



Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

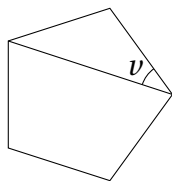
Geometri

Her er nogle centrale principper om og strategier for hvordan man løser geometriopgaver. Det er ikke en særlig teoretisk indføring, men der i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man løser opgaver ved at se på vinkler, areal, ensvinklede trekanter og retvinklede trekanter med fokus på 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. For at blive god til 1. runde er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor mange har været stillet som opgaver til 1. runde.

Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningskitser til alle opgaver bagerst.

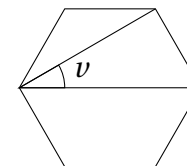
Vinkler Når man skal bestemme en vinkel i en geometrisk figur, skal man først danne sig et overblik over hvad man ved om vinklerne i figuren. Husk at vinkelsummen i en trekant er 180° , vinkelsummen i en firkant er 360° , og at femkanter, sekskanter, osv. kan inddeles i trekanter for at bestemme deres vinkelsum. Desuden er det en god idé at se efter ligebenede trekanter og udnytte at vinklerne ved grundlinjen er ens.

Eksempel På figuren er tegnet en regulær femkant, dvs. en femkant hvor alle sider er lige lange, og alle vinkler er lige store. Vi ønsker at bestemme den markerede vinkel v .

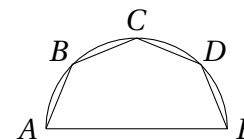


Da en femkant kan inddeles i tre trekanter, er vinkelsummen i en femkant $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Derfor er hver af vinklerne $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. I den markerede trekant hvor vinklen v indgår, er den store vinkel derfor 108° , mens de to små vinkler er lige store da trekanten er ligebenet. Altså er $v = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

Opgave 1. På figuren er der en regulær sekskant. Hvor mange grader er den markerede vinkel v ?

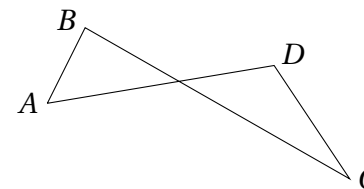


Opgave 2. Punkterne A, B, C, D og E ligger med samme indbyrdes afstand på en halvcirkel som vist. Hvor stor er vinkel E i femkanten $ABCDE$?



- A) 60° B) 45° C) 135° D) 72° E) $67,5^\circ$

Opgave 3. En plan figur $ABCD$ bestående af linjestykker AB, BC, CD og DA , hvor BC og DA krydser hinanden, kaldes en sløjfe. Hvad kan man sige om vinkelsummen $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$ i en sløjfe? Den er:

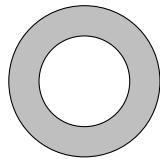


- A) over 90° B) 180° C) under 360° D) 360° E) 540°



Areal I opgaver med areal skal man have styr på formlen for arealet af en trekant, formlen for arealet af et rektangel og formlen for arealet af en cirkel. Desuden er det vigtigt at huske at to trekanter med samme grundlinje og samme højde har samme areal.

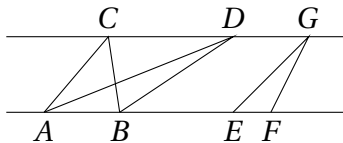
Eksempel En stor cirkel har radius 5 og en lille cirkel med radius r har samme centrum. Vi ved at arealet mellem de to cirkler (markeret med gråt på figuren) er 16π , og vi skal bestemme r .



Arealet mellem de to cirkler er arealet af den store cirkel minus arealet af den lille cirkel, dvs.

$$\begin{aligned} 16\pi &= 5^2\pi - r^2\pi \\ r^2 &= 25 - 16 = 9 \\ r &= 3. \end{aligned}$$

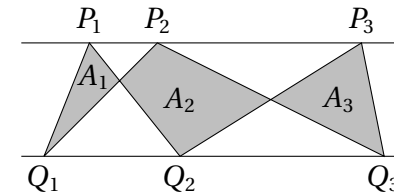
Eksempel Da formlen for arealet af en trekant er højde gange grundlinje divideret med 2, har trekanter med samme grundlinje og samme højde også samme areal.



På figuren er indtegnet to parallelle linjer. De to trekanter ABC og ABD har samme areal da de har samme grundlinje AB og samme højde, nemlig afstanden mellem de parallelle linjer.

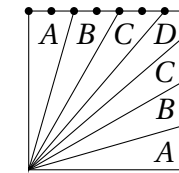
På figuren er linjestykket EF halvt så stort som linjestykket AB . Derfor er arealet af trekant EFG halvt så stort som arealet af trekant ABC da grundlinjen er halvt så stor, mens højden er den samme.

Opgave 4. På den ene af to parallelle linjer ligger punkterne P_1 , P_2 og P_3 , og på den anden ligger punkterne Q_1 , Q_2 og Q_3 . Der trækkes forbindelseslinjer mellem dem som vist på figuren. Hvad gælder der om arealerne A_1 , A_2 og A_3 ?



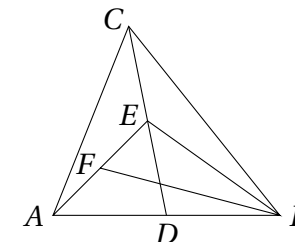
- A) $A_1 + A_3 = A_2$ B) $A_1 + A_3 < A_2$ C) $\sqrt{A_1} + \sqrt{A_3} = \sqrt{A_2}$
 D) $\frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_3 = \frac{1}{2}A_2$ E) ingen af delene

Opgave 5. En kvadratisk chokoladelagkage med målene $35 \text{ cm} \times 35 \text{ cm}$ udskæres i syv pæne stykker som vist. Der er 5 cm mellem hver af de viste markeringer. Hvilken type stykke er mindst?



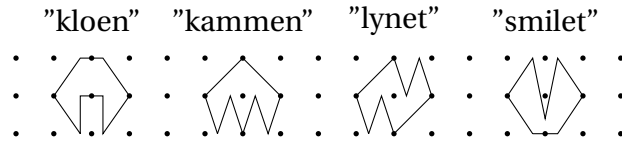
- A) type A B) type B C) type C D) type D
 E) alle har samme størrelse

Opgave 6. I trekant ABC er D midtpunktet af AB , E midtpunktet af CD og F midtpunktet af AE . Hvis arealet af trekant ABC er 120, hvad er så arealet af trekant BEF ?





Opgave 7. Hvilket logo har det største areal?

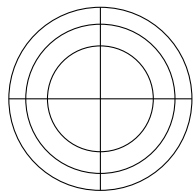


- A) "kloen" B) "kammen" C) "lynet" D) "smilet"
 E) de har alle samme areal

Opgave 8. En cirkel med radius r har samme areal som en kvartcirkel med radius 1. Hvad er r ?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

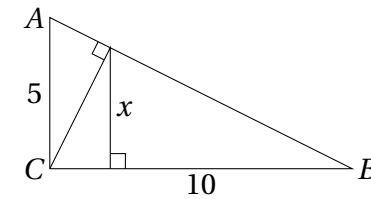
Opgave 9. De 12 områder har alle samme areal. Den mellemste cirkel har radius 1. Hvad er radius af den yderste cirkel?



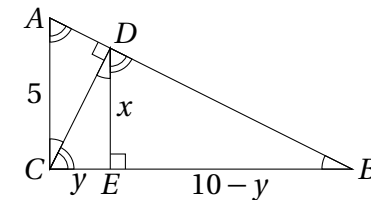
- A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2}$ C) π D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ensvinklede trekanter Hvis to trekanter har de samme vinkler, kaldes de ensvinklede, og forholdet mellem ensliggende sider er det samme. I geometri er det altid vigtigt at lægge mærke til om der er ensvinklede trekanter da man ved at se på forhold mellem sider kan bestemme længder på figuren.

Eksempel På figuren er der en retvinklet trekant ABC hvor vinkel C er ret, $|AC| = 5$ og $|BC| = 10$. Vi ønsker at bestemme længden x .

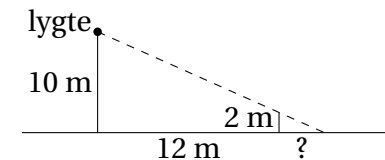


I en retvinklet trekant er summen af de to spidse vinkler 90° , og det betyder at der er en masse ens vinkler som vi markerer på figuren.



Nu kan vi se at trekanterne ABC , CDE og DBE er ensvinklede. I trekant ABC er forholdet mellem de to kateter 2. Dette må derfor også gælde for trekant CDE og trekant DBE . Hvis vi sætter $|CE| = y$, er $|EB| = 10 - y$. Dermed er $x = 2y$ og $2x = 10 - y$. Ved at løse de to ligninger med to ubekendte fås $x = 4$.

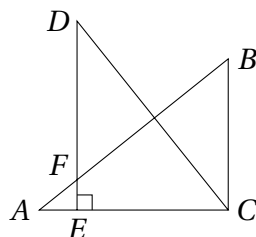
Opgave 10. En pæl på 2 meter kaster skygge i lyset fra en kraftig lygte på toppen af en 10 meter høj mast, der står 12 meter fra pælen. Hvor lang er skyggen?



- A) 2,4 m B) 2,5 m C) 3 m D) 4,8 m E) 5 m

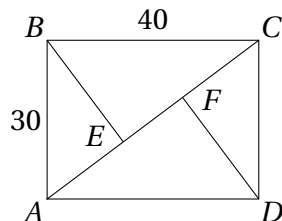


Opgave 11. Trekanterne ABC og DCE er kongruente (dvs. ensvinklede og lige store), og der gælder $|AC| = 5$ og $|BC| = 4$. Hvad er længden af liniestykket DF ?

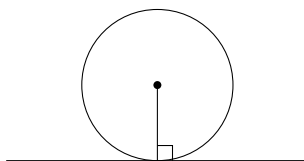


- A) $3\frac{4}{5}$ B) 4 C) $4\frac{1}{5}$ D) $4\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

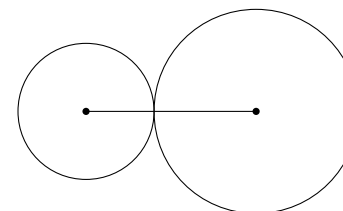
Opgave 12. I rektanglet $ABCD$ er $|AB| = 30$ og $|BC| = 40$. Linjestykkerne BE og DF står vinkelret på diagonalen AC . Hvor langt er stykket EF ?



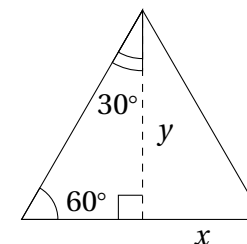
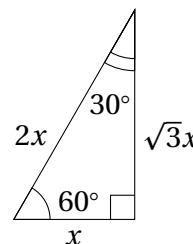
Find den retvinklede trekant I mange geometriopgaver er der retvinklede trekanter hvor man kender to af siderne, og dermed kan finde den tredje ved Pythagoras' sætning. De retvinklede trekanter er ikke altid synlige på figuren, man skal selv opdage dem! Når man leder efter retvinklede trekanter, er det vigtigt at huske at hvis en linje tangerer en cirkel, så står linjen fra centrum til røringspunktet vinkelret på tangenten.



Husk desuden at hvis to cirkler tangerer hinanden, da går linjen gennem de to centre også gennem cirklernes røringspunkt.



Trekanter med vinklerne $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ I en retvinklet trekant hvor de spidse vinkler er 30° og 60° , er hypotenusen dobbelt så lang som den korteste katete, og den længste katete er $\sqrt{3}$ gange længden af den korteste katete, og dermed $\frac{\sqrt{3}}{2}$ gange længden af hypotenusen. Det kan man indse ved at spejle trekanten i den længste katete så man får en trekant hvor alle vinkler er 60° , dvs. en ligesidet trekant.

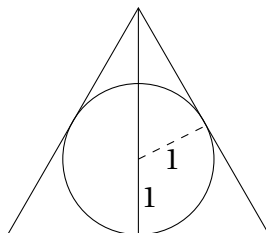


Da den nye trekant er ligesidet, ses det umiddelbart at den korte katete er halvt så lang som hypotenusen. Den længste katete kan findes ved Pythagoras' sætning. Vi kalder længden af den korteste katete for x og længden af den længste katete for y . Da er $y = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$.

Det er ofte meget anvendeligt at kende disse forhold da der er mange $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ -trekanter i geometri.

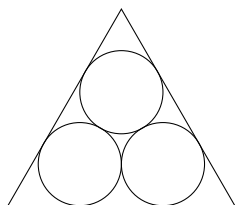


Eksempel I en ligesidet trekant har den indskrevne cirkel radius 1. Vi ønsker at bestemme trekantens højde.



Når vi indtegner højden, opstår der en 90° - 60° - 30° -trekant. Den øverste vinkel på 60° deles nemlig i to lige store vinkler da trekanten er ligesidet. Hvis vi yderligere indtegner en linje fra centrum til røringsspunktet for en af siderne, opstår der en lille 90° - 60° - 30° -trekant, da denne linje står vinkelret på siden. I denne trekant har den korte katete længde 1 da den svarer til radius i cirklen. Derfor er længden af hypotenusen 2, og hele højden er derfor $1 + 2 = 3$.

Opgave 13. I en ligesidet trekant er indtegnet tre cirkler med radius 1 som tangerer hinanden og trekantens sider som vist på figuren.

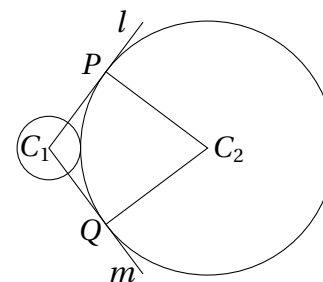


Hvor stor er trekantens sidelængde?

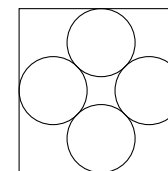
- A) $2 + \sqrt{3}$ B) $2 + 2\sqrt{3}$ C) $3 + \sqrt{3}$ D) 5 E) $3 + 2\sqrt{3}$.

Opgave 14. En ligebeinet trekant har areal 60, og højden på grundlinjen er 5. Hvad er trekantens omkreds?

Opgave 15. Den lille cirkel har centrum C_1 og radius 3, og den store cirkel har centrum C_2 og radius 12. Linjerne l og m går gennem C_1 og tangerer den store cirkel i punkterne P og Q . Hvad er arealet af firkant C_1PC_2Q ?

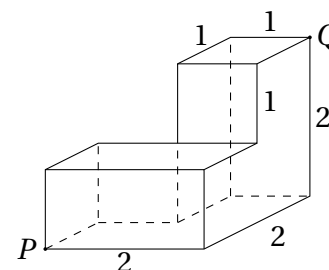


Opgave 16. Fire cirkler med radius 1 tangerer hinanden og siderne i et kvadrat som vist. Hvad er sidelængden i kvadratet?



- A) 2 B) 4 C) $2 + 2\sqrt{2}$ D) $4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $2\sqrt{5}$

Opgave 17. En bille skal kravle på ydersiden af den viste klods fra P til Q . Hvor lang er den korteste rute?

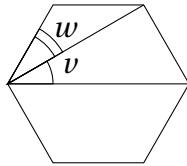


- A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $1 + \sqrt{5} + \sqrt{2}$ D) $2 + 2\sqrt{2}$ E) 5



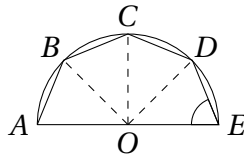
Løsningsskitser

Opgave 1 Svar: 30. Vinkelsummen i en sekskant er $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ da en sekskant kan inddeles i fire trekanter. Dermed er hver vinkel $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.



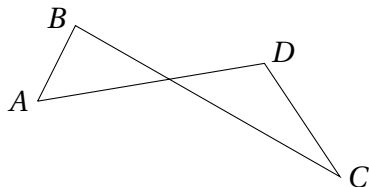
I trekanten med vinklen w er den store vinkel derfor 120° , mens de to små vinkler er lige store da trekanten er ligebejnet. Derfor er $w = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Vinkel $w + v$ er pga. symmetri halvdelen af den store vinkel på 120° som de er en del af. Derfor er $v + w = 60^\circ$ og $v = 60^\circ - w = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Opgave 2 Svar: E. Kald halvcirkelns centrum for O , og tegn forbindelseslinjer til de fem punkter som vist på figuren



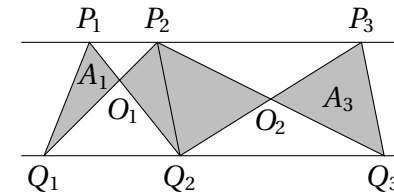
De fire vinkler ved centrum er lige store da linjestykkerne AB , BC , CD og DE alle er lige store. Derfor er de hver $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$. Trekant OED er ligebejnet da både OD og OE er radius i cirklen. Altså er $\angle E = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$.

Opgave 3 Svar: C. Vinkelsummen i de to trekanter tilsammen er $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.



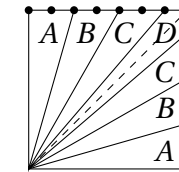
Summen af fire af de seks vinkler i trekanterne er derfor altid mindre end 360° . Dermed kan vi slutte C). Vi kan ikke slutte nogle af de andre udsagn da summen af de fire vinkler ændres afhængigt af summen af de to vinkler i midten. Hvis de fx bliver meget store, bliver summen af de fire vinkler mindre end 90° .

Opgave 4 Svar: A. På figuren er arealet A_2 inddelt i to dele.



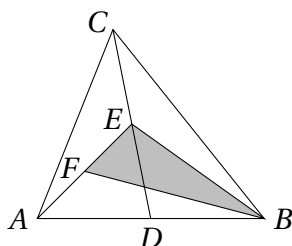
Trekant $Q_1P_1Q_2$ og trekant $Q_1P_2Q_2$ har samme areal da de har samme grundlinje og samme højde. Derfor har trekant $Q_1O_1P_1$ og trekant $Q_2O_1P_2$ også samme areal. På samme måde ses at arealet af trekant $Q_2O_2P_2$ og arealet af trekant $Q_3O_2P_3$ er det samme. Derfor er $A_1 + A_3 = A_2$.

Opgave 5 Svar: E. Trekanterne af type A, B og C har alle samme grundlinje og samme højde, og deres areal er derfor det samme.



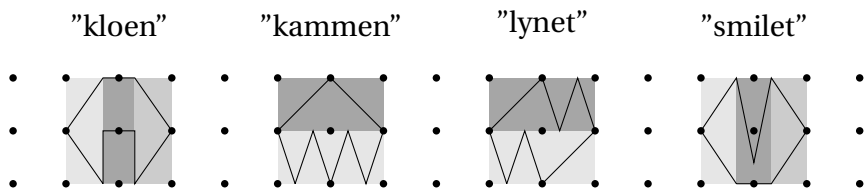
Firkanten type D inddeles i to lige store dele ved at indtegne diagonalen i kvadratet. Hver af de to trekanter der opstår, er halvt så store som trekanterne af type A, B og C da deres grundlinje er halvt så stor, mens de har samme højde. Derfor har stykket af type D samme areal som de andre. Alle stykkerne er derfor lige store.

Opgave 6 Svar: 30. Da E er midtpunktet af CD er afstanden fra E til linjen AB halvt så stor som afstanden fra C til linjen AB . Trekant ABE er derfor halvt så stor som trekant ABC da de har samme grundlinje. Derfor er arealet af trekant ABE lig med $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.



Trekant BEF er halvt så stor som trekant ABE da grundlinjen EF i trekant BEF er halvt så stor som grundlinjen AE i trekant ABE , mens højden er den samme. Altså er arealet af trekant BEF lig med $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30$.

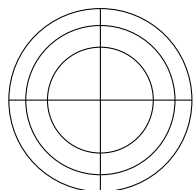
Opgave 7 Svar: D. Figurerne "kloen", "kammen" og "lynet" har alle areal 2 da de udgør halvdelen af hver af de markerede rektangler på figuren.



Figuren "smilet" har derimod et areal der er lidt større end 2, da "smilet" udgør halvdelen af de to yderste grå rektangler, mens den udgør lidt mere end halvdelen af det midterste grå rektangel.

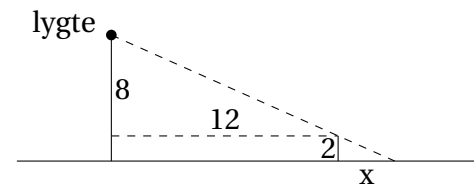
Opgave 8 Svar: A. Arealet af kvartcirklen er $\frac{1^2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Arealet af cirklen med radius r er $r^2\pi$. Dermed er $r^2\pi = \frac{1}{4}\pi$ og altså $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Opgave 9 Svar: D. Arealet af den midterste cirkel med radius 1 er $1^2\pi = \pi$.



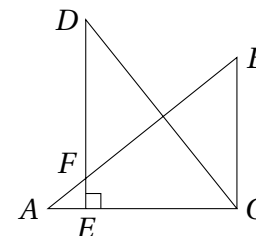
Da arealet af hver af de 12 områder er det samme, må arealet af den store cirkel være $\frac{3}{2}$ så stor som arealet af den midterste cirkel. Kald radius i den store cirkel for r . Da er $r^2\pi = \frac{3}{2}\pi$ og altså $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Opgave 10 Svar: C. På figuren tegnes en vandret linje i 2 meters højde så der dannes en trekant med grundlinje 12 og højde 8. Kald desuden skyggens længde for x .



Nu har vi to ensvinklede retvinklede trekanter, og de må have samme forhold mellem de to kateter. Derfor er $\frac{12}{8} = \frac{x}{2}$, dvs. $x = 3$. Pælen kaster altså en skygge på 3 meter.

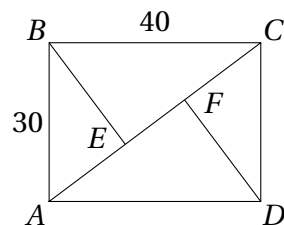
Opgave 11 Svar: C. Da trekant ABC og DCE er kongruente, er vinkel C i trekant ABC ret, $|DE| = 5$ og $|EC| = 4$. Det betyder at $|AE| = 1$.



Trekant AFE og trekant ABC er ensvinklede da de deler vinkel A og begge har en ret vinkel. Derfor er forholdet mellem kateterne i de to trekanter det samme, dvs. $\frac{|FE|}{1} = \frac{4}{5}$. Altså er $|FE| = \frac{4}{5}$ og $|DF| = |DE| - |FE| = 4\frac{1}{5}$.

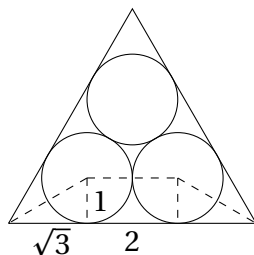
Opgave 12 Svar: 14. Trekant ABC er en retvinklet trekant, og vi kan derfor benytte Pythagoras' sætning til at bestemme hypotenusen AC .

$$|AC| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50.$$



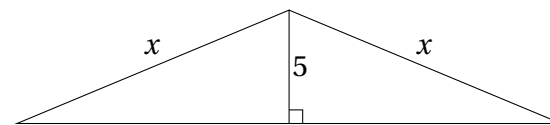
Trekantene ABC og AEB er ensvinklede da de deler vinkel A , og begge har en ret vinkel. Dermed er forholdet mellem ensliggende sider ens, dvs. forholdet mellem den mindste katete og hypotenusen er $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$. Altså er $|AE| = \frac{3}{5}|AB| = \frac{3}{5} \cdot 30 = 18$. På tilsvarende vis ses at $|CF| = 18$. Dermed er $|EF| = |AC| - |AE| - |CF| = 50 - 2 \cdot 18 = 14$.

Opgave 13 Svar: B. På figuren indtegnes linjen mellem de to nederste linjers centre. Linjen gennem centrene på to cirkler som tangerer hinanden, går altid gennem deres røringsspunkt, dvs. denne linje har længde 2 da cirklerne har radius 1.



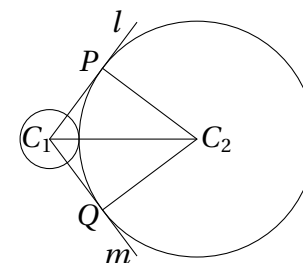
Desuden tegnes en linje fra hvert af de to centre vinkelret ned på trekantens side, og linjer fra centrene til trekantens vinkelspidser som vist på figuren, så der opstår to små kongruente retvinklede trekanter. Vinklerne i den store trekant er 60° , og når vi danner de små trekanter halverer vi disse vinkler. Derfor er de små trekanter 90° - 60° - 30° -trekanter. Altså er forholdet mellem den store katete og den lille katete $\sqrt{3}$, og sidelængden i trekanten er $\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}$.

Opgave 14 Svar: 50. Formlen for arealet af en trekant er $A = \frac{h \cdot g}{2}$, hvor g er grundlinjen, og h er højden. Da trekanten har højde $h = 5$ og areal $A = 60$, er grundlinjen $g = \frac{2 \cdot A}{h} = \frac{2 \cdot 60}{5} = 24$.



Højden deler trekanten i to retvinklede trekanter, og da trekanten er ligebejnet, deler højden grundlinjen på midten. Vi får derved to kongruente retvinklede trekanter, hvor de to kateter har længde 5 og $\frac{24}{2} = 12$. Vha. Pythagoras kan vi nu bestemme længden af de sidste to lige lange sider i trekanten: $x = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Trekantens omkreds er derfor $24 + 2 \cdot 13 = 50$.

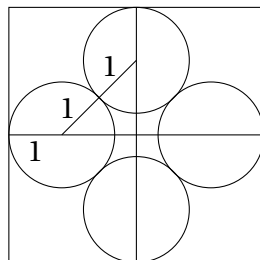
Opgave 15 Svar: 108. Linjen C_2P står vinkelret på tangenten l . Når vi tegner en linje mellem de to centre, opstår der derfor en retvinklet trekant PC_1C_2 .



I denne trekant kender vi to af sidelængderne da vi kender cirklernes radier: $|C_1C_2| = 3 + 12 = 15$ og $|C_2P| = 12$. Ifølge Pythagoras' sætning er $|PC_1| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Firkant C_1PC_2Q består derfor af to kongruente retvinklede trekanter med kateterne 9 og 12. Altså er firkantens areal $9 \cdot 12 = 108$.

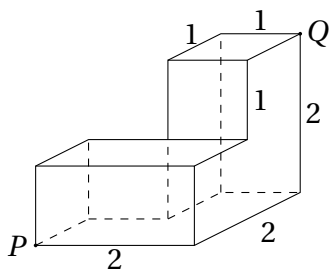


Opgave 16 Svar: C. Ved at tegne linjer som vist på figuren, gennem cirklerne centre opstår der en retvinklet trekant.

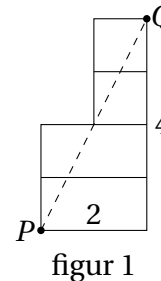


Trekanten er pga. symmetri ligebenet. Kald længden af kateten for x . Da hypotenusen har længde $1 + 1 = 2$, kan x beregnes ved Pythagoras' sætning: $x^2 + x^2 = 2^2$, og altså $x = \sqrt{2}$. Kvadratets sidelængde er altså $2(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$.

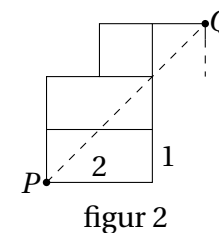
Opgave 17 Svar: A. Dette er ikke en fyldestgørende løsning, men en skitse til hvordan man bestemmer den korteste rute. For at finde den korteste rute skal man gennemgå de forskellige muligheder for at bevæge sig hen over klodsen.



Først ser vi på tilfældet hvor bilen fra P kravler hen over den lodrette 2×1 flade, derefter op på den vandrette 2×1 flade, op på den lodrette 1×1 flade, og til slut hen over den vandrette 1×1 flade til Q . For at finde den korteste rute i dette tilfælde "folder vi figuren ud" så fladerne ligger i samme plan (se figur 1). Den korteste vej mellem to punkter i en plan er en ret linje, dvs. i dette tilfælde er den korteste rute $\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.



figur 1



figur 2

Hvis vi i stedet betragter tilfældet hvor bilen kravler hen over den lodrette 2×1 flade, derefter op på den vandrette 2×1 flade, evt. op på den lodrette 1×1 flade og til slut over på den lodrette flade til Q , så bliver den udfoldede figur som vist på figur 2. I dette tilfælde er den korteste rute en ret linje fra P til Q , og den har længde $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Af de to ruter vi her har set på, er den sidste den korteste, da $\sqrt{18} < \sqrt{20}$. Ved at gå de andre muligheder igennem ses at dette er den korteste.