Tip til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Kombinatorik

Kombinatorik handler bl.a. om at tælle hvor mange kombinationer der er af noget, men emnet dækker også opgaver hvor man skal tænke i logiske systemer som fx at inddele i lige og ulige tilfælde, benytte skuffeprincippet eller overveje hvem der kan vinde et deterministisk spil.

Her præsenteres idéer til hvordan man løser kombinatorikopgaver til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. Det er en forudsætning for at arbejde med disse tip til 2. runde at du allerede har arbejdet med *Kombinatorik - Tip til 1. runde*.

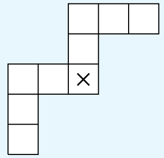
For at blive god til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste ligesom til 1. runde at løse mange øvelser og opgaver, og derfor er der også en masse øvelser der træner teori, og mere udfordrende opgaver. Mange af opgaverne har været stillet som opgaver til 2. runde.

Til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er der fem opgaver som skal løses på fire timer. De er alle svære fordi man skal være kreativ og kombinere ting man ikke plejer, og så er det desuden en udfordring at skrive en god besvarelse hvor man argumenterer korrekt matematisk. Der er løsninger til alle opgaver bagerst så du kan se hvordan en fuldstændig besvarelse kan se ud, men læs dem først når du selv har arbejdet længe med en opgave.

1 Vær systematisk!

Eksempel Vi starter med at se på en opgave fra Georg Mohr-Konkurrencen 2004

Cifrene fra 1 til 9 er placeret i den viste figur med ét ciffer i hvert kvadrat. Summen af tre tal placeret i samme vandrette eller lodrette linje er 13. Vis at det eneste tal der kan stå på den markerede plads, er 4.



Idéen er her at lægge mærke til at hvis vi lægger cifrene i hver af de to lodrette søjler og cifrene i hver af de to vandrette rækker sammen, så er der tre cifre der indgår to gange, nemlig dem der både er i en række og en søjle. De tre cifre kalder vi a, b og c.

Hvis cifrene fra 1 til 9 er placeret så hver søjle- og rækkesum er 13, så må summen af cifrene i hver af de to søjler og summen af cifrene i hver af de to rækker tilsammen være $4 \cdot 13 = 52$. I denne sum indgår alle cifrene fra 1 til 9 en gang, og cifrene vi kalder a, b og c endnu engang. Altså er

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+a+b+c=52,$$

dvs. $a+b+c=7$.

De eneste tre cifre med sum 7 er cifrene 1, 2 og 4. Derfor må a, b og c være 1, 2 og 4. Hvis 1 eller 2 er placeret på det markerede felt, vil cifrene 1 og 2 indgå i samme række eller samme søjle, dvs. de skal sammen med endnu et ciffer have sum 13, men det er umuligt. Altså må der stå 4 i det markerede felt.

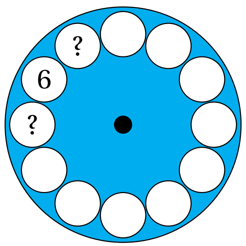
Eksemplet viser hvordan man kan indføre nogle få variable og derefter systematisk bruge den viden man har. Når man indfører variable, er det altid vigtigt at indføre så få som muligt, fx er det ikke en god idé at indføre en variabel for hver af tallene i de ni felter på figuren i eksemplet. I flere opgaver behøver man slet ikke indføre variable, men kan blot argumentere systematisk.

Nu er du klar til selv at arbejde systematisk med øvelser og opgaver:

Øvelse 1.1. I et magisk kvadrat med ni felter skal tallene fra 1 til 9 indsættes så der er et tal i hvert felt, og så summen af tallene i alle rækker, søjler og diagonaler er den samme. Georg har allerede indsat tallene 2 og 5 som vist på figuren. På hvor mange måder kan han indsætte de sidste syv tal?

		2
	5	

Øvelse 1.2. På en legetøjskarrusel er der 12 væddeløbsheste i en cirkel. Hestene er nummeret $1, 2, 3, \ldots, 12$, og numrene på to heste der står ved siden af hinanden, har en forskel på 2 eller 3. Hvilke numre heste står hest nummer 6 ved siden af? (Georgs julekalender)



Legetøjskarrusel fra julemandens værksted

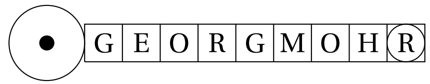
Opgave 1.1. Danmark har spillet en fodboldlandskamp mod Georgien. Kampen sluttede 5-5, og mellem første og sidste mål har kampen på intet tidspunkt stået lige. Intet land har scoret tre mål i træk, og Danmark scorede det sjette mål. Kan man ud fra disse oplysninger afgøre hvilket land der scorede det femte mål? (Georg Mohr-Konkurrencen 2008)

Opgave 1.2. Georg skriver tallene fra 1 til 15 på hvert sit stykke papir. Han forsøger at lægge papirerne i to bunker så ingen af bunkerne indeholder to tal hvis sum er et kvadrattal. Bevis at det ikke kan lade sig gøre. (Kvadrattallene er tallene $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ osv.). (Georg Mohr-Konkurrencen 2011)

Opgave 1.3. De viste ni bolde skal anbringes i nummerrækkefølge (med nummer 1 længst til venstre) ved hjælp af så få operationer som muligt. Hver operation består i at tage en bold og flytte den hen til højre for alle de andre. Hvad er det mindste antal operationer man kan nøjes med?

4 7 5 1 6 2 9 3 8

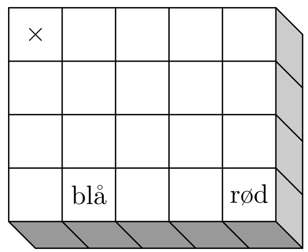
Opgave 1.4. Til GEORG MOHR-spillet bruges en spillebrik, en GEORG MOHR-terning (dvs. en terning, hvis seks sider viser bogstaverne G, E, O, R, M og H) samt en spilleplade:



startfelt med brik slutfelt

Ved hvert slag rykker man frem til førstkommende felt med det bogstav terningen viser; hvis det ikke er muligt at rykke frem, bliver man stående. Peter spiller GEORG MOHR-spillet. Bestem sandsynligheden for at han gennemfører spillet i to slag. (Georg Mohr-Konkurrencen 2001)

Opgave 1.5. Tyve terninger er farvet på følgende måde: Der er to røde sider modsat hinanden, to blå sider modsat hinanden og to grønne sider modsat hinanden. Terningerne er limet sammen som vist på figuren. To sideflader der er limet sammen, har altid samme farve. På figuren er oplyst farven på nogle af sidefladerne.



Hvilke muligheder er der for farven af sidefladen markeret med symbolet × ? (Georg Mohr-Konkurrencen 2016)

2 Kombinationer

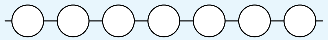
I dette kapitel ser vi på nogle grundlæggende sætninger i kombinatorik som er fundamentet for at tælle antallet af kombinationer af noget. De står også i mange grundbøger i gymnasiet, men vi tager dem alligevel med her. Kapitlet træner grundlæggende kombinatorik, og der er derfor stort set kun øvelser i dette kapitel, men det er et vigtigt fundament for mere komplicerede kombinatorikopgaver.

Multiplikationsprincippet

Hvis man for at vælge noget først har n valgmuligheder, og derefter for hvert af disse yderligere har m valgmuligheder, så har man samlet $n \cdot m$ valgmuligheder. Man ganger altså antallet af valgmuligheder sammen. Det samme princip gælder hvis man har flere end to delvalg.

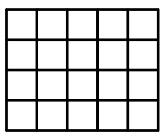
Dette princip kaldes for multiplikationsprincippet.

Eksempel Syv perler sættes på en snor sådan at to perler ved siden af hinanden ikke har samme farve. Vi har tre forskellige farver perler og ønsker at undersøge på hver mange måder vi kan vælge perlerne.



Vi har 3 muligheder for at vælge farve til den første perle. Derefter har vi kun 2 muligheder for at vælge farve til hver af de følgende perler, da de ikke må have samme farve som den vi netop har valgt. Derfor er der i følge multiplikationsprincippet $3 \cdot 2^6 = 192$ måder at vælge perlerne på.

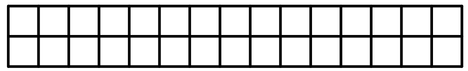
Øvelse 2.1. I det viste gulv med 20 fliser kan man for hver flise vælge mellem to forskellige fliser, men alle fliserne i kanten af gulvet skal være ens.



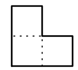
På hvor mange måder kan man vælge fliser til gulvet?

Øvelse 2.2. Hvor mange 4-bogstavs ord kan man lave af bogstaverne G, E O, R når de skal have skiftevis en vokal og en konsonant?

Øvelse 2.3. Et 2×15-bræt skal udfyldes med ti L-brikker der ikke overlapper hinanden. På hvor mange måder kan man gøre dette?



2×15-bræt

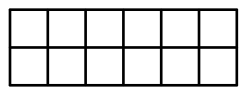


L-brik

Eksempel fortsat Når vi ser på perlerne fra før, så kan vi gøre spørgsmålet sværere ved at betragte to snore som ens, hvis den ene blot er en spejling af den anden. Alle kombinationer der er symmetriske om midten er da talt med en gang i ovenstående udregning, mens alle andre kombinationer er talt med to gange. Derfor regner vi ud hvor mange kombinationer der er symmetriske om midten. Når vi har valgt de første fire perler, så er resten givet, dvs. vi har $3 \cdot 2^3 = 24$ kombinationer der er symmetriske om midten. Når vi trækker dem fra det tal vi fik før, får vi $192 - 24 = 168$, og her er alle ikke symmetriske kombinationer tal med to gange, dvs. dem er der $\frac{168}{2} = 84$ af. Der er altså i alt $24 + 84 = 108$ forskellige kombinationer når to der er hinandens spejlbilleder, regnes som ens.

Øvelse 2.4. En stang består af 5 kuber der er sat sammen en efter en. Georg har 4 forskellige farver kuber at vælge imellem når han skal bygge sin stang. Han beslutter at to nabokuber ikke må have samme farve. På hvor mange måder kan Georg bygge sin stang? Her regnes to stænger som ens hvis den ene kan vendes så den svarer til den anden.

Øvelse 2.5. I Emils malebog er der et maleri med 12 felter som vist, og hver felt skal farves i en af fire farver så to felter med fælles side ikke har samme farve.



Hvor mange forskellige malerier kan man Emil male?

Rækkefølge

Man kan stille n elementer i rækkefølge på $n!$ måder, hvor

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1\,.$$

Bemærk at $n!$ udtales "n fakultet".

Bevis Når man skal stille n elementer i rækkefølge, så kan man vælge det første element på n måder, derefter det andet element på $n-1$ måder, osv. Dermed kan man ifølge multiplikationsprincippet stille n elementer i rækkefølge på $n!$ måder.

Øvelse 2.6. Georg har 7 klodser i 7 forskellige farver. Han vil bygge et tårn af fire af dem, sådan at han starter med en klods, derefter sætter næste klods ovenpå, osv. På hvor mange måder kan han bygge tårnet?

Øvelse 2.7. Georg har tre forskellige stykker lys chokolade og tre forskellige stykker mørk chokolade. Han beslutter sig for at han vil spise stykkerne så han spiser skiftevis mørk og lys chokolade. På hvor mange måder kan han gøre det?

Vælg r ud af n

Man kan vælge 2 elementer ud af n på $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2!}$ måder.

Man kan vælge 3 elementer ud af n på $\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}$ måder.

Generelt kan man vælge r elementer ud af n på $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ måder.

Bevis Hvis vi skal vælge 2 ud af n, har vi først n muligheder for at vælge det første element, og derefter $n-1$ muligheder for at vælge andet element, dvs. vi kan vælge dem på $n\cdot(n-1)$ måder ifølge multiplikationsprincippet. Men når vi vælger en ad gangen, så vælger vi dem i rækkefølge, dvs. vi har talt hver kombination med 2 gange, da 2 elementer kan stilles i rækkefølge på 2! måder. Derfor er der

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2!}$$

måder hvorpå man kan vælge 2 ud af n.

Hvis vi skal vælge 3 ud af n, har vi først n muligheder for at vælge det første element, og derefter $n-1$ muligheder for at vælge andet element, derefter $n-2$ muligheder for at vælge det tredje element, dvs. vi kan vælge dem på $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ måder ifølge multiplikationsprincippet. Men når vi vælger en ad gangen, så vælger vi dem i rækkefølge, dvs. vi har talt hver kombination med 3! gange, da 3 elementer kan stilles i rækkefølge på 3! måder. Derfor er der

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}$$

måder hvorpå man kan vælge 3 ud af n.

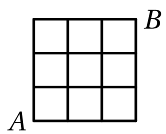
Vi viser ikke det generelle tilfælde her, men beviset findes i mange lærebøger.

Øvelse 2.8. I en boghandel er der 200 bøger på tilbud til 50 kr. stykket, men du har kun råd til at købe to. På hvor mange måder kan du vælge de to bøger?

Øvelse 2.9. Der er 200 forskellige klodser i en æske, og du skal vælge 198 af dem. På hvor mange måder kan du gøre det?

Øvelse 2.10. Georg har 3 ens chokoladefrøer og 3 ens chokoladekugler. I hvor mange forskellige rækkefølger kan han spise dem? (Husk at både frøerne og kuglerne er ens, dvs. det er ligemeget hvilken frø man spiser, når man spiser en frø).

Øvelse 2.11. På kortet ses en park med fire veje nord-syd og fire veje øst-vest



Georg vil fra A til B hurtigst muligt ved at gå på vejene. Hvor mange forskellige ruter kan han vælge imellem?

Vis at der er lige mange uden at tælle Hvis man skal vise at der er lige mange af to forskellige ting, så kan man i stedet for at tælle hvor mange der er af hver, parre dem to og to da dette viser at der er lige mange.

Georg slår med en 6-sidet terning, en 12-sidet terning og en 20-sidet terning. Vi ønsker at vise at der er lige så mange slag med øjensum højst 20 som med øjensum mindst 21. Det er rigtig besværligt at begynde at tælle hvor mange der er af hver, så derfor parrer vi i stedet hvert slag med øjensum højst 20 med et unikt slag med øjensum med mindst 21, sådan at ethvert slag er i netop et par.

Først laver vi en parring af siderne i hver terning. I en terning med n sider kan siderne parres to og to så de tilsammen har $n+1$ øjne. Hvis vi betragter et slag med a, b, c øjne på de tre terninger, så parrer vi det med slaget hvor hver terning i stedet lander på den side hver af disse sider er parret med. På den måde har vi en klar parring af alle slag så hvert slag har en unik makker. Slaget a, b, c har øjensummen $a+b+c$, mens dets makker har øjensummen

$$(7-a)+(13-b)+(21-c)=41-(a+b+c).$$

Dermed er det klart at der i hvert par er et slag med en øjensum på højst 20 og et slag med en øjensum på mindst 21. Altså er der lige mange af hver.

Opgave 2.1. Georg skriver ord udelukkende med bogstaverne G, E, O og R. Han laver en meget lang liste med alle ord der består af 27 bogstaver. Hvor mange af disse ord har flere vokaler end konsonanter?

Opgave 2.2. Af tallene $1, 2, 3, \ldots, 2006$ skal udtages 10 forskellige. Vis at man kan udtage 10 forskellige tal med sum større end 10039 på flere måder end man kan udtage 10 forskellige tal med sum mindre end 10030.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

3 Skuffeprincippet

Skuffeprincippet siger noget de fleste finder helt oplagt:

Skuffeprincippet Hvis man har n skuffer og mere end n bolde som puttes i skufferne, så findes der mindst en skuffe med mere end en bold.

Princippet kan være godt at have i baghovedet når man skal vise at der findes et eller andet, og ofte er udfordringen at gennemskue hvad der skal være skuffer, og hvad der skal være bolde.

Inden du selv bliver kastet ud i at bruge det, kommer er par eksempler.

Eksempel I en børnehave skal 22 børn hver vælge to klodser i forskellige farver, og der er i alt syv forskellige farver klodser at vælge imellem. Kan børnene vælge klodser så der ikke findes to børn der vælger klodser i de samme farver?

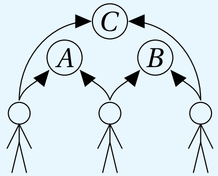
Her kan man bruge skuffeprincippet. Skufferne skal her repræsentere mulighederne for farvevalg, og vi putter hvert barn ned i skuffen der repræsenterer dets farvevalg. Derfor regner vi først ud hvor mange skuffer der er, dvs. på hvor mange måder man kan vælge to farver ud af syv. Det kan man på $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ måder. Da der er 22 børn, men kun 21 farvevalg, må der altså ifølge skuffeprincippet være mindst to børn med samme farvevalg.

Eksempel På Gammelkøbing skole går der 20 elever, og to vilkårlige elever har en fælles bedstefar. Vis at der findes en mand som er bedstefar til mindst 14 elever på skolen.

For at løse opgaven kan vi igen bruge skuffeprincippet, men i en lidt udvidet form. Hver elev har to bedstefædre, og det vil være oplagt at lade bedstefædrene være skuffer og putte hver elev ned i de to skuffer som repræsenterer elevens bedstefædre. Problemet er at vi ikke ved hvor mange bedstefædre der er. Det undersøger vi derfor først:

Betragt en elev som har bedstefædrene A og B. Hvis alle andre har A som bedstefar, er det ønskede vist. Det samme gælder for B. Antag derfor at hverken A eller B er bedstefar til alle 20 børn på skolen. Da findes et barn som ikke har A som bedstefar, og dermed må han have B som bedstefar og endnu en bedstefar som vi kalder for C.

Desuden findes et barn som ikke har B som bedstefar, men da barnet har en fælles bedstefar både med barnet med bedstefædrene B og C, og med barnet med bedstefæderene A og B, må barnet have bedstefædrene A og C. Da hver af de øvrige børn skal have en bedstefar tilfælles med hvert af disse tre børn, har de alle to bedstefædre blandt bedstefædrene A, B og C.



Nu kan vi bruge skuffeprincippet i en udvidet form. Der er 3 skuffer i form af de 3 bedste fædre. De 20 elever har hver 2 bedstefædre, dvs. de puttes hver i 2 skuffer. Da $40 > 3 \cdot 13$, må enten A, B eller C ifølge skuffeprincippet være bedstefar til mindst 14 elever på skolen.

Den udvidede form af skuffeprincippet vi benytter her, siger at hvis man har n skuffer og mere end $n \cdot m$ bolde som puttes i skufferne, så findes mindst en skuffe med mere end m bolde.

Opgave 3.1. Der er n personer i en facebookgruppe. Vis at der findes mindst to af de n personer som har samme antal facebookvenner i gruppen.

Opgave 3.2. Ti venner sender hinanden julekort så hver sender fem julekort til fem forskellige venner. Vis at der findes et par af venner som har sendt hinanden et julekort.

Opgave 3.3. Vis at hvis et 2×2 kvadrat indeholder 10 punkter, da vil der findes to punkter med afstand mindre end en.

Opgave 3.4. Om et kæmpe rundt bord som kan drejes, sidder der 100 personer. Alle har bestilt forskellig forret. Da de trætte tjenere har placeret en forret foran hver person, er der ingen der har den rigtige forret på deres plads. Vis at bordet kan drejes så mindst to personer har den rigtige forret på deres plads.

4 Lige og ulige

Eksempel I en skakturnering deltager 2019 personer. Vi ønsker at vise at der er et lige antal personer der har spillet et ulige antal kampe.

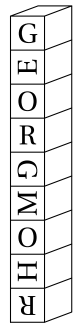
Lad s_i betegne det antal kampe spiller nummer i har spillet, hvor de 2019 spillere nummereres $1, 2, 3, \ldots, 2019$. Summen

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_{2019}$$

må være lige da hvert spil er talt med præcis to gange fordi hvert spil er mellem to personer. Når summen af nogle hele tal er lige, er der et lige antal ulige tal blandt summanderne, dvs. at der er et lige antal personer der har spillet et ulige antal kampe.

Bemærk at tallet 2019 ikke spiller nogen væsentlig rolle her.

Opgave 4.1. En GEORG MOHR-terning er en terning på hvis seks sideflader der er trykt henholdsvis G, E, O, R, M og H. Peter har ni helt ens GEORG MOHR-terninger. Kan det lade sig gøre at stable dem oven på hinanden til et tårn der på hver af de fire sider i en eller anden rækkefølge viser bogstaverne G E O R G M O H R?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2000)



Opgave 4.2. Et spil spilles af tre personer på et bræt med 21 felter på en række. Spiller A starter på felt nummer 1, spiller B på felt 11 og spiller C på felt 21.

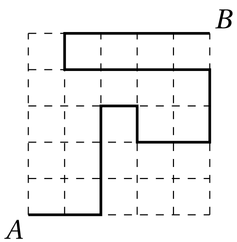
A										B										C

I hvert træk må en spiller rykke 1 eller 3 felter til højre eller venstre. Hvis de slutter på et felt hvor der står en anden spiller, dør denne spiller. Den spiller der er tilbage når to spillere er døde, vinder. De skiftes til at trække, A starter, derefter B, osv. Afgør hvilken spiller der kan vinde spillet, uanset hvordan de andre spillere spiller.

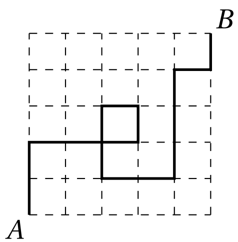
Opgave 4.3. Kan 29 drenge og 31 piger stilles op på række med hinanden i hånden så ingen holder to piger i hånden? (Georg Mohr-Konkurrencen 2010)

Opgave 4.4. I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differencen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er en seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1992)

Opgave 4.5. Forestil dig et kvadratisk skema der består af $n \times n$ felter med kantlængde 1, hvor n er et vilkårligt positivt helt tal. Hvad er den størst mulige længde af en rute du kan følge langs felternes kanter fra punktet A i nederste venstre hjørne til punktet B i øverste højre hjørne hvis du aldrig må vende tilbage til et punkt hvor du har været før? (Figuren viser for $n = 5$ et eksempel på en tilladt rute og et eksempel på en ikke tilladt rute).
(Georg Mohr-Konkurrencen 2009)



Tilladt rute



Ikke tilladt rute

5 Spilstrategier

I opgaver med spil skal man ofte undersøge hvilken spiller der har en vindende strategi, dvs. hvilken spiller der kan vinde uanset hvordan modparten spiller.

Først skal du selv arbejde med nogle forholdsvis overskuelige spil.

Opgave 5.1. Figuren viser en spilleplade med 16 felter. Til at starte med står to biler på hver sit felt. To spillere A og B skiftes til at trække, og A starter. I hvert træk vælger en spiller én af bilerne og flytter den ét eller flere felter til højre. Dog må den bagerste bil aldrig overhale den forreste eller nå op på siden af den. Den første spiller som ikke kan trække, har tabt.

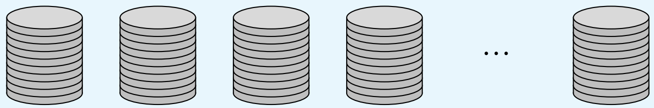
a) Bevis at A kan vinde uanset hvordan B trækker, hvis de to biler starter som vist på figuren.

b) Bestem samtlige startpositioner for de to biler hvor B kan vinde uanset hvordan A trækker. (Georg Mohr-Konkurrencen 2013)

Opgave 5.2. På en tavle står skrevet 2018 1-taller adskilt af mellemrum. Georg og hans mor spiller et spil hvor de skiftes til at skrive enten + eller · i et af mellemrummene imellem 1-tallerne. Georg starter, og spillet slutter når alle mellemrum er udfyldt. Georg vinder hvis resultatet af regnestykket er lige, og hans mor vinder hvis det er ulige. Hvem kan lægge en strategi der sikrer ham/hende sejren? (Georg Mohr-Konkurrencen 2018)

Nogle spil er meget mere komplicerede end de to foregående, og her kan det være stort set umuligt at overskue samtlige situationer. Derfor bygger den spiller der har en vindende strategi, ofte sin strategi på hvad modparten gør, sådan at strategien indeholder et modtræk til hvert af modpartens træk.

Eksempel Georg og hans mor spiller et spil hvor der til at starte med er n bunker med lige mange mønter i hver. De har tur på skift, og i hver tur må de fjerne en eller flere mønter fra samme bunke. Den spiller der tager den sidste mønt, har vundet. Georg starter altid. Bestem de værdier af n for hvilke Georg har en vindende strategi.



n bunker med lige mange mønter i hver

En god idé er først at se på hvordan spillet ender. Hvis man kun efterlader én bunke til modstanderen, så kan modstanderen vinde, så det skal man for alt i verden undgå. Målet er derfor altid at kunne trække så der ikke kun er én bunke tilbage efter dette træk, og for at opnå dette kan man udnytte symmetri.

Først ser vi på situationen hvor n er lige. Georgs mor parrer fra starten bunkerne to og to, sådan at hvis Georg tager mønter fra den ene bunke i et par, så kan hun tage samme antal mønter fra den anden bunke i parret. Dermed efterlader hun altid en situation til Georg hvor der er lige mange mønter i hvert par af bunker, dvs. hun efterlader altid en situation med et lige antal bunker, og dermed aldrig en situation hvor der kun er en bunke. Derfor kan Georg aldrig vinde når Georgs mor følge denne symmetristrategi. Da der er endeligt mange mønter, vil spillet slutte efter et endeligt antal træk, og derfor vil Georgs mor til sidst vinde.

Hvis der er et ulige antal bunker, ja så kan Georg vinde ved at udnytte samme strategi som Georgs mor før benyttede. Først tager Georg alle mønterne i en bunke og efterlader dermed en situation med et lige antal bunker med lige mange mønter i hver til sin mor.

Opgave 5.3. Tallene fra 1 til 500 er skrevet på tavlen. To spillere A og B sletter skiftevis ét tal ad gangen, og A sletter det første tal. Hvis summen af de to sidste tal på tavlen er delelig med 3, vinder B, i modsat fald vinder A. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer denne spiller sejren?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2008)

Opgave 5.4. Alma og Bertha spiller følgende spil. På et bord ligger 100 runde, 200 trekantede og 200 firkantede brikker. I hvert træk skal en spiller fjerne to brikker, men det må ikke være en trekant og en firkant. Alma starter, og man taber hvis man ikke kan trække, eller der ikke er flere brikker tilbage når man skal trække. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer hende sejren?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2016)

6 Udfordringer

Her er samlet nogle af de rigtig svære Georg Mohr-opgaver i kombinatorik.

Opgave 6.1. Georg skriver et positivt helt tal a på en tavle. Så længe der står et tal på tavlen, gør han derefter følgende hver dag:

- Hvis det sidste ciffer i tallet på tavlen er mindre end eller lig med 5, sletter han dette sidste ciffer. (Hvis der kun er dette ene ciffer, bliver tavlen altså tom.)
- Ellers sletter han hele tallet og skriver i stedet 9 gange tallet.

Kan Georg vælge a så tavlen aldrig bliver tom?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2019)

Opgave 6.2. En nydelig frugtanretning på et stort rundt fad er kantet med jordbær. Der er brugt mellem 100 og 200 bær til denne kant. Et lækkersultent barn spiser først et af jordbærrene og begynder derpå at gå rundt og rundt om fadet, idet hun spiser jordbær på følgende måde: Når hun har spist et bær, lader hun det næste ligge, derefter spiser hun det næste, lader det næste ligge, osv. Således fortsætter hun indtil der kun er et eneste jordbær tilbage. Dette bær er det der lå lige efter det allerførste hun spiste. Hvor mange bær lå der oprindelig? (Georg Mohr-Konkurrencen 1998)

Opgave 6.3. Homer Grog har på ti sedler skrevet tallene 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ét tal på hver seddel. Han arrangerer sedlerne i en rundkreds og forsøger at få den største sum S af tallene på tre på hinanden følgende sedler til at blive mindst mulig. Hvad er den mindste værdi S kan antage?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2002)

Opgave 6.4. For en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ af 100 (ikke nødvendigvis forskellige) positive tal gælder at de 99 brøker

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \ldots, \frac{a_{99}}{a_{100}}$$

alle er forskellige.
Hvor mange forskellige tal skal der mindst være i følgen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2018)

Opgave 6.5. I en skakturnering spiller hvert par af spillere ét spil. Et tabt spil giver 0 point, et vundet spil 1 point og et uafgjort spil $\frac{1}{2}$ point. Efter turneringen viser det sig at i hver gruppe af tre spillere har mindst én fået $1\frac{1}{2}$ point i alt i spillene mod de to andre. Hvor mange spillere kan højst have deltaget?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2017)

Opgave 6.6. For hvilke n kan man sætte mærker på en stok så alle længderne 1 cm, 2 cm, . . . , n cm optræder netop én gang som afstand mellem to af mærkerne, og ingen andre længder optræder som en sådan afstand?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2015)

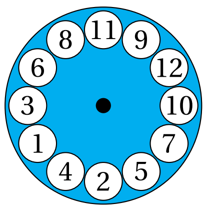
7 Løsninger

Øvelse 1.1 Det centrale er først at udregne hvad summen af hver søjle, række og diagonal skal være. Da summen af tallene fra 1 til 9 er 45, må summen af tre rækker være 45, dvs. summen af en række 15. Vi kender allerede to tal i en diagonal. Det sidste bliver derfor nødt til at være $15-5-2=8$.

	×	2
	5	×
8		

Nu lægger vi mærke til at 8 ikke kan placeres i samme række eller søjle som hverken 7 eller 9, for så bliver summen for høj. Derfor skal der stå 7 og 9 i de to markerede felter. De kan placeres på to forskellige måder. Herefter er det ikke svært at se at resten af tallene er givet, og at det hele kommer til at gå op. Der er altså to forskellige måder at indsætte de resterende syv tal i det magiske kvadrat.

Øvelse 1.2 Tallet 6 kan stå ved siden af 3, 4, 8 og 9. Bemærk først at 1 kun kan stå ved siden af 3 og 4, og at 2 kun kan stå ved siden af 4 og 5. Det betyder at 4 skal stå mellem 1 og 2, og 6 står altså ikke ved siden af 4. Helt tilsvarende ses at 12 skal stå ved siden af 10 og 9, og at 11 skal stå ved siden af 9 og 8, dvs. 9 står mellem 11 og 12 og altså ikke ved siden af 6. Det betyder at eneste mulighed er at 6 står mellem 3 og 8, og dette er faktisk muligt:



Opgave 1.1 Georgien scorede det femte mål. For at vise dette antager vi det modsatte og viser at dette er umuligt. Antag at Danmark scorede det femte mål. Da Danmark også scorede det sjette mål, og intet land har scoret tre mål i træk, må Georgien have scoret det fjerde mål. De tre første mål kan ikke være scoret af samme land da ingen har scoret tre mål i træk. Altså har enten Georgien eller Danmark scoret netop et af de tre første mål. Hvis Georgien scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter fjerde mål, hvilket er umuligt. Hvis Danmark scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter sjette mål, hvilket også er umuligt. Antagelsen om at Danmark har scoret det femte mål, er derfor forkert, og eneste mulighed er at Georgien har scoret det femte mål. (Mulige scoringsrækkefølger er ddgdgdgdgg og ggdggddgdd).

Man kan også løse opgaven ved at analysere situationen hvor Danmark scorede det første mål, og situationen hvor Georgien scorede det første mål, hver for sig, og nå frem til at ddgdgdgdgg og ggdggddgdd er eneste tilladte muligheder.

Opgave 1.2 Antag at Georg har lagt papirerne i to bunker så ingen af bunkerne indeholder to tal hvis sum er et kvadrattal. Bunken som indeholder papiret med tallet 1, kaldes A, og den anden bunke kaldes B. Da $1+3$, $3+6$, $6+10$, $10+15$, $15+1$ er kvadrattal, så gælder: 1 i bunke A, 3 i bunke B, 6 i bunke A, 10 i bunke B, 15 i bunke A og 1 i bunke B. Altså skal papiret med tallet 1 ligge i begge bunker. Det antagne er altså umuligt.

Opgave 1.3 Alle de bolde der IKKE flyttes, ender længst til venstre i den rækkefølge de står i til at starte med. Tallene 1, 2 og 3 står i den rigtige rækkefølge i forhold til hinanden, men 4 gør ikke. Derfor bliver man nødt til at flytte alle bolde med tal større end 3, dvs. mindst seks bolde. Det kan godt lade sig gøre kun at flytte seks bolde ved at flytte boldene 4, 5, 6, 7, 8 og 9 i denne rækkefølge.

Opgave 1.4 Peter gennemfører spillet i præcis to slag netop hvis sidste kast er et R, og han i første kast kommer til det første R på spillepladen eller længere, altså hvis han slår R, M eller H i første kast. Sandsynligheden for at slå R, M eller H er $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, og sandsynligheden for at slå R er $\frac{1}{6}$, dvs. sandsynligheden for at Peter gennemfører spillet i netop to slag, er $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

Opgave 1.5 Vi vil vise at fladen markeret med × ikke kan være grøn, men at både rød og blå er muligheder.

Kald fladen hvor to klodser er limet sammen, for forbindelsesfladen. Da alle klodser har samme farve på to modstående flader, må alle forbindelsesfladerne i samme række have samme farve. Det samme må gælde for en søjle.

Vi vil først vise at fladen markeret med × ikke kan være grøn. Betragt den nederste række. Da der både er en rød og en blå flade der vender fremad, må alle forbindelsesfladerne i rækken være grønne. Da 2. klods i nederste række har en blå flade der vender fremad, og forbindelsesfladerne i rækken er grønne, må forbindelsesfladerne i 2. søjle være røde. Tilsvarende må forbindelsesfladerne i 5. søjle være blå. Forbindelsesfladerne i en vilkårlig række kan nu hverken være røde eller blå da de alle indeholder en klods fra både 2. og 5. søjle. Derfor må de alle være grønne. Sidefladen markeret med × kan altså ikke være grøn, da ingen grønne flader vender fremad.

Nu viser vi at både rød og blå er muligheder. Man kan vende klodserne så alle forbindelsesfladerne i rækkerne er grønne, og så hver søjle enten kun har blå klodser eller kun røde klodser der vender fremad. Alle disse konstruktioner opfylder betingelserne så længe 2. søjle er blå, og 5. søjle er rød. Dette viser at farven af 1. søjle, og dermed ×, både kan være både rød og blå.

Øvelse 2.1 Der er 2 muligheder for at vælge fliser til kanten, og derefter er der 2 muligheder for hver af de resterende 6 fliser, dvs. i alt er der $2^7 = 128$ muligheder for at vælge fliser.

Øvelse 2.2 Der er 4 valgmuligheder for første bogstav. Derefter skal man have en konsonant hvis den foregående var en vokal eller omvendt, dvs. herefter har man 2 valg for hvert bogstav. I følge multiplikationsprincippet giver det samlet $4 \cdot 2^3 = 32$ ord.

Øvelse 2.3 Den venstre søjle skal dækkes af samme L-brik, og denne brik kan lægges på 2 måder. Når den er lagt, så er der kun en måde at lægge den næste L-brik på så der ikke kommer huller der ikke kan udfyldes. Derfor er der 2 måder at udfylde de første 2×3-felter. På samme måde er der 2 måder at udfylde hvert af de næste 2×3-felter, og dermed er der samlet $2^5 = 32$ måder at dække brættet med 10 L-brikker.

Øvelse 2.4 Først tæller vi hvor mange stænger Georg kan bygge hvis vi ser bort fra at to stænger regnes som ens hvis den ene kan drejes over i den anden. Først har Georg 4 muligheder for at vælge farve på første klods, og derefter 3 muligheder for at vælge hver af de næste klodser, dvs. ifølge multiplikationsprincippet er der $4 \cdot 3^4 = 324$ muligheder. Alle stænger som ikke er symmetriske, er talt med to gange her, så nu undersøger vi hvor mange der er symmetriske. Når vi har valgt de første tre klodser i en symmetrisk stang, er resten givet, dvs. der er $4 \cdot 3^2 = 36$ symmetriske stænger. Nu ved vi at antallet af ikke symmetriske stænger er $\frac{324-36}{2} = 144$. Altså er der i alt $144+36 = 180$ forskellige stænger.

Øvelse 2.5 Man kan farve det øverste venstre felt på 4 måder, og derefter det nederste venstre felt på 3 måder, dvs. første søjle kan males på $4 \cdot 3 = 12$ måder. Nu tæller vi på hvor mange måder hver af de efterfølgende søjler kan males. Hvis man vælger samme farve til det øverste felt i en søjle som farven på det nederste felt i søjlen til venstre for denne, så har man 3 muligheder for at vælge farven på det nederste felt i søjlen. Hvis man vælger en anden farve til det øverste felt i en søjle end farven på det nederste felt i søjlen til venstre for denne, så er der 2 muligheder for denne farve, og man har derefter 2 muligheder for at vælge farven på det nederste felt i søjlen. Man kan altså male de to felter i en søjle på $3+2 \cdot 2 = 7$ måder. Dermed har Emil $12 \cdot 7^5$ kombinationer at vælge imellem når han skal male sit maleri.

Øvelse 2.6 Han har 7 valgmuligheder for den nederste klods, 6 for den næste, 5 for den tredje og 4 for den sidste, dvs. ifølge multiplikationsprincippet kan han bygge tårnet på $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ forskellige måder.

Øvelse 2.7 Først vælger han om han vil spise lys chokolade eller mørk chokolade først. Her er altså 2 valgmuligheder. Derefter skal han vælge rækkefølgen af de tre stykker lyse chokolader, og det kan gøres på 3! måder. For hver af disse skal han nu vælge rækkefølgen af de tre mørke stykker chokolader, og det kan også gøres på 3! måder, hvorefter alt er fastlagt. Ifølge multiplikationprincippet kan han altså spise sine seks stykker chokolade på $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ måder, når han insisterer på at spise skiftevis lys og mørk chokolade.

Øvelse 2.8 Du kan vælge 2 ud af 200 på $\frac{200 \cdot 199}{2} = 19900$ måder.

Øvelse 2.9 At vælge 198 ud af 200 svarer til at vælge de to du ikke vælger, dvs. det kan gøres på $\frac{200 \cdot 199}{2} = 19900$ måder.

Øvelse 2.10 Georg spiser seks stykker chokolade, dvs. når han har bestemt på hvilke 3 af de 6 pladser at han vil spise en frø, så er resten fastlagt. Han kan vælge de 3 ud af 6 pladser på $\frac{6\cdot5\cdot4}{3!} = 20$ måder.

Øvelse 2.11 Georg skal gå tre vejstykker (et vejstykke er vejen mellem to nabokryds) mod øst og tre vejstykker mod nord, dvs. i alt seks vejstykker. Han skal altså vælge en kombination af 3 vejstykker mod øst og 3 vejledstykker mod nord, fx NNØNØØ. Det svarer til at vælge hvilke tre af de seks vejstykker der skal være Ø, dvs. det kan han gøre på $\frac{6\cdot5\cdot4}{3!} = 20$ måder.

Opgave 2.1 Der findes 4^{27} ord på Georgs liste. Nu parrer vi ordene to og to sådan at netop et ord i hvert par har flest vokaler, da dette viser at netop halvdelen af ordene har flest vokaler. Georg parrer ordene ved at tage et ord og lave følgende ombytning af bogstaver: $G \longleftrightarrow E$ og $R \longleftrightarrow O$. Det ord der fremkommer, er ordets makker. Bemærk at hvis man laver samme ombytning på det nye ord der fremkommer, får man det oprindelige, dvs. parringen er veldefineret. Et ord med n vokaler parres med et ord med $27-n$ vokaler, og præcis et af tallene n og $27-n$ er mere end halvdelen af 27. Derfor har netop halvdelen af ordene flest vokaler, dvs. $\frac{4^{27}}{2} = 2^{53}$.

Opgave 2.2 Lad M betegne mængden $\{1,2,3,\ldots,2006\}$. Først viser vi at man kan udtage 10 forskellige tal med sum større end 10040 på mindst samme antal måder som man kan udtage 10 forskellige tal med sum mindre end 10030.

Antag at tallene $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{10}$ er ti forskellige tal fra mængden M med sum mindre end 10030. Tallene $b_i = 2007 - a_i$, $i = 1,2,\ldots,10$, er dermed også ti forskellige tal fra mængden M, og om deres sum S ved vi at

$$\begin{aligned} S &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} \\ &= (2007-a_1) + (2007-a_2) + \cdots + (2007-a_{10}) \\ &= 10\cdot 2007 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) \\ &> 20070 - 10030 \\ &= 10040. \end{aligned}$$

Da forskellige valg af $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{10}$ giver forskellige valg af $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ er antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum større end 10040 mindst lige så stort som antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum mindre end 10030.

Når summen er større end 10040, er den også større end 10039. Desuden har de ti tal 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009 sum 10040, og derfor er antallet af måder at udvælge ti forskellige tal fra M med sum større end 10039 større end antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum mindre end 10030.

Opgave 3.1 Man kan have mellem 0 og $n-1$ facebookvenner i gruppen. Hvis en person har 0 venner, findes ingen som har alle andre i gruppen som ven, dvs. der findes ingen med $n-1$ facebookvenner i gruppen. Derfor er der højst $n-1$ forskellige muligheder for hvor mange facebookvenner hver enkelt har i gruppen, og disse svarer til vores skuffer. Da der er n personer i gruppen som vi skal lægge ned i skufferne, må mindst to af dem have samme antal facebookvenner.

Opgave 3.2 Vi lader hvert par af venner udgøre skufferme, og de 50 julekort puttes herefter i den skuffe der repræsenterer det par af venner julekortet er sendt mellem. Der er ifølge sætningen om kombinationer $\frac{10\cdot9}{2} = 45$ par af venner, og da der sendes 50 julekort, må der være mindst et par af venner der har udvekslet to julekort ifølge skuffeprincippet. Da ingen sender to julekort til samme ven, må de to have sendt julekort til hinanden.

Opgave 3.3 Da der er 10 punkter, ønsker vi at opdele kvadratet i 9 områder, for så ved vi at der findes et område med mindst to punkter. Målet er at disse områder er små nok til at den maksimale afstand mellem to punkter i et område er mindre end 1, for så har vi vist det ønskede. Kvadratet kan deles op i 9 kvadrater med sidelængde $\frac{2}{3}$, og da længden af diagonalen ifølge Pythagoras' sætning er

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} < 1,$$

er den maksimale afstand mellem to punkter i dette kvadrat under 1.

Opgave 3.4 Der er 100 forskellige placeringer af bordet når vi drejer det, hvor der er en forret på hver plads. Lad hver placering repræsentere en skuffe så vi har 100 skuffer. Hver forret står rigtigt i netop en placering, dvs. der er 100 forretter som vi hver lægger i den skuffe der repræsenterer den placering hvor forretten er på den rigtige plads. Da der i udgangsplaceringen ikke er en eneste forret der står rigtigt, er mindst en af skufferne tom. Altså findes der en skuffe med to forretter, dvs. mindst en placering hvor mindst to forretter er placeret rigtigt.

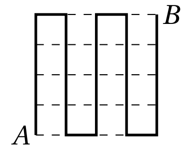
Opgave 4.1 Bemærk først at hvert bogstav har en bestemt ”makker”, nemlig det bogstav der står på den modsatte side af terningen. Vi vil vise at svaret på opgaven er nej. Dette gøres indirekte. Antag at det kan lade sig gøre at bygge et tårn med den ønskede egenskab. Hvert af bogstaverne G, O og R forekommer da to gange på forsiden af tårnet. Dermed optræder deres makkere ligeledes hver to gange på bagsiden af tårnet. Altså må disse makkere være bogstaverne G, O og R, men det kan ikke lade sig gøre at parre et ulige antal to og to. Herved har vi nået en modstrid og dermed vist at det ikke kan lade sig sig gøre at bygge et tårn med de angivne egenskaber.

Opgave 4.2 Bemærk først at alle til at starte med står på et ulige felt, og at de efter alle har trykket en gang står på tre lige felter. Sådan fortsætter det, dvs. når A trækker er der et lige antal felter hen til både B og C, og A kan derfor aldrig slå hverken B eller C ihjel. Tilsvarende ses at B aldrig kan slå C ihjel. Det er derefter ikke svært at se at C kan slå både A og B ihjel ved simpelthen at rykke tættere og tættere på dem. (Bemærk at B godt kan slå A ihjel, men det giver blot en spiller mindre for C at slå ihjel.) Altså kan spiller C altid vinde.

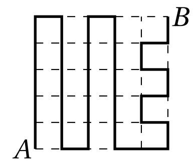
Opgave 4.3 Betragt rækken af alle 60 børn og nummerer pladserne $1, 2, \ldots, 60$ fra venstre mod højre. Hvis vi kun betragter de 30 pladser med ulige numre, så må der ikke være to piger ved siden af hinanden her, dvs. højst halvdelen af de 30 pladser kan indeholde en pige, dvs. der står højst 15 piger her. Helt tilsvarende argument med de 30 pladser med lige numre. Derfor kan man højst placere 30 piger i alt, dvs. det er ikke muligt at stille 29 drenge og 31 piger på række så ingen står ved siden af to piger.

Opgave 4.4 I hvert træk vil antallet af sedler med ulige tal enten reduceres med to (nemlig hvis der fjernes to ulige sedler og dermed lægges en lige) eller være uændret (hvis der fjernes to lige og lægges en lige, eller hvis der fjernes en lige og en ulige og lægges en ulige). Da antallet af sedler med ulige tal fra start af er lige (nemlig $\frac{1992}{2} = 996$), vil det derfor vedblive med at være lige. Antallet af ulige sedler når der kun er én seddel tilbage, er derfor nul. Den sidste seddel bærer dermed et lige nummer.

Opgave 4.5 Et skema der består af $n \times n$ felter, indeholder $(n+1)^2$ gitterpunkter, og da man starter i et gitterpunkt og for hvert skridt ender i et nyt gitterpunkt, kan en rute ikke være længere end $(n+1)^2 - 1$. Hvis n er lige, er det muligt at konstruere en rute af denne længde på følgende måde: Start i A og gå n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op, osv. Da n er lige, skal vi gå et lige antal skridt til højre for at nå B, og vi ender dermed med at gå op efter vores sidste skridt til højre, dvs. vi ender i B efter at have været gennem samtlige gitterpunkter i kvadratet. På figuren er vist et eksempel med $n = 4$. Når n er lige, er den maksimale længde af en tilladt rute dermed $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$.



Når n er ulige, er det ikke muligt at konstruere en rute som går gennem alle gitterpunkter: Farv gitterpunkterne grønne og gule så gitterpunkter på en lodret linje er skiftevis gule og grønne, og gitterpunkter på en vandret linje også er skiftevis gule og grønne. På denne måde får A og B samme farve, og hvert eneste skridt på ruten går mellem to gitterpunkter af forskellig farve, og dermed vil en rute fra A til B indeholde et lige antal skridt. En rute gennem alle gitterpunkter indeholder $(n+1)^2 - 1$ skridt, men $(n+1)^2 - 1$ er ulige når n er ulige, og det er dermed umuligt at gå gennem alle gitterpunkter når n er ulige. Man kan til gengæld konstruere en rute gennem alle på nær ét gitterpunkt på følgende måde: Start i A og gå som før n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op og så videre, men stop efter at have taget samlet $n-1$ skridt til højre. Tag herefter endnu et skridt til højre, et skridt op, et skridt til venstre, et skridt op, et skridt til højre, osv. Da n er ulige, vil denne rute ende i B efter et sidste skridt op, og derfor er det eneste gitterpunkt ruten ikke går igennem, gitterpunktet umiddelbart til venstre for B. På figuren er vist et eksempel med $n = 5$. Når n er ulige, er den maksimale længde af en rute dermed $(n+1)^2 - 2 = n^2 + 2n - 1$.



Opgave 5.1 a) Vi viser mere generelt at spiller A kan vinde hvis de to biler til at starte med ikke er placeret på to nabofelter. Hvis de to biler ikke står på to nabofelter, når spiller A skal trække, kan spiller A flytte den bagerste bil hen på feltet umiddelbart bag den forreste bil. Det tvinger B til at flytte den forreste bil (så længe det er muligt) og derved skabe en ny situation hvor de to biler ikke står på to nabofelter, når A skal trække. Spiller A kan derfor i hvert træk flytte den bagerste bil hen på feltet bag den forreste. I hvert træk kommer en af bilerne længere til højre, og på et eller andet tidspunkt må bilerne derfor ende på de to felter længst til højre. I denne situation er det B's tur til at trække, og derfor vinder A ved at følge denne strategi.

b) Spiller B kan vinde hvis de to biler til at starte med står på to nabofelter: Hvis de to biler står på de to felter længst til højre, taber A med det samme. Hvis ikke, må spiller A i første træk flytte den forreste bil så der opstår en situation hvor de to biler ikke står på to nabofelter. I denne situation kan B vinde ved at følge den strategi der er beskrevet under a).

Opgave 5.2 Når alle mellemrummene er udfyldt, er regneudtrykket en sum af led som alle er 1. Hvert led består nemlig enten af et af de oprindelige 1-taller eller af to eller flere 1-taller ganget sammen. Hvis antallet af led er lige, bliver summen lige, og Georg vinder.

Da der er 2017 mellemrum, og Georg begynder, bliver det også Georg der sætter det sidste tegn. Georg har en vindende strategi: Han sætter vilkårlige tegn indtil sin sidste tur. Lige inden han sætter sit sidste tegn, tæller han antallet af plusser på tavlen. Hvis det er lige, sætter han et plus, og hvis det er ulige, sætter han et gangetegn. På den måde sikrer han at der til sidst er et ulige antal plusser, hvilket betyder at der er et lige antal led, hvormed han vinder.

Opgave 5.3 Spiller B har en strategi så B vinder uanset hvordan A spiller. De 500 tal kan opdeles i 250 par så n parres med $501-n$ for $n = 1, 2, 3, \dots, 250$. Med denne parring har hvert par summen 501, og hvert af de 500 tal indgår i netop et par. Hver gang spiller A sletter et tal fra et par, sletter B umiddelbart efter det andet tal i parret. Hver gang A skal trække, har alle tal på tavlen derfor en makker på tavlen, og det er altså altid muligt for B at følge denne strategi. Når der kun er to tal tilbage på tavlen, danner de derfor et par med sum 501 som er delelig med 3. Dermed vinder spiller B ved at følge denne strategi.

Opgave 5.4 Bertha kan sikre sig sejren uanset hvordan Alma spiller. Berthas vindende strategi er at sørge for at der hver gang hun har trukket, er et lige antal af hver af de tre slags brikker.

Først viser vi at det er muligt for Bertha at følge denne strategi. Til at starte med er der et lige antal af hver af de tre slags brikker. Hvis Alma tager to forskellige slags brikker, så tager Bertha de samme slags brikker som Alma. Dette er muligt da der var et lige antal af hver inden Alma trak, og Alma kun har trukket en af hver. Hvis Alma tager to ens brikker, tager Bertha også to ens brikker (men ikke nødvendigvis samme slags som Alma). Dette er muligt så længe der er brikker tilbage, da der efter at Alma har trukket to ens, stadig må være et lige antal af hver slags. På denne måde sikrer Bertha at der er et lige antal af hver af de tre slags brikker når hun har trukket, og hvis hun fortsætter med at følge denne strategi, vil det gælde efter hvert eneste af hendes træk. Bertha kan altså følge denne strategi så længe der er brikker tilbage når hun skal trække.

Nu viser vi at strategien fører til sejr. Bemærk at antallet af brikker til at begynde med er et multiplum af 4. Når Bertha skal trække, vil der derfor altid være mindst to brikker tilbage, og derfor kan Bertha altid trække. Altså taber Alma når Bertha følger denne strategi.

Opgave 6.1 Svaret er nej. Vi fører beviset indirekte ved at antage at et sådant tal findes, og viser at denne antagelse fører til en modstrid. Antag altså at der findes starttal så tavlen aldrig bliver tom. Lad a_0 betegne det mindst mulige tal som aldrig fører til en tom tavle, og kald de følgende dages tal a_1, a_2 osv. Da a_0 aldrig fører til en tom tavle, må a_1, a_2 osv. nødvendigvis have samme egenskab.

Hvis tallet a_0 ender på 0, 1, 2, 3, 4 eller 5, vil a_1 fremkomme ved at slette slutcifferet og derfor være mindre end a_0, i modstrid med at a_0 var det mindste tal med egenskaben.

Hvis a_0 ender på 6, 7, 8 eller 9, vil a_1 være $9 \cdot a_0$. Da cifrene 6, 7, 8 eller 9 ganget med 9 ender på henholdsvis 4, 3, 2 eller 1, vil a_1 ende på et af disse cifre. Det betyder at a_2 fremkommer af a_1 ved at fjerne slutcifferet d, hvilket kan udtrykkes således: $a_2 = \frac{a_1-d}{10} = \frac{9\cdot a_0-d}{10}$. Heraf fås $a_2 \le \frac{9\cdot a_0}{10} < a_0$. Så i dette tilfælde har vi fundet at a_2 er mindre end a_0, hvorved vi igen har opnået en modstrid med at a_0 var det mindste tal med den angivne egenskab.

Opgave 6.2 Vi nummererer bærrene fra 0 til n (der var således oprindelig $n+1$ bær) og noterer at bær nummer 0 spises, samt at bær nummer 1 overspringes hver gang. I første tur rundt om fadet må det sidste bær blive spist (for vi ved jo at det næste, nemlig bær nummer 1, ikke bliver spist). Altså må n være et lige tal. Efter første tur resterer $\frac{n}{2}$ bær. I anden runde må det sidste af de $\frac{n}{2}$ bær blive spist (fordi det næste, bær nummer 1, ikke bliver spist). Altså må $\frac{n}{2}$ være et lige tal. Efter anden tur resterer halvdelen af disse, dvs. $\frac{n}{2^2}$ bær. Således fortsættes. Efter den k'te tur resterer $\frac{n}{2^k}$ bær. Efter sidste tur er $\frac{n}{2^k}=1$. Altså er n af formen 2^k. Da vi samtidig ved at $100 \leq n+1 \leq 200$, må det oprindelige antal bær være $n+1=2^7+1=129$.

Opgave 6.3 Summen S er 29 ved rækkefølgen

$$1 \to 17 \to 9 \to 3 \to 15 \to 7 \to 5 \to 13 \to 11 \to 4$$

(cyklisk). Vi viser nu at S ikke kan blive mindre end 29. Betragt for en vilkårlig placering af sedlerne de tre grupper med tre sedler som ligger på plads $1-3$, $4-6$ og $7-9$ efter sedlen med tallet 1. Summen af tallene i de tre grupper er 84, og dermed er gennemsnitssummen for de tre grupper 28. I en af grupperne er der tre ulige tal, og dermed er summen ulige og altså ikke 28. Altså vil mindst en af de tre grupper have en sum som er større end 28. Samlet har vi vist at den mindste værdi S kan antage, er 29.

Opgave 6.4 Lad n betegne antallet af forskellige tal i den givne talfølge. Af de n forskellige tal kan der højst dannes $n(n-1)+1$ forskellige brøker med de pågældende tal i tæller og nævner. Det skyldes at der er $n(n-1)$ måder at danne en brøk med forskellige tal i tæller og nævner (tælleren kan vælges på n måder og nævneren på $n-1$ måder), og at de n brøker med værdien 1 (samme tal i tæller og nævner) kun medtælles én gang. I vores situation er 99 af brøkerne forskellige, altså må $n(n-1)+1 \geq 99$. Det mindste tal n der opfylder denne ulighed, er 11 (da $10 \cdot 9+1=91<99$ og $11 \cdot 10+1=111 \geq 99$). Antallet af forskellige tal i talfølgen er altså mindst 11.

At 11 faktisk er det søgte svar, eftervises ved at angive en talfølge med kun 11 forskellige tal som opfylder det givne. En sådan kan f.eks. konstrueres på følgende måde: Lad $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{11}$ betegne de 11 primtal 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Som $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ tages nu de 100 første tal dannet efter følgende system:

$$\begin{array}{l}
p_1, \\
p_2, p_1, \\
p_3, p_2, p_3, p_1, \\
p_4, p_3, p_4, p_2, p_4, p_1, \\
p_5, p_4, p_5, p_3, p_5, p_2, p_5, p_1, \\
p_6, p_5, p_6, p_4, p_6, p_3, p_6, p_2, p_6, p_1, \\
\qquad\vdots \\
p_{11}, p_{10}, p_{11}, p_9, p_{11}, p_8, p_{11}, \ldots, p_{11}, p_2, p_{11}, p_1
\end{array}$$

Kun de 11 forskellige tal indgår. Da ingen af brøkerne $\frac{a_i}{a_{i+1}}$, $i=1,2,\ldots,99$, har både samme tæller og samme nævner, og da de alle er uforkortelige, er de alle forskellige. Følgen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ opfylder således kravene. Hermed er eftervist at 11 er den søgte nedre grænse.

Opgave 6.5 Lad os kalde en kamp for afgjort hvis den ikke er uafgjort. Bemærk først at i en gruppe af tre spillere kan ikke alle kampe være endt uafgjort, og de kan heller ikke alle være endt afgjort. I ingen af tilfældene ville der nemlig optræde en spiller med $1\frac{1}{2}$ point.

Af bemærkningen følger at hvis en spiller har spillet uafgjort mod to andre, må disse to have spillet afgjort mod hinanden. En spiller kan derfor højst have spillet uafgjort i to kampe i alt, for hvis en spiller P havde spillet uafgjort mod både A, B og C, ville hver af kampene A-B, A-C eller B-C være afgjorte. I kampene i gruppen A, B, C ville der derfor kun være afgjorte kampe, hvilket ikke kan lade sig gøre.

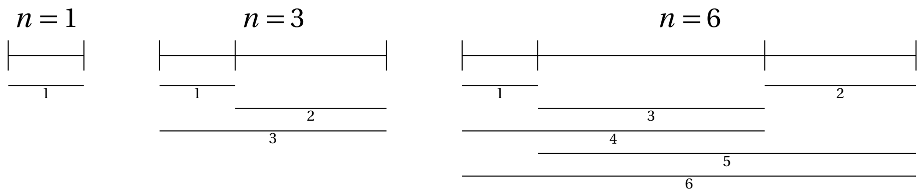
På helt tilsvarende måde indses at hver spiller højst kan have spillet afgjort i to kampe i alt. Hvis en spiller har spillet afgjort mod to andre, må disse to have spillet uafgjort mod hinanden, dvs. hvis en spiller P havde spillet afgjort mod både A, B og C, ville hver af kampene A-B, A-C eller B-C være uafgjorte. I kampene i gruppen A, B, C ville der derfor kun være uafgjorte kampe, hvilket ikke kan lade sig gøre.

Vi har nu set at hver spiller højst kan have spillet fire kampe i alt, og da alle spiller mod alle, er der højst fem spillere i alt.

En turnering med fem spillere *er* faktisk mulig: For fem spillere A, B, C, D og E er betingelserne opfyldt hvis A vinder over B, B vinder over C, C over D, D over E og E over A, og alle andre kampe er uafgjorte.

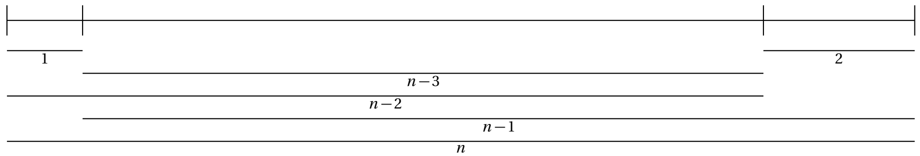
Opgave 6.6 Når man sætter m mærker, danner hvert par af mærker en afstand, dvs. der er i alt $n = \frac{m(m-1)}{2}$ afstande. Altså må n være blandt tallene $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$.

For $n = 1$, $n = 3$ og $n = 6$ er det muligt at sætte mærker så det ønskede er opfyldt :

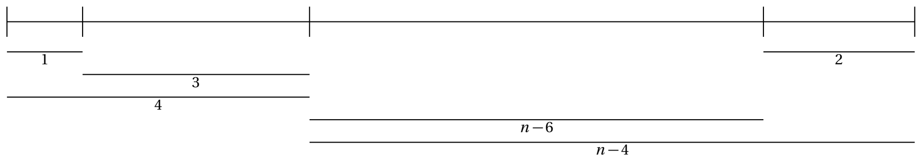


Nu viser vi at det ikke er muligt for $n = 10, 15, 21, \ldots$. Antag at $n \geq 10$.

Afstanden n må nødvendigvis forekomme mellem de to yderste mærker. De resterende mærker skal have en heltallig afstand til disse mærker. Afstanden $n-1$ må derfor forekomme mellem et af de yderste mærker og endnu et mærke. Afstanden $n-2$ må også forekomme mellem et af de yderste mærker og endnu et mærke da der ellers ville komme to afstande på 1, og det skal ikke være det samme yderste mærke som $n-1$ da der ellers også ville komme to afstande på 1.



Nu har vi afstandene $1, 2, n-3, n-2, n-1$ og n. Hvis vi skal opnå afstanden $n-4$, skal vi sætte mindst ét mærke der højst har afstand 4 til et af de to yderste mærker. Dette er kun muligt ved at sætte et mærke med afstand 4 til yderste venstre mærke på figuren, da der ellers ville forekomme en af afstandene 1 eller 2 to gange.



Nu har vi afstandene $1, 2, 3, 4, n-6, n-4, n-3, n-2, n-1$ og n. Hvis vi skal opnå afstanden $n-5$, skal vi sætte mindst ét mærke der højst har afstand 5 til et af de to yderste mærker, men dette er umuligt uden at opnå en af afstandene 1, 2 eller 3 to gange. Det ønskede kan derfor ikke lade sig gøre når $n \geq 10$.