Det kan ikke afgøres

(*Georg Mohr 2011, opgave 4*)

Opgave 30. I en stor sæk ligger der røde, gule, grønne, blå og sorte sokker blandet mellem hinanden, mindst 50 af hver farve. Peter tager sokker op af sækken uden at kigge. Hvad er det mindste antal sokker han skal tage op for at være sikker på at han kan danne mindst ti ensfarvede par?

(*Georg Mohr 2013, opgave 18*)

Opgave 31. Figuren viser en terning der er lavet af 12 stykker ståltråd. En myre kravler langs ståltråden fra punktet P til punktet Q. Undervejs besøger den alle terningens øvrige hjørner netop én gang. Hvor mange mulige ruter er der?



(*Georg Mohr 2017, opgave 16*)

Opgave 32. Syv piger og syv drenge stiller sig tilfældigt i en række. I hver runde peger læreren på to børn ved siden af hinanden, som så bytter plads. Hvor mange runder skal der maksimalt til for at få de syv piger til at stå på de syv første pladser?

(*Georg Mohr 2018, opgave 14*)

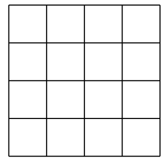
Opgave 33. I tabellen nedenfor skal der indsættes et helt tal i hvert felt så summen af tallene i fire felter ved siden af hinanden altid er 48. Tre felter er allerede udfyldt. Hvilket tal skal stå i feltet markeret med et x?

1			17						x					11

A) 12 B) 15 C) 17 D) 19 E) det kan ikke afgøres

(*Georg Mohr 2015, opgave 8*)

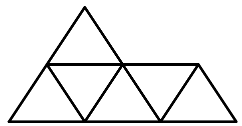
Opgave 34. Peter har afkrydset et af felterne nedenfor med usynligt blæk. Hvor mange ja/nej-spørgsmål skal Marie stille for at være sikker på at kunne udpege det mærkede felt?



(*Georg Mohr 2004, opgave 14*)

Opgave 35.

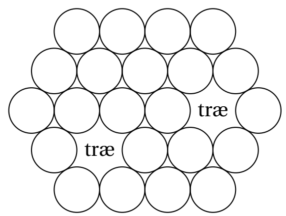
I Klaras matematikbog er der en figur som består af seks trekanter. Hun skal male to af dem blå, to af dem røde og de sidste to gule. På hvor mange måder kan hun gøre det?



A) 36 B) 3^6 C) 90 D) 120 E) 720

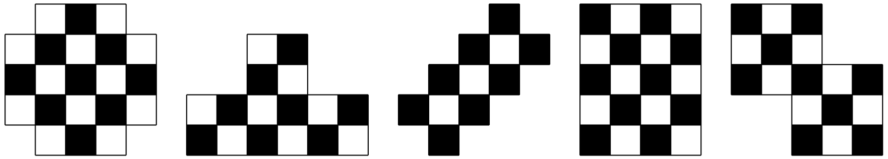
(*Georg Mohr 2018, opgave 8*)

Opgave 36. På en plads med to gamle træer skal der lægges 22 store runde fliser i farverne blå, grå og grøn. Fliserne skal placeres som vist på figuren. På hvor mange måder kan man vælge fliserne når to fliser der støder op til hinanden, ikke må have samme farve?



(*Georg Mohr 2016, opgave 17*)

Opgave 37. I et enmandsspil har man et bræt med både sorte og hvide felter. I hvert træk skal man vælge en række eller en søjle og derefter ændre alle sorte felter til hvide og alle hvide felter til sorte i den valgte række/søjle. Man vinder hvis man kan gøre brættet helt sort eller helt hvidt i højst fire træk. Med hvor mange af følgende brætter er det muligt at vinde?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(*Georg Mohr 2017, opgave 9*)

Opgave 38. Ti venner har været på ferie sammen. Hver dag var der højst tre af dem der ikke benyttede hotellets swimmingpool, og ingen af dem har brugt swimmingpoolen samme antal dage som nogen af de andre. Dette kunne ikke have ladet sig gøre hvis ferien havde varet en dag mindre. Hvor mange dage varede ferien?

(*Georg Mohr 2015, opgave 20*)

Løsningsskitser

Opgave 1 Svar: C. Da der for hvert af de ni felter er to valgmuligheder, er der i alt 2^9 forskellige måder at udfylde skemaet på.

Opgave 2 Svar: 64. Der er seks felter, og hvert felt kan enten være rødt eller sort. Der er derfor to muligheder for at farve hvert felt. Det giver ifølge multiplikationsprincippet $2^6 = 64$ forskellige logoer. Der kan derfor højst være 64 medarbejdere.

Opgave 3 Svar: A. For hver af de $6 \cdot 6 = 36$ perler i midten er der fem farvemuligheder. Desuden er der fem farvemuligheder for kanten. Anders skal altså vælge mellem de fem farver 37 gange i alt, dvs. der er 5^{37} forskellige måder at udfylde perlepladen på.

Opgave 4 Svar: B. For hver af de 16 fliser har vi tre valgmuligheder, nemlig at beholde den grå eller at skifte til en gul eller en sort flise. Det giver i alt 3^{16} kombinationer. Dog skal vi trække en fra da vi ikke må beholde alle de gamle grå fliser, men mindst skal udskifte en. Antallet er muligheder er derfor $3^{16} - 1$.

Opgave 5 Svar: C. Det første ciffer må hverken være 0 eller 7, dvs. vi har 8 valgmuligheder for det første ciffer. For hvert af de efterfølgende seks cifre har vi 9 valgmuligheder da vi må vælge alle cifre på nær 7. Dermed er der $8 \cdot 9^6$ tal der opfylder det ønskede.

Opgave 6 Svar: 252. For at tælle hvor mange trecifrede tal der indeholder cifferet 7, tæller vi i stedet antallet af trecifrede tal som ikke indeholder cifferet 7, og trækker det fra det samlede antal af trecifrede tal. Der er i alt $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ trecifrede tal, og af disse indeholder $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ ikke cifferet 7. Dermed er der $900 - 648 = 252$ trecifrede tal som indeholder cifferet 7.

Opgave 7 Svar: 57. For at tælle antallet af binære ord hvis afstand til 100010 højst er 4, tæller vi i stedet antallet af binære tal hvis afstand til 100010 er større end 4, dvs. er 5 eller 6. Dette antal trækkes derefter fra det samlede antal af binære ord af længde seks. Der er i alt $2^6 = 64$ ord af længde seks da der for hvert af de seks cifre er to valgmuligheder. Der er kun et binært ord af længde seks med afstand 6 til 100010, nemlig 011101. Der er seks binære ord af længde seks med afstand 5 til 100010 da der er seks muligheder for at vælge hvilket ciffer der skal være identisk med det tilsvarende ciffer i 100010, hvorefter resten af cifrene er bestemt. Samlet er der $64 - 1 - 6 = 57$ binære ord af længde seks hvis afstand til 100010 højst er 4.

Opgave 8 Svar: 720. Der er seks muligheder for at placere et barn på den første stol, fem muligheder for den anden stol, osv. Der er altså i alt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ kombinationer.

Opgave 9 Svar: 24. Mellem det første M og det sidste H skal GG, E, OO og RR placeres i en eller anden rækkefølge. Det kan gøres på $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måder.

Opgave 10 Svar: E. Da sandsynligheden for hvert af de to bogstaver er $\frac{1}{2}$, må sandsynligheden for $ABBA$ være $(\frac{1}{2})^4$. Helt tilsvarende for BBAB, ABAB og AAAA. De er altså lige sandsynlige.

Opgave 11 Svar: E. Da sandsynligheden for S og U hver er $\frac{1}{3}$, mens sandsynligheden for M og R hver er $\frac{1}{6}$, er MUS SUS mest sandsynligt, da det indeholder 5 bogstaver med sandsynlighed $\frac{1}{3}$ og kun et med sandsynlighed $\frac{1}{6}$, mens de andre indeholder mindst to med en sandsynlighed på kun $\frac{1}{6}$. (Sandsynligheden for MUS SUS er derfor $(\frac{1}{3})^5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3^5 \cdot 6}$, mens fx sandsynligheden for SUR MUS er $(\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{3^4 \cdot 6^2}$.)

Opgave 12 Svar: E. Hvis de første fire symboler skal være ens, så kan det første være hvad som helst, mens hvert af de næste tre skal være identisk med det første. Der er $\frac{1}{4}$ sandsynlighed for at hvert af dem er identisk med det første, og da de tre hændelser er uafhængige, kan vi gange dem sammen for at få sandsynligheden for at de alle er identiske med det første. Sandsynligheden er derfor $(\frac{1}{4})^3$.

Opgave 13 Svar: C. Summen af tallene i de yderste seks cirkler giver kun -3 når der står 3 i midten. Da der er syv tal der skal placeres i syv cirkler, er sandsynligheden for at 3 er i midten $\frac{1}{7}$.

Opgave 14 Svar: B. For hver terning er tre af de seks sider ikke synlige, dvs. for hver terning er sandsynligheden $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ for at 1'eren ikke er synlig. Sandsynligheden for at ingen af de otte 1'ere er synlige, er derfor $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$.

Opgave 15 Svar: C. Hvis displayet på et givet tidspunkt viser 1527 og to sekunder senere igen viser 1527, så må den have skiftet fra 1527 til 1572 til 1527. Der er tre muligheder for hvilket ciffer der rykker bag de andre, dvs. der er $\frac{1}{3}$ sandsynlighed for at det er det næstsidste ciffer. Da det næstsidste ciffer skal rykke bag de andre to gange i træk for at der kan stå det samme tal efter to sekunder, er sandsynligheden $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Opgave 16 Svar: B. Hvis bilerne mødes, så mødes de midtvejs, dvs. de mødes i et af de tre midterste vejkryds. Bemærk at sandsynligheden for at ende i hvert af de tre vejkryds når man kommer fra Vesterby, er den samme, da der er to ruter fra Vesterby til hvert vejkryds. Det samme gælder for Østerby. Sandsynligheden for at bilen fra Østerby kommer forbi det samme midterste vejkryds som bilen fra Vesterby, er derfor $\frac{1}{3}$.

Opgave 17 Svar: A. Hvis produktet af to hele tal er ulige, da er de begge ulige, og da er deres sum lige. Det er altså umuligt at trække to hele tal hvis sum og produkt begge er ulige. Derfor er sandsynligheden 0.

Opgave 18 Svar: E. I stedet for at beregne sandsynligheden for gevinst, udregner vi sandsynligheden for ikke at få gevinst og trækker den fra 1. For hver skive er sandsynligheden $\frac{3}{4}$ for ikke at få M. Sandsynligheden for at ingen af skiverne lander på M er derfor $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$. Altså er sandsynligheden for at få gevinst $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$.

Opgave 19 Svar: D. Vi udregner først sandsynligheden for at ingen af fladerne har samme farve på indersiden som på ydersiden. Sandsynligheden for at en flade ikke har samme farve på indersiden som på ydersiden, er $\frac{1}{2}$ da der er to farver. Dermed er sandsynligheden for at ingen af fladerne har samme farve på indersiden som på ydersiden, lig med $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$. Sandsynligheden for at mindst en af fladerne har samme farve på begge sider, er derfor $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

Opgave 20 Svar: D. Sandsynligheden for at slå 1 eller 6 er $\frac{1}{3}$. Sandsynligheden for at slå 5 efterfulgt af 2, 3, 4 eller 5 i næste kast er $\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{9}$. Sandsynligheden for at A vinder er derfor $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

Opgave 21 Svar: B. Mønten lander inden for kvadratet netop hvis centrum af mønten lander med en afstand på $\frac{1}{4}$ eller mere fra en kant, dvs. netop hvis centrum af mønten lander i det midterste lille $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ kvadrat af kvadratet. Dette lille kvadrat har areal $\frac{1}{4}$, dvs. alle disse minikvadrater udgør tilsammen $\frac{1}{4}$ af det samlede areal. Derfor er sandsynligheden for at mønten lander helt inden for et af kvadraterne $\frac{1}{4}$.

Opgave 22 Svar: C. Når Ole siger »I går løj jeg«, så må det enten være en dag hvor han taler sandt, men løj dagen før, eller det må være en dag hvor han lyver, men talte sandt dagen før. Derfor må det være mandag eller torsdag. Når Hans siger »Det gjorde jeg også«, må det med samme argumentation være torsdag eller søndag. Altså er det torsdag.

Opgave 23 Svar: A. Vi kan slutte at Anders, Bo, Carla, Else og Tim er i familie, og dermed alle er venner. Desuden er Frede ven med Tim, og da alle er venner med deres venners venner, må Frede være venner med Anders, Bo, Carla og Else. Altså kan vi slutte A, og vi kan udelukke B, C og E. Vi kan yderligere udelukke D, for hvis Dan var ven med Tim, skulle han også være ven med Tims datter/ven Else.

Opgave 24 Svar: D. Berits udsagn kan ikke være sandt, og derfor er hun ikke den eneste blandt de fire der lyver. De er altså mindst to som lyver. Det betyder at Anna taler sandt, og at Dorte lyver. Da Anna taler sandt, kan vi desuden slutte at Cecilie lyver. Altså er der tre af de fire piger som lyver.

Opgave 25 Svar: A. Benjamins udsagn viser at hvis han taler sandt, så lyver Carla, og hvis han lyver, så taler Carla sandt. Altså må Dagmar altid tale sandt, og derfor lyver Anders. Den eneste vi med sikkerhed kan slutte lyver, er derfor Anders.

Opgave 26 Svar: 9. Efter at de første 21 har trukket, skal der være mindst fire spørgsmål tilbage, dvs. der skal være mindst 25 spørgsmål i alt. Da hvert spørgsmål højst må indgå tre gange, skal der laves mindst 9 spørgsmål fordi $3 \cdot 8 < 25 \leq 3 \cdot 9$.

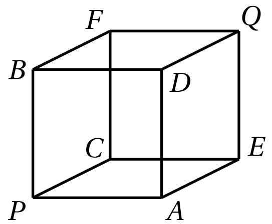
Opgave 27 Svar: 1. Da tallene som terningen viste i første og tredje kast, var lige, forskellige og ikke 2, må de have været henholdsvis 4 og 6. I det andet kast viste terningen derfor 1 da summen af de tre tal var 11.

Opgave 28 Svar: 9. Der er $20 - 4 = 16$ elever der har været i Spanien eller Italien. Der er $12 + 13 = 25$ elever der har været i Spanien eller Italien hvis de elever der har været i begge lande, tælles dobbelt. Derfor er der $25 - 16 = 9$ elever der har været i begge lande.

Opgave 29 Svar: B. Da to ud af de fem kort viser ♣, og der kun er to kort med ♣, må disse to kort ligge på plads 2 og 4. Nu er der yderligere to kort der viser ♢, og der er kun to kort med ♢ tilbage. De må derfor ligge på plads 1 og 5. Det midterste kort er derfor kortet ♡-♠, dvs. på bagsiden er der ♡.

Opgave 30 Svar: 24. Hvis man trækker 23 sokker, kan man risikere at have et ulige antal af hver af de 5 farver, dvs. man har 5 sokker uden makker, og dermed kun $\frac{23-5}{2} = 9$ par. Hvis man trækker 24 sokker, er man sikker på højst at have et ulige antal af fire af farverne, dvs. højst 4 sokker uden makker. Altså er man sikker på at have mindst $\frac{24-4}{2} = 10$ par.

Opgave 31 Svar: 6. Der er 3 mulige ruter ud fra P. Først ser vi på tilfældet hvor myren først går til A. Herefter kan myren enten gå til D eller E. Hvis myren går til D, så skal den derefter følge ruten $DBFCEQ$ for hele tiden at gå til et hjørne den endnu ikke har besøgt, og nå at besøge alle hjørner netop en gang inden Q. Helt tilsvarende er resten af ruten også entydigt fastlagt hvis myren går til E efter A. Der er altså to ruter når myren først går til A. Af symmetrigrunde er der også to ruter når myren først går til B, og når myren først går til C. Det giver 6 mulige ruter i alt.



Opgave 32 Svar: 49. Hver pige skal som minimum bytte plads med alle drengene foran hende, dvs. i det værst tænkelige scenarie, skal de 7 piger hver bytte plads med 7 drenge. Pigerne behøver ikke bytte plads indbyrdes da den første pige først flyttes foran alle drengene foran hende ved at hun bytter plads med en dreng ad gangen. Derefter den næste pige osv. Pigerne kan derfor flyttes i maksimalt $7 \cdot 7 = 49$ runder.

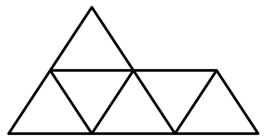
Opgave 33 Svar: C. Bemærk at da summen af felt 1-4 første skal give 48, og summen af felt 2-5 skal give 48, så må der stå det samme tal på felt 1 og 5. Helt tilsvarende på der stå det samme på felt 2 og 6, på felt 3 og 7, osv. Altså må tallene være følgende:

1	x	11	17	1	x	11	17	1	x	11	17	1	x	11

Tallet x skal derfor være $48-1-11-17=17$.

Opgave 34 Svar: 4. Når man stiller et ja/nej-spørgsmål, kan man højst være sikker på at udelukke halvdelen af svarmulighederne. Marie kan altså ved første spørgsmål højst være sikker på at udelukke 8 af de 16, osv., dvs. hun skal mindst stille 4 spørgsmål. På den anden side kan hun ved hver gang at spørge om det mærkede felt er blandt en bestemt halvdel af de felter hun ikke allerede har udelukket, netop udelukke halvdelen hver gang, og hun identificerer på denne måde det mærkede felt efter netop 4 spørgsmål.

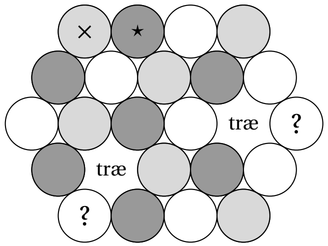
Opgave 35 Svar: C. Der er 3 muligheder for at vælge farven på den øverste trekant. Derefter er der 5 muligheder for at vælge hvilken af de andre trekanter der skal have samme farve.



Der er nu 2 muligheder for at vælge farve til den af de umalede trekanter der er længst til højre. Derefter er der 3 muligheder for at vælge hvilken af de resterende der skal have samme farve som denne. De to sidste umalede trekanter, skal nu males med den tredje farve.

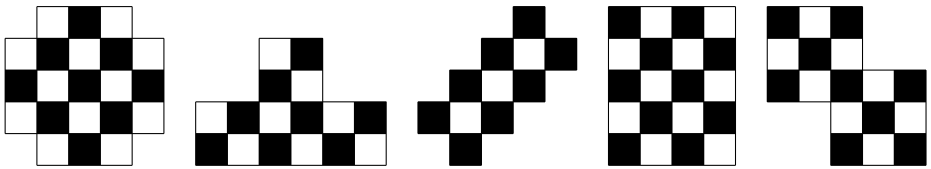
Dermed er der ifølge multiplikationsprincippet $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 90$ måder at farve figuren på.

Opgave 36 Svar: 24. Der er 3 muligheder for at vælge farve til den øverste højre flise markeret med $\times$. Derefter er der 2 muligheder for at vælge farve til naboflisen markeret med $\star$. Nu skal deres fælles naboflise have den tredje farve, og på den måde er farven på resten af fliserne bestemt pånær de to fliser markeret med spørgsmålstegn.



Der er som det ses 2 mulige farver for hver af de to fliser med spørgsmålstegn. Dermed kan flisernes farve ifølge multiplikationsprincippet vælges på $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ forskellige måder.

Opgave 37 Svar: D. Bemærk først at hvis man har to naborækker, så skal man vælge mindst en af dem da felterne i hver søjle ellers aldrig kan få samme farve. Det samme gælder for søjlerne. Hvis man vælger hver anden række og hver anden søjle, så bliver brættet ensfarvet. Hvis der er højst 5 rækker og 5 søjler, kan man derfor vinde ved at vælge 2 rækker og 2 søjler så hver anden er valgt. Det betyder at man kan vinde på bræt 1, 3, 4 og 5. På bræt nummer 2 kan man derimod ikke vinde i fire træk: Da der er fire rækker, skal man vælge mindst 2 rækker, og da der er seks søjler, skal man vælge mindst 3 søjler. Det kræver derfor mindst 5 træk at gøre brættet ensfarvet.



Opgave 38 Svar: 15. Ingen af de ti venner har brugt swimmingpoolen det samme antal dage, og det betyder at ingen har haft det samme antal dage hvor de ikke har brugt swimmingpoolen. Hvis vi for hver person tæller antallet af dage de ikke har brugt swimmingpoolen, og tager summen af de ti tal, er summen derfor mindst $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Da der højst er tre pr. dag der ikke har brugt swimmingpoolen, må ferien vare mindst $\frac{45}{3}=15$ dage. Dette er faktisk muligt: Kald personerne $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ alt efter hvor mange dage de ikke har brugt swimmingpoolen. Oversigten viser hvem der ikke har brugt swimmingpoolen for hver af de 15 dage:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9
7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8