Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Algebra

Her præsenteres idéer til hvordan man løser algebraopgaver. Det er ikke en særlig teoretisk indføring, men der er i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man fx vurderer størrelsen af et tal, opstiller en formel, løser ligninger, opstiller ligninger og omskrive uligheder. For at blive god til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor mange har været stillet som opgaver til 1. runde.

Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningsskitser til alle opgaver bagerst.

Vurder størrelsen af et tal For at vurdere hvilket af to tal der er størst, har man ofte brug for at omskrive tallene.

Eksempel For at vurdere hvilket af følgende tal der er størst,

$$\text{A) } \tfrac{4}{3} \qquad \text{B) } \sqrt{2} \qquad \text{C) } \tfrac{16}{13} \qquad \text{D) } \tfrac{\sqrt{10}}{3}$$

sammenligninger vi først de to brøker A og C:

$$\frac{4}{3} > \frac{16}{13}, \quad \text{da} \quad 4\cdot 13 > 3\cdot 16.$$

Nu har vi udelukket C. For at sammenligne A, B og D tager vi tallene i anden da der indgår kvadratrødder i to af udtrykkene:

$$\text{A) } \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}, \quad \text{B) } (\sqrt{2})^2 = 2, \quad \text{D) } \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

Da B er størst når vi har taget tallene i anden, er det også det største blandt de oprindelige tal.

Opgave 1. Hvilket af følgende tal er mindst?

$$\text{A) } \tfrac{3}{103} \quad \text{B) } \tfrac{1}{33} \quad \text{C) } \tfrac{301}{1001} \quad \text{D) } \tfrac{3}{100} \quad \text{E) } \tfrac{30}{1003}$$

Opgave 2. Hvilket af følgende tal er størst?

$$\text{A) } \tfrac{1}{4} \qquad \text{B) } 0{,}47 \qquad \text{C) } \tfrac{4}{7} \qquad \text{D) } (\tfrac{1}{4})^2 \qquad \text{E) } \tfrac{7}{40}$$

Opgave 3. Hvilket af følgende tal er størst?

$$\text{A) } \sqrt{408} \qquad \text{B) } 20 \qquad \text{C) } \sqrt{100}+\sqrt{308} \qquad \text{D) } \tfrac{\sqrt{816}}{2} \qquad \text{E) } 2\sqrt{204}$$

Find en formel I de næste opgaver skal der opstilles en formel ud fra nogle oplysninger.

Eksempel Det tager 5 minutter at udfylde et bestemt spørgeskema på computer. Der er x personer der skal udfylde spørgeskemaet i løbet af en time. Vi vil nu opstille en formel for hvor mange computere der er brug for.

For at finde en formel for dette, bemærker vi først at der er 60 minutter på en time, og at der derfor er $\frac{60}{5} = 12$ personer pr. computer der kan udfylde spørgeskemaet i løbet af en time. Hvis x personer skal udfylde spørgeskemaet i løbet af en time, skal der altså bruges $\frac{x}{12}$ computere. Dette tal skal selvfølgelig rundes op til nærmeste hele tal da vi kun regner i hele computere.

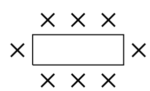
Opgave 4. I IceIceIce koster en vaffel med to kugler is 15 kroner, en vaffel med tre kugler 20 kroner, en vaffel med fire kugler 25 kroner, osv. Hvor mange kroner koster en vaffel med n kugler?

$$\text{A) } 15n+5 \quad \text{B) } 5n+10 \quad \text{C) } 5n+5 \quad \text{D) } n+15 \quad \text{E) } (n-2)\cdot 5+10$$

Opgave 5. Til en sammenkomst laver n personer hver s liter suppe. Suppen skal fyldes i store dunke der hver rummer d liter. Hvor mange dunke er der mindst brug for når hver dunk kun må fyldes halvt op?

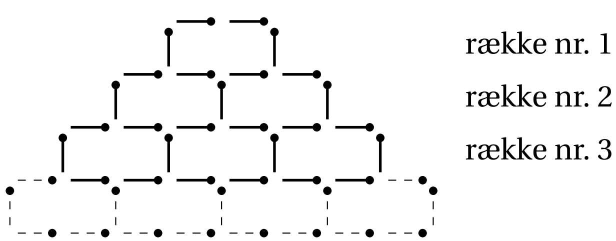
A) $\frac{2ns}{d}$ B) $\frac{\frac{1}{2}ds}{n}$ C) $\frac{2s}{dn}$ D) $\frac{nds}{2}$ E) $\frac{ns}{2d}$

Opgave 6. Til et selskab sættes n pæne 8-mandsborde af den viste type i forlængelse af hinanden. Hvor mange pladser bliver der?



A) n B) $7n+1$ C) $n(n-2)+2$ D) $6n+2$ E) $8(n-1)$

Opgave 7. Adam er i gang med at bygge en figur med mange rækker. Han er lige blevet færdig med række nr. n. Hvor mange tændstikker skal han bruge for at udbygge figuren så den består af $n+1$ rækker?



A) $n+1$ B) $n+(n+1)+2+(n+2)$ C) $3(n+2)$ D) $2n+2(n+1)$ E) $2n$

Ligninger Når man har en ligning, kan man fx undersøge om et bestemt tal er en løsning eller man kan løse ligningen. Hvis man har flere ligninger, kan man kombinere dem.

Eksempel For at undersøge om noget er en løsning til en ligning, sætter man ind i ligningen. Fx er $x = \frac{1}{2}$ ikke løsning til ligningen

$$\frac{x}{4}+\frac{8}{x}=3, \quad \text{da} \quad \frac{\frac{1}{2}}{4}+\frac{8}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}+16\neq 3.$$

Til gengæld er $x=4$ løsning til ligningen

$$\frac{x}{4}+\frac{8}{x}=3, \quad \text{da} \quad \frac{4}{4}+\frac{8}{4}=3.$$

Opgave 8. I hvilken af følgende ligninger er $x=5$ løsning?

A) $(x-1)+(x-6)=0$ B) $(x-4)^2+(x-5)^2=0$
C) $(x-3)^3+(x-7)^3=0$ D) $(x-5)^4+(x-2)^4=0$
E) $(x-1)^5+(x-5)^5=0$

Opgave 9. Ligningen

$$\frac{x}{3}+\frac{5}{x}=45x+x^2$$

har tre løsninger. En af løsningerne er:

A) $x=3$ B) $x=\frac{1}{3}$ C) $x=5$ D) $x=\frac{1}{5}$ E) $x=\frac{1}{15}$

Opgave 10. Hvis $\frac{1}{n+3}=\frac{1}{7}$, så er $\frac{1}{n^2+9}$ lig med

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{1}{14}$ C) $\frac{1}{49}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{25}$

Eksempel Når vi skal løse ligningen

$$(x+2)^2+(2x+4)^2=0,$$

udnytter vi at noget i anden ikke kan være negativt. Da summen af $(x+2)^2$ og $(2x+4)^2$ skal give nul, må de derfor begge være nul. Det betyder at både $x+2=0$ og $2x+4=0$, hvilket er sandt netop når $x=-2$. Derfor er $x=-2$ eneste løsning til ligningen.

Opgave 11. Hvor mange reelle tal x opfylder at

$$(x-3)^2+(2x-8)^2+(2x-3)^4+(x-4)^4=0\ ?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Eksempel Nu skal vi se på hvad man kan slutte ud fra nogle ligninger. Tallene a, b og c opfylder at $ab+bc=2$ og $a^2+b^2+c^2=3$. Hvad kan man heraf med sikkerhed slutte?

A) a, b og c er alle positive
B) a, b og c er alle negative
C) hvis a og c er negative, da er b negativ
D) mindst et af de tre tal er 0

Da $(a, bc)=(1,1,1)$ og $(a,b,c)=(-1,-1,-1)$ begge er løsninger til ligningssystemet, kan man ikke med sikerhed slutte hverken A, B eller D. Hvis a og c begge er negative, betyder det at $a+c$ er negativ. Da $(a+c)b=ab+bc=2$, må b også være negativ. Derfor kan man med sikkerhed slutte C.

Opgave 12. Om tre tal x, y og z vides at $xy+z=0$. Hvad kan heraf udledes?

A) alle tallene x, y og z er 0
B) $x^2y^2+z^2=0$
C) mindst et af tallene x, y og z er negativt
D) hvis tallet z er 0, er mindst et af tallene x og y også 0
E) hvis tallet x er negativt, er mindst et af tallene y og z positivt

Opgave 13. Tallene x, y, z og w opfylder $x+2y=3z+w$ og $z+2w=3x+y$. Hvilket af følgende udsagn er ikke nødvendigvis korrekt?

A) $y+w=2(z+x)$ B) $x-3z=w-2y$ C) $4x+3y=4z+3w$
D) $z+2w=3(3z+w-2y)+y$ E) $z+3x=y+2w$

Opstil ligninger Hvis man skal bestemme nogle størrelser ud fra nogle oplysninger, er det ofte en god idé at indføre passende variable, opstille ligninger med de variable og løse ligningerne.

Eksempel Emma samler på ispinde, ølkapsler og klistermærker. Når hun skal regne ud hvor meget hendes samling er værd, plejer hun at regne med at 4 ispinde svarer til 7 ølkapsler, og at 10 klistermærker svarer til 3 ølkapsler. Hvor mange klistermærker går der på 6 ispinde?

For at svare på dette indfører vi først variable: Kald værdien af en ispind for i, værdien af en ølkapsel for o og værdien af et klistermærke for k. Vi ved at $4i=7o$ og $10k=3o$, og altså er $i=\frac{7}{4}o$ og $o=\frac{10}{3}k$. Dermed er

$$6i=6\cdot\frac{7}{4}o=\frac{21}{2}o=\frac{21}{2}\cdot\frac{10}{3}k=\frac{21\cdot 10}{2\cdot 3}k=35k.$$

Seks ispinde svarer derfor til 35 klistermærker.

Man man også være lidt smart og direkte se at 12 ispinde svarer til 21 ølkapsler som svarer til 70 klistermærker, og altså at 6 ispinde svarer til 35 klistermærker.

Opgave 14. I gården står der tohjulede cykler, trehjulede cykler og firehjulede barnevogne. Der er dobbelt så mange barnevogne som der er trehjulede cykler, og der er tre gange så mange tohjulede cykler som der er barnevogne. I alt er der 184 hjul. Hvor mange trehjulede cykler er der?

Opgave 15. Anna mangler kun at afslutte to fag for at være færdig med sin uddannelse. Hvis hun får 12 i dem begge, bliver gennemsnittet af hendes karakterer nøjagtig 8. Hvis hun får 02 i begge fag, bliver det nøjagtig 7. Hvor mange fag består uddannelsen af?

Opgave 16. Ved et valg i to runder med kandidaterne P1, P2 og P3 går kun P1 og P2 videre til anden runde. I første runde fik P3 25% af stemmerne. Hans vælgere forventes i anden runde at fordele sig med 20% til P1 og 80% til P2, og P2 forventes hermed at opnå i alt 55% af stemmerne i anden runde. Hvor mange procent af stemmerne fik P1 i første runde?

Uligheder

Nu skal vi se på hvordan man kan omskrive uligheder. Dette afsnit er markant sværere end de andre.

Eksempel Tallene a og b ligger begge mellem 0 og 1, dvs. $0 < a < 1$ og $0 < b < 1$. Hvilket af følgende tal har ikke nødvendigvis denne egenskab?

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}$ D) $\frac{ab}{a+b}$

A) Da $0 < a < 1$ og $0 < b < 1$, vil $0 < a + b < 2$, og altså $0 < \frac{a+b}{2} < 1$.

B) Da $0 < a < 1$ og $0 < b < 1$, vil $0 < ab < 1$, og altså $0 < \sqrt{ab} < 1$.

D) Når uligheden $0 < b < 1$ ganges igennem med b, fås $0 < ab < a$. Derfor kan vi konkludere at $\frac{ab}{a+b} < \frac{a}{a+b}$. Denne brøk må være mindre end 1 da nævneren er større end tælleren. Da både tæller og nævner i den oprindelige brøk er positive, må den være større end 0. Altså ligger den mellem 0 og 1.

C) Tallet $\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}$ ligger derimod ikke altid mellem 0 og 1. Hvis fx $a = b = \frac{1}{2}$, er $\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Opgave 17. Hvad kan man slutte af oplysningerne $a < b + c$ og $b < a + c$?

A) $c = 0$ B) $a = b$ C) $a + b < a + b + c$ D) $c < 0$ E) $\frac{a+b}{2} < c$

Opgave 18. Lad a være et tal så $0 < a < 1$. Hvilket af følgende udsagn er sandt?

A) $a > \sqrt{a}$ B) $\frac{1}{a} > a$ C) $a > \frac{1}{\sqrt{a}}$
D) $a^3 > 1$ E) $a^2 > a$

Opgave 19. Bestem det mindste hele tal n så

$$x^{10} - 1001x^7 + 1 > 0$$

for alle $x \geq n$.

Opgave 20. Et positivt helt tal n opfylder at der findes præcis ét positivt helt tal k så

$$54n < 55k < 56n \quad .$$

Hvad er den størst mulige værdi af n?

Løsningsskitser

Opgave 1 Svar: A). Der gælder at $A < E < D < B < C$ da

$$\frac{30}{1030} < \frac{30}{1003} < \frac{30}{1000} < \frac{30}{990} < \frac{301}{1001}.$$

Opgave 2 Svar: C). Da $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, mens alle de andre tal er mindre end $\frac{1}{2}$, er $\frac{4}{7}$ det største af tallene.

Opgave 3 Svar: E). Først omskrives B, D og E til en kvadratrod:

$$\text{B)}\quad 20 = \sqrt{400}$$

$$\text{D)}\quad \frac{\sqrt{816}}{2} = \frac{\sqrt{816}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{816}{4}} = \sqrt{204}$$

$$\text{E)}\quad 2\sqrt{204} = \sqrt{4}\sqrt{204} = \sqrt{4 \cdot 204} = \sqrt{816}.$$

Nu er A) $\sqrt{408}$, B) $\sqrt{400}$, D) $\sqrt{204}$ og E) $\sqrt{816}$, og det er klart at E er størst blandt disse.

Nu vurderer vi hvilket af E og C der er størst:

$$\text{C)}\quad \sqrt{100} + \sqrt{308} = 10 + \sqrt{308} < 10 + 18 = 28, \text{ da } 308 < 18^2 = 324$$

$$\text{E)}\quad \sqrt{816} > 28, \text{ da } 816 > 28^2 = 784.$$

Altså er E størst.

Opgave 4 Svar: C). Læg mærke til at prisen stiger 5 kroner for hver ekstra kugle. Derfor koster det 5 kroner pr. kugle. Desuden koster vaflen 5 kroner, da en vaffel med to kugler koster 15 kroner, en med tre kugler 20 kroner, osv. En vaffel med n kugler koster derfor $5n+5$ kroner.

Opgave 5 Svar: A). Da n personer hver laver s liter suppe, er der i alt ns liter suppe. I hver dunk må der fyldes $\frac{d}{2}$ liter suppe. Derfor skal der mindst bruges $\frac{ns}{\frac{d}{2}} = \frac{2ns}{d}$ dunke.

Opgave 6 Svar: D). Langs siderne af hvert bord sidder der 6 personer, dvs. at der sidder $6n$ personer langs siderne af n borde. Desuden sidder der en person for hver bordende af det lange bord, dvs. 2 ekstra personer. Når n borde sættes i forlængelse af hinanden, er der derfor plads til $6n+2$ personer.

Opgave 7 Svar: C). Når man skal udbygge figuren så den består af $n+1$ rækker, skal man bruge 2 tændstikker mere til overkanten af række $n+1$. Desuden skal man bruge $n+2$ tændstikker lodret og $2(n+1)$ tændstikker vandret. Samlet skal man bruge

$$2 + (n+2) + 2(n+1) = 3(n+2).$$

Opgave 8 Svar: C). Ved at indsætte $x = 5$ i de fem ligninger kan vi se at $x = 5$ kun er løsning til C.

A) $(5-1)+(5-6) = 3 \neq 0$

B) $(5-4)^2 + (5-5)^2 = 1 \neq 0$

C) $(5-3)^3 + (5-7)^3 = 2^3 + (-2)^3 = 0$

D) $(5-5)^4 + (5-2)^4 = 3^4 \neq 0$

E) $(5-1)^5 + (5-5)^5 = 4^5 \neq 0$

Opgave 9 Svar: B). Ved at indsætte de fem muligheder i ligningen ses at kun $x = \frac{1}{3}$ er løsning. Her vises kun udregningerne for $x = \frac{1}{3}$. Vi udregner først ventresiden og derefter højresiden:

$$\frac{x}{3} + \frac{5}{x} = \frac{\frac{1}{3}}{3} + \frac{5}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} + 15 \quad \text{og} \quad 45x + x^2 = 45 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 15 + \frac{1}{9}.$$

Opgave 10 Svar: E). Først løses ligningen $\frac{1}{n+3} = \frac{1}{7}$:

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow n+3 = 7 \Leftrightarrow n = 4.$$

Altså er $\frac{1}{n^2+9} = \frac{1}{4^2+9} = \frac{1}{25}$.

Opgave 11 Svar: A). Bemærk først at ingen af de fire led i

$$(x-3)^2+(2x-8)^2+(2x-3)^4+(x-4)^4$$

kan være negative. Da deres sum skal være lig 0, skal de alle være lig 0. Altså skal $x-3=0$, $2x-8=0$, $2x-3=0$ og $x-4=0$ på samme tid, men det er der ingen x der opfylder. Derfor har ligningen ingen løsninger.

Opgave 12 Svar: D). Hvis $z = 0$, er $xy = 0$. Ifølge nulreglen betyder det at mindst et af tallene er 0. Derfor kan vi udlede D. Da $(x, y, z) = (0,0,0)$ og $(x, y, z) = (-1,-1,-1)$ begge løser ligningen, kan vi udelukke A, B, C og E.

Opgave 13 Svar: E).

A) $y + w = 2(z + x)$ fås ved at lægge de to ligninger sammen.

B) $x-3z = w-2y$ fås ved at omskrive $x+2y = 3z + w$.

C) $4x + 3y = 4z + 3w$ fås ved at lægge de to ligninger sammen: venstresiden i den første med højresiden i den anden og omvendt.

D) $z+2w = 3(3z+w-2y)+y$ fås ved at isolere x i $x+2y = 3z+w$ og indsætte dette i $z+2w = 3x + y$.

E) $z+3x = y+2w$ er ikke altid korrekt da fx løsningen $(x, y, z, w) = (-1,3,2,-1)$ ikke opfylder denne ligning.

Opgave 14 Svar: 8. Kald antallet af trehjulede cykler for x. Altså er der $2x$ barnevogne og $3\cdot 2x = 6x$ tohjulede cykler. I alt er der derfor

$$184 = 3\cdot x + 4\cdot 2x + 2\cdot 6x = 23x$$

hjul. Dette giver at $x = \frac{184}{23} = 8$ og altså 8 trehjulede cykler.

Opgave 15 Svar: 20. Kald antallet af fag for n. Da hendes gennemsnittet bliver nøjagtigt 8, hvis hun får 12 i de to sidste fag, må summen af karakterne af de fag hun allerede har afsluttet, være

$$8n-2\cdot 12 = 8n-24.$$

Da hendes gennemsnittet bliver nøjagtigt 7, hvis hun får 02 i de to sidste fag, må summen af karakterne af de fag hun allerede har afsluttet, også kunne skrives som

$$7n-2\cdot 2 = 7n-4.$$

Altså er

$$8n-24 = 7n-4,$$

og derfor $n = 20$. Uddannelsen består altså af 20 fag.

Opgave 16 Svar: 40. Lad $x\%$ være andelen af stemmer som P2 fik i første runde. I første runde fik P3 25% af stemmerne, og da hans vælgere forventes i anden runde at fordele sig med 20% til P1 og 80% til P2, må P2 forventes at få $x\%+0{,}8\cdot 25\% = x\%+20\%$ i anden runde. Da vi yderligere ved at P2 faktisk forventes at opnå i alt 55% af stemmerne i anden runde, kan vi opstille ligningen:

$$x\%+20\% = 55\%.$$

Altså er $x = 55-20 = 35$. I første runde fik P1 derfor

$$100\%-25\%-35\% = 40\%$$

af stemmerne.

Opgave 17 Svar: C). Ved at lægge ulighederne sammen fås

$$a+b < a+b+2c.$$

Dermed er $0 < 2c$, og altså $0 < c$. Derfor kan vi slutte at C)

$$a+b < a+b+c.$$

Da fx $(a, b, c) = (10,11,2)$ opfylder begge uligheder, kan man ikke slutte hverken A, B, D eller E.

Opgave 18 Svar: B). Hvis $0 < a < 1$, er $a^2 < 1$. Da a er positiv, kan vi dividere begge sider med a og få $a < \frac{1}{a}$. Derfor er B) sand. De andre udsagn er ikke sande for noget a i intervallet, fx ikke for $a = \frac{1}{4}$:

A) $a > \sqrt{a}$ er ikke sand da $\frac{1}{4} < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

C) $a > \frac{1}{\sqrt{a}}$ er ikke sand da $\frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$.

D) $a^3 > 1$ er ikke sand da $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} < 1$.

E) $a^2 > a$ er ikke sand da $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$.

Alle andre udsagn end B) kan i virkeligheden omskrives til $a^x > 1$ for et positivt tal x, og det er ikke sandt når $0 < a < 1$.

Opgave 19 Svar: 11. Omskriv først uligheden:

$$x^7(x^3 - 1001) + 1 > 0.$$

Nu ses at venstresiden er negativ hvis $1 \leq x \leq 10$, mens den er positiv hvis $x \geq 11$, da $10^3 < 1001 < 11^3$. Derfor er $n = 11$ det mindste hele tal så uligheden gælder for alle $x \geq n$.

Opgave 20 Svar: 55. Omskriv først uligheden ved at dividere med 55:

$$\frac{54}{55}n < k < \frac{56}{55}n.$$

Hvis $n = 55$, bliver uligheden $54 < k < 56$, og der findes præcis et helt positivt tal k der opfylder dette. Hvis $n \geq 56$, så er

$$\frac{54}{55}n < n < \frac{56}{55}n,$$

og

$$\frac{54}{55}n < n + 1 < n + \frac{1}{55}n = \frac{56}{55}n.$$

I dette tilfælde opfylder både $k = n$ og $k = n + 1$ uligheden, og der findes derfor mindst to hele positive tal k som opfylder uligheden.