Tip til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Geometri

Her præsenteres idéer til hvordan man løser geometriopgaver til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. Det er en forudsætning for at arbejde med disse tip til 2. runde at du allerede har arbejdet med *Geometri - Tip til 1. runde*.

For at blive god til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste ligesom til 1. runde at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor langt de fleste er fra 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen.

Til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er der fem opgaver som skal løses på fire timer. De er alle svære fordi man skal være kreativ og kombinere ting man ikke plejer, og så er det desuden en udfordring at skrive en god besvarelse hvor man argumenterer korrekt matematisk. Der er løsninger til alle opgaver bagerst så du kan se hvordan en fuldstændig besvarelse kan se ud, men læs dem først når du selv har arbejdet længe med en opgave.

Indhold

1 Areal af trekanter 1

2 Ensvinklede trekanter 4

3 Find den retvinklede trekant 5

4 30°- 60°- 90°-trekanter 6

5 Tegn den smarte linje 8

6 Drej figuren 10

7 Udfordringer 12

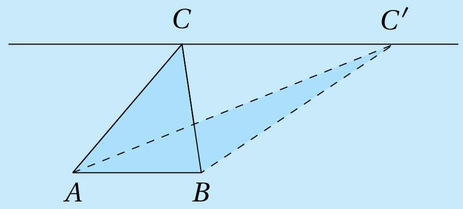
8 Løsninger 14

1 Areal af trekanter

Areal af trekant
Formlen for arealet af en trekant er

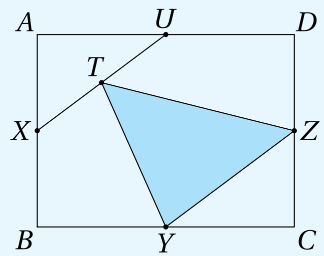
$$\text{areal} = \frac{\text{højde} \cdot \text{grundlinje}}{2}$$

Derfor har trekanter med samme grundlinje og samme højde også samme areal.



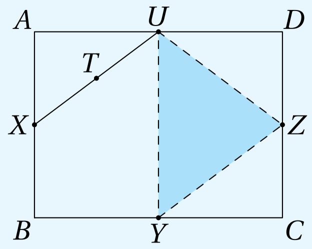
På figuren er indtegnet en $\triangle ABC$ og en linje gennem C parallel med grundlinjen AB. Når C skubbes langs denne linje bevares grundlinje og højde, og derfor har de to trekanter ABC og ABC' samme areal.

Eksempel Betragt et rektangel $ABCD$ hvor midtpunkterne af siderne er henholdsvis X, Y, Z og U. Lad desuden T være midtpunktet af linjestykket XU.



Vi ønsker at bestemme hvor stor en brøkdel arealet af $\triangle TYZ$ udgør af arealet af rektanglet $ABCD$.

Af symmetrigrunde må linjen XU være parallel med linjen YZ. Hvis vi betragter YZ som $\triangle TYZ$'s grundlinje, kan vi derfor flytte T langs linjen XU uden at ændre på arealet.

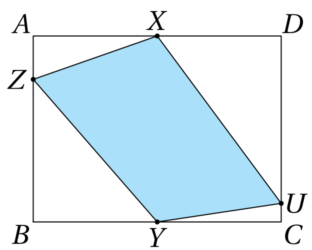


Altså har $\triangle UYZ$ samme areal som $\triangle TYZ$. Da U, Y og Z alle er midtpunkter af sider i rektanglet $ABCD$, udgør arealet af $\triangle UYZ$ $\frac{1}{4}$ af arealet af rektangel $ABCD$.

Tip: Kan du inddele et areal i trekanter?

Når man skal bestemme arealer af fx firkanter, er det ofte en god idé at dele dem op i trekanter. Selv når man skal bestemme arealet af en trekant, kan det nogle gange være en god idé at dele den op i to nye trekanter.

Opgave 1.1. Betragt et rektangel $ABCD$ hvor X og Y er midtpunkterne af henholdsvis AD og BC, mens Z og U blot er punkter på henholdsvis AB og CD.

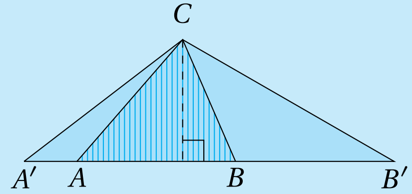


Hvor stor en brøkdel udgør arealet af firkant $XZYU$ af arealet af rektangel $ABCD$?

Forhold mellem arealer af trekanter

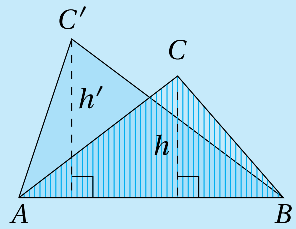
Forholdet mellem arealerne af to trekanter med samme højde er lig med forholdet mellem grundlinjerne.

$$\frac{\text{areal}(\triangle ABC)}{\text{areal}(\triangle A'B'C)} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$$



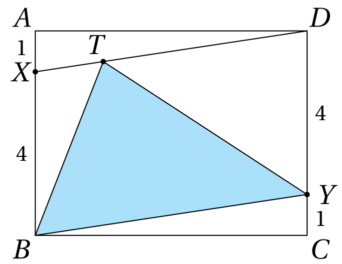
Forholdet mellem arealerne af to trekanter med samme grundlinje er lig med forholdet mellem højderne.

$$\frac{\text{areal}(\triangle ABC)}{\text{areal}(\triangle ABC')} = \frac{h}{h'}$$



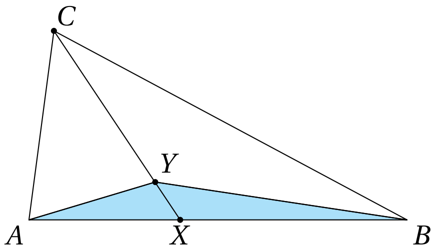
Bevis Følger direkte af formlen for arealet af en trekant.

Opgave 1.2. Betragt et rektangel $ABCD$. Rektanglets ene sidelængde $|AB| = 5$, og X er et punkt på siden AB så $|AX| = 1$. Desuden er Y et punkt på siden CD så $|CY| = 1$. Betragt $\triangle BYT$ hvor T er et punkt på linjestykket XD.



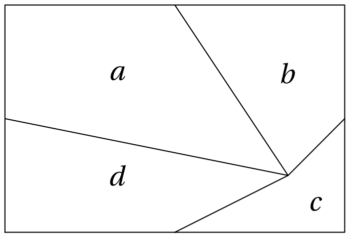
Hvor stor en brøkdel udgør arealet af $\triangle BYT$ af arealet af rektangel $ABCD$?

Opgave 1.3. I en $\triangle ABC$ er X et punkt på siden AB med $|CX| = 5$. Lad Y være et punkt på linjestykket CX så $|CY| = 4$.



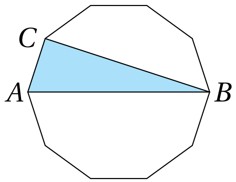
Hvor stor en brøkdel udgør arealet af $\triangle AYB$ af arealet af $\triangle ABC$?

Opgave 1.4. Fra et indre punkt i et rektangel trækkes forbindelseslinjer til de fire siders midtpunkter. Herved opstår fire områder (polygoner) med arealerne a, b, c og d (se figur). Bevis at $a + c = b + d$.



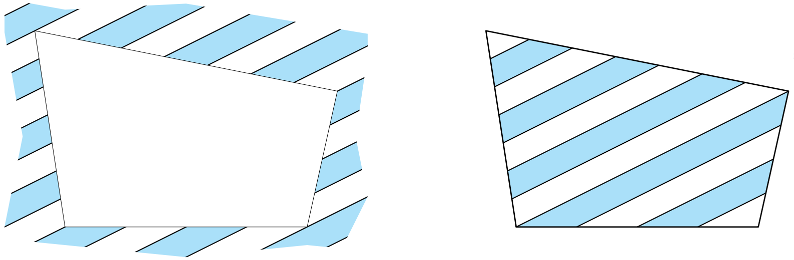
(Georg Mohr-Konkurrencen 2002)

Opgave 1.5. I en regulær tikant ligger $\triangle ABC$ som vist på figuren.



Hvor stor en brøkdel udgør trekantens areal af hele tikantens areal?
Svaret ønskes opskrevet som en brøk hvor tæller og nævner er hele tal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2007)

Opgave 1.6. En firkant klippes ud af et stykke gavepapir, som har lige brede hvide og blå striber:



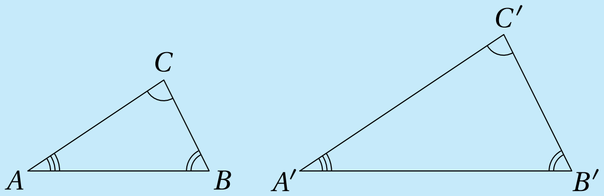
De blå striber i firkanten har et samlet areal på 10. Bestem arealet af firkanten.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2020)

2 Ensvinklede trekanter

Ensvinklede trekanter

Hvis to trekanter har parvis lige store vinkler, kaldes de ensvinklede, og forholdet mellem ensliggende sider er det samme.

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

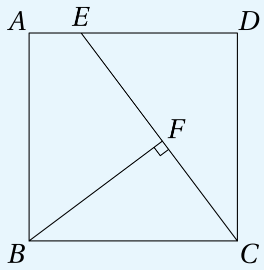


Hvis forholdet mellem ensliggende sider er 1, kaldes trekanterne kongruente.

Tip: Er der ensvinklede trekanter gemt på figuren?

I geometri er det ofte vigtigt at undersøge om der er ensvinklede trekanter, da man ved at se på forhold mellem sider kan bestemme længder på figuren.

Eksempel I et kvadrat $ABCD$ er indtegnet punkter og linjer som vist så $|BF| = 4$ og $|CF| = 3$. Vi ønsker at bestemme længden af EF.



For at bestemme længden af EF er det nok at bestemme længden af CE. Linjestykket EC er en side i $\triangle CDE$, og derfor ønsker vi at vide mere om denne trekant.

Vi bemærker at $\triangle BCF$ og $\triangle CED$ er ensvinklede: De er begge retvinklede, og vinklen ved B i $\triangle BCF$ er lig vinklen ved C i $\triangle CED$ da de begge summerer til 90° sammen med vinkel C i $\triangle BCF$.

Da $\triangle BCF$ er ret, og vi kender længden af de to kateter, kan vi bestemme hypotenusens længde vha. Pythagoras' sætning. Hypotenusens længde er $|BC| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, dvs. kvadratets sidelængde er 5.

Nu kan vi beregne forholdet mellem ensliggende sider i $\triangle CED$ og $\triangle BCF$:

$$\frac{|CD|}{|BF|} = \frac{5}{4}.$$

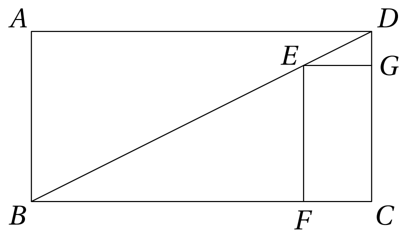
Altså er

$$|CE| = \frac{5}{4} \cdot |BC| = \frac{25}{4}.$$

Dette viser at

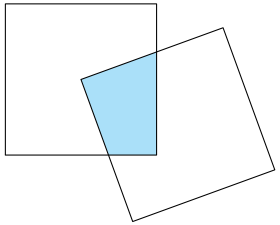
$$|EF| = |CE| - |CF| = \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4}.$$

Opgave 2.1. Rektanglet $ABCD$ er dobbelt så bredt som det er højt, og rektanglet $EFCG$ er dobbelt så højt som det er bredt. Punktet E ligger på diagonalen BD.



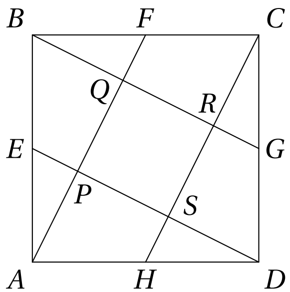
Hvor stor en brøkdel udgør det lille rektangels areal af det stores?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2004)

Opgave 2.2. To kvadrater, begge med sidelængde 1, er anbragt således at det ene har en vinkelspids i det andets midtpunkt. Bestem arealet af det blå område.



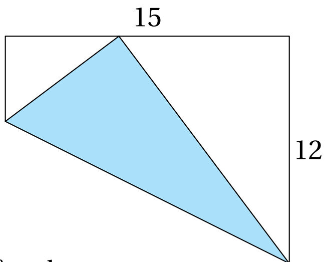
(Georg Mohr-Konkurrencen 1997)

Opgave 2.3. Firkant $ABCD$ er et kvadrat med sidelængden 1, og punkterne E, F, G og H er sidernes midtpunkter.



Bestem arealet af firkant $PQRS$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2000)

Opgave 2.4. Et rektangulært stykke papir har sidelængderne 12 og 15. Et hjørne bukkes om som vist på figuren.

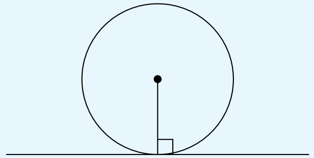


Bestem arealet af den blå trekant.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1993)

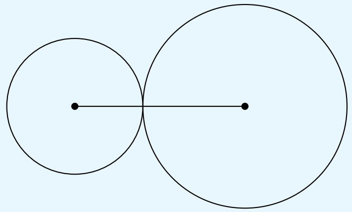
3 Find den retvinklede trekant

Tip: Kan du finde en interessant retvinklet trekant?

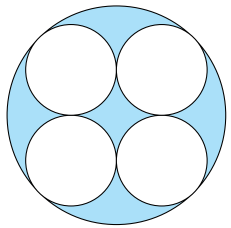
De interessante retvinklede trekanter er ikke altid synlige på figuren, man skal selv opdage dem! Når man leder efter retvinklede trekanter, er det vigtigt at huske at hvis en linje tangerer en cirkel, så står linjen fra centrum til røringspunktet vinkelret på tangenten.



Husk desuden at hvis to cirkler tangerer hinanden, da går linjen gennem de to centre også gennem cirklernes røringspunkt.

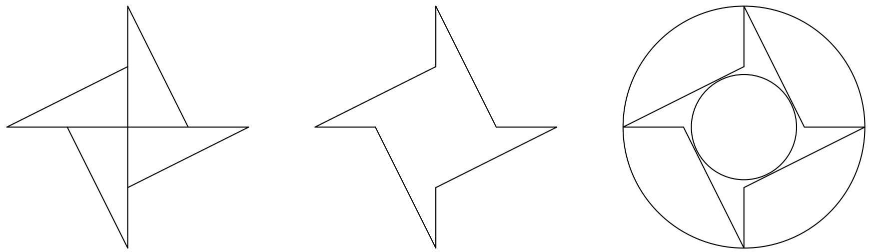


Opgave 3.1. På den viste figur har de små cirkler radius 1.



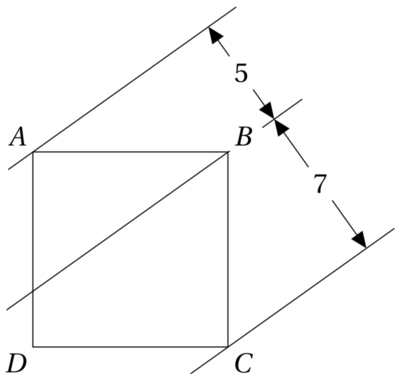
Beregn arealet af den blå del af figuren.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1998)

Opgave 3.2. Fire retvinklede trekanter hver med katetelængderne 1 og 2 samles til en figur som vist.



Hvor stor en brøkdel udgør den lille cirkels areal af den stores?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2010)

Opgave 3.3. På tre parallelle linjer med afstande som angivet på figuren ligger punkterne A, B og C således at firkant $ABCD$ er et kvadrat.



Find arealet af dette kvadrat.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1998)

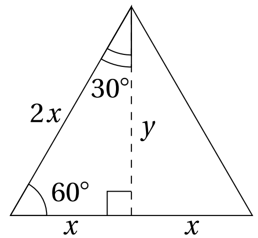
4 30°- 60°- 90°-trekanter

Trekanter med vinklerne 30°- 60°- 90°

I en retvinklet trekant hvor de spidse vinkler er 30° og 60°, gælder:

- Hypotenusen er dobbelt så lang som den korteste katete.
- Den længste katete er $\sqrt{3}$ gange længden af den korteste katete, dvs. den er $\frac{\sqrt{3}}{2}$ gange længden af hypotenusen.

Bevis Vi spejler trekanten i den længste katete så vi får en trekant hvor alle vinkler er 60°, dvs. en ligesidet trekant.



Da den nye trekant er ligesidet, ses det umiddelbart at hypotenusen er dobbelt så lang som den korteste katete.

Den længste katete kan findes ved Pythagoras' sætning. Vi kalder længden af den korteste katete for x og længden af den længste katete for y. Da er

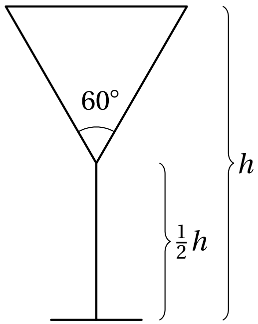
$$y = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x.$$

Dermed er den længste katete $\sqrt{3}$ gange længden af den korteste katete, dvs. den er $\frac{\sqrt{3}}{2}$ gange længden af hypotenusen.

Tip: Er der en 30°- 60°- 90°**-trekant på figuren?**

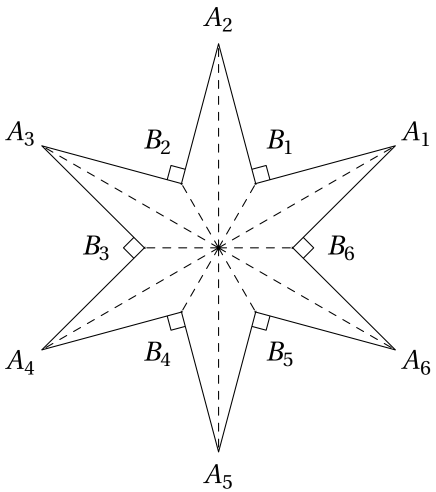
Det er ofte meget anvendeligt at lægge mærke til 30°- 60°- 90°-trekanter og udnytte at forholdet mellem siderne er kendt.

Opgave 4.1. Et vinglas med et tværsnit som vist har den egenskab at en appelsin af form som en kugle med radius 3cm lige netop kan anbringes i glasset uden at rage op over glasset.



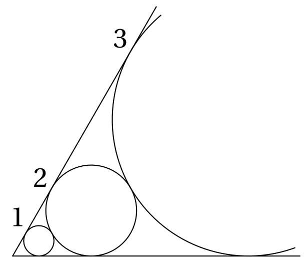
Bestem højden h af glasset.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1994)

Opgave 4.2. Den viste stjerne er symmetrisk om hver af de seks viste diagonaler. Alle forbindelseslinjer fra punkterne $A_1, A_2, \ldots, A_6$ til stjernens centrum har længden 1, og alle de viste vinkler ved $B_1, B_2, \ldots, B_6$ er rette.



Bestem stjernens areal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

Opgave 4.3. Figuren viser en vinkel på 60°, hvori der ligger 2007 nummererede cirkler (kun de tre første er vist på figuren). Cirklerne er nummererede efter størrelse. Cirklerne tangerer vinklens ben og hinanden som vist på figuren. Cirkel nummer 1 har radius 1.



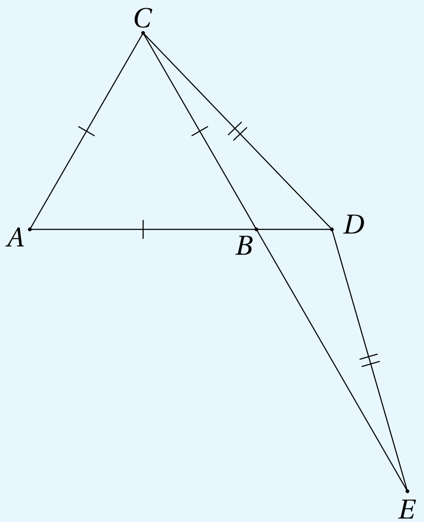
Bestem radius af cirkel nummer 2007.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2007)

5 Tegn den smarte linje

Geometriopgaver bliver som regel svære når man selv skal indføre en smart linje for at løse dem, og en del af kunsten når man arbejder med geometri, er ofte at gennemskue hvilken ekstra linje eller nyt punkt man skal tegne.

Eksempel Opgave 3 fra Georg Mohr-Konkurrencen 2015 var en opgave hvor en smart ekstra linje var hele nøglen til at løse opgaven.

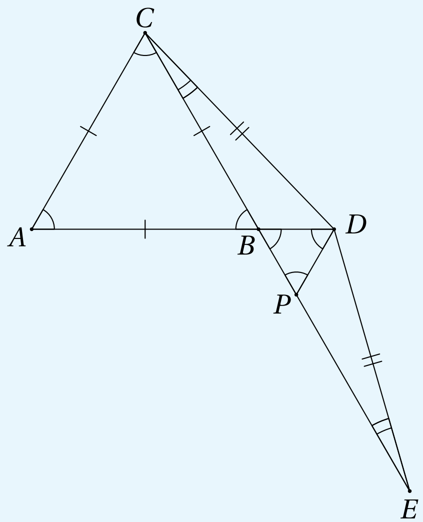
I opgaven har vi en ligesidet trekant ABC. Punktet D ligger på forlængelsen af AB ud over B, punktet E ligger på forlængelsen af CB ud over B, og $|CD| = |DE|$.



Opgaven går ud på at bevise at $|AD| = |BE|$.

Allerførst betragter vi figuren og lægger mærke til alle de vinkler der er 60°, da $\triangle ABC$ er ligesidet, og at $\triangle CDE$ er ligebenet, dvs. vinklerne ved C og E er ens. Det giver overblik over hvad de ens længder på figuren umiddelbart medfører.

Derefter fokuserer vi på det vi skal vise. Linjestykket AD er inddelt i to dele. En idé er derfor at inddele linjestykket BE i to dele der svarer til de to dele af AD. Det giver idéen til at tegne et punkt P på BE så $|BP| = |BD|$. Da vinklen ved B i $\triangle BDP$ er 60°, er den nye trekant ligesidet, dvs. alle vinkler er 60°.



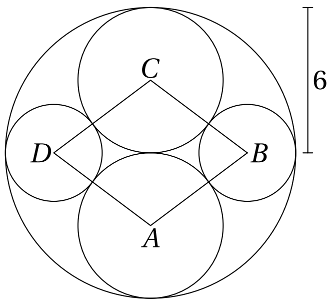
Nu mangler vi at vise at $|PE|$ er sidelængden i $\triangle ABC$. Hvis vi betragter figuren med viden om at dette er sandt da vi jo ved at det er det vi skal bevise, så kan vi se at $\triangle BCD$ og $\triangle PED$ må være kongruente. Hvis vi kan bevise dette, har vi bevist det ønskede. Den måde at tænke på svarer til at "tænke baglæns". Hvis vi ved hvad vi skal nå frem til, kan vi så at sige indse hvad det er ensbetydende med, og vise dette i stedet.

Vi ved allerede at $\angle BCD = \angle DEP$. Desuden ved vi at vinkel B i $\triangle BCD$ er $180° - 60° = 120°$, og tilsvarende at vinkel P i $\triangle PED$ er $180° - 60° = 120°$. Altså er $\triangle BCD$ og $\triangle PED$ ensvinklede, og da $|CD| = |DE|$, må de være kongruente. Dette viser at længden af PE er sidelængden i $\triangle ABC$, og altså at $|AD| = |BE|$.

Tip: Tegn den smarte linje
Overvej hvad du skal nå frem til, og om der er en linje eller et nyt punkt der vil være smart at indføre for at vise dette.

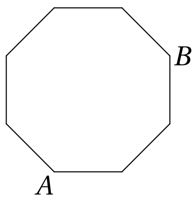
Tip: "Tænk baglæns"
Hvis du skal bevise noget, er det nogle gange en god idé et "tænke baglæns", dvs. at overveje hvordan beviset vil slutte. Fx at det du skal bevise er ensbetydende med noget andet som det er nemmere at bevise.

Opgave 5.1. Inden i en cirkel med radius 6 ligger fire mindre cirkler med centre A, B, C og D. Cirklerne rører hinanden som vist. Det punkt hvori cirklerne med centrum i A og C rører hinanden, er den store cirkels centrum.



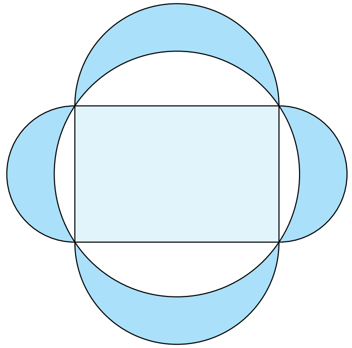
Beregn arealet af firkant ABCD.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2012)

Opgave 5.2. I ottekanten vist nedenfor har alle sider længden 1, og alle vinkler er lige store.



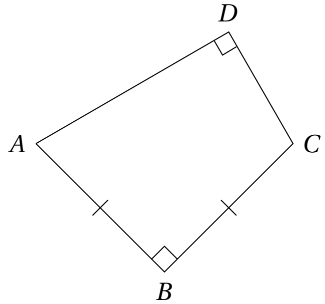
Bestem afstanden mellem hjørnerne A og B.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2011)

Opgave 5.3. Figuren viser et rektangel, dets omskrevne cirkel og fire halvcirkler, der har rektanglets sider som diametre.



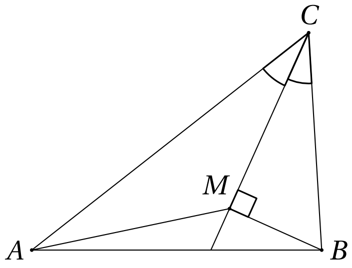
Bevis at de fire blå måneformede områders arealer tilsammen er lig med arealet af det lyseblå rektangel.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2013)

Opgave 5.4. Bevis at alle firkanter $ABCD$ hvor $\angle B = \angle D = 90°$, $|AB| = |BC|$ og $|AD| + |DC| = 1$, har samme areal.



(Georg Mohr-Konkurrencen 2016)

Opgave 5.5. I $\triangle ABC$ er $|AC| > |BC|$. Punktet M ligger på vinkelhalveringslinjen til vinkel C, og BM er vinkelret på vinkelhalveringslinjen.

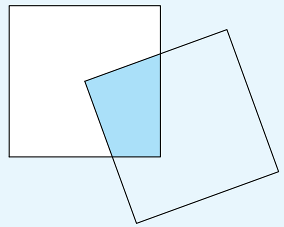


Bevis at arealet af $\triangle AMC$ er halvt så stort som arealet af $\triangle ABC$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2021)

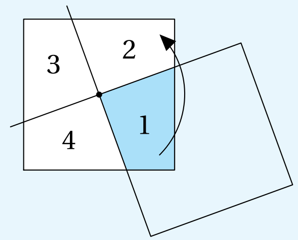
6 Drej figuren

Nu skal vi se hvordan man kan løse geometriopgaver ved at dreje dele af en figur. Vi har tidligere løst opgave 1 fra Georg Mohr-Konkurrencen 1997 ved at benytte ensvinklede trekanter, men den kan også løses ved at dreje figuren.

Eksempel To kvadrater, begge med sidelængde 1, er anbragt således at det ene har en vinkelspids i det andets midtpunkt. Bestem arealet af det blå område.



Ved at forlænge nogle linjer som vist, inddeles det ene kvadrat i fire dele af to linjer som står vinkelret på hinanden og går gennem kvadratets midtpunkt .

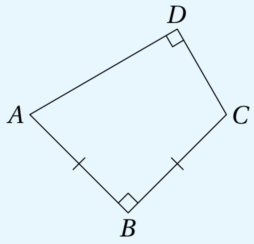


Når et kvadrat drejes 90° om dets midtpunkt, så drejes det over i sig selv. Her drejes de to linjer gennem dets midtpunkt også over i hinanden da de står vinkelret på hinanden, og det betyder at område 1 drejes over i område 2, område 2 drejes over i område 3, osv.

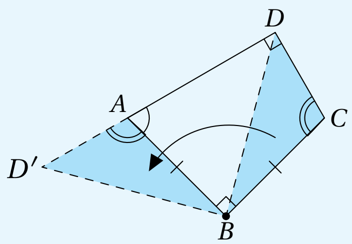
Dermed er alle fire områder kongruente, og de har derfor samme areal. Altså er arealet af det blå område $\frac{1}{4}$.

Et andet eksempel er opgave 3 fra Georg Mohr-Konkurrencen 2016 som var en opgave i forrige kapitel, men her ser vi på en anden løsning af opgaven der udnytter en drejning.

Eksempel Bevis at alle firkanter $ABCD$ hvor $\angle B = \angle D = 90°$, $|AB| = |BC|$ og $|AD| + |DC| = 1$, har samme areal.



I denne opgave er det ikke let at gennemskue hvad en smart drejning er. En oplysning i opgaven der umiddelbart kan virke svær at anvende, er $|AD|+|DC| = 1$. En idé er at få disse to linjestykker til at ligge i forlængelse af hinanden så vi får en side med længde 1. Betragt derfor en 90° drejning af $\triangle BCD$ i punktet B som vist:



Da vinkel B er ret og $|AB| = |BC|$, drejes C i A. Lad D' være det punkt D drejes over i. Da vinkelsummen i en firkant er 360°, må summen af de to ikke rette vinkler A og C være 180°. Det betyder at punkterne D, A og D' ligger på en linje. Nu har vi skabt en $\triangle BDD'$ med samme areal som firkant $ABCD$. Denne trekant er retvinklet da vinklen ved B er ret. Desuden er den ligebenet da $|BD| = |BD'|$ fordi den ene er fremkommet ved en drejning af den anden. Trekant DBD' er derfor en retvinklet ligesidet trekant med hypotenuse 1, dvs. den har areal $\frac{1}{4}$.

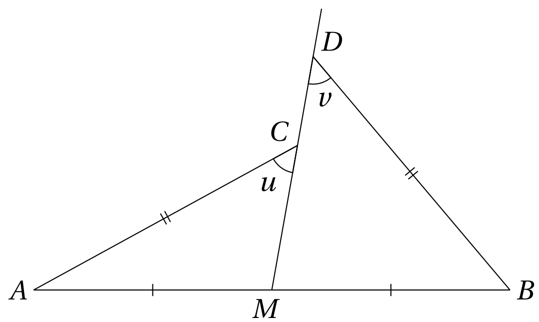
Bemærk at i opgaven er firkant $ABCD$ ikke entydigt bestemt, men ved at tegne diagonalen og dreje den ene del af firkanten, så skaber vi en retvinklet ligebenet trekant med hypotenuse 1. Vi får altså den samme trekant uanset hvilken firkant $ABCD$ med de ønskede egenskaber som vi ser på. Det er det som er det smarte ved denne drejning.

Tip: Drej eller spejl figuren

Overvej om du kan dreje en del af figuren fx for at vise at to dele er kongruente, eller for at få linjestykker eller andet til at ligge mere hensigtsmæssigt i forhold til hinanden.

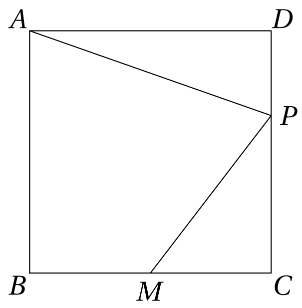
Nogle gange skal man ikke dreje, men spejle.

Opgave 6.1. På en halvlinje fra midtpunktet M af et linjestykke AB ligger punkterne C og D så $|AC| = |BD|$.



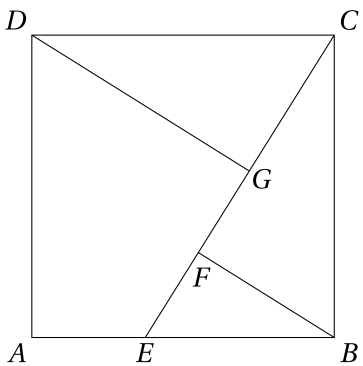
Bevis at vinklerne $u = \angle ACM$ og $v = \angle BDM$ er lige store.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2014)

Opgave 6.2. I kvadratet $ABCD$ med sidelængde 2 er M midtpunkt af BC og P et punkt på DC. Bestem den mindste værdi af $|AP|+|PM|$.



(Georg Mohr-Konkurrencen 2001)

Opgave 6.3. Lad E være et vilkårligt punkt forskelligt fra A og B på siden AB af et kvadrat $ABCD$, og lad F og G være punkter på linjestykket CE så BF og DG står vinkelret på CE.

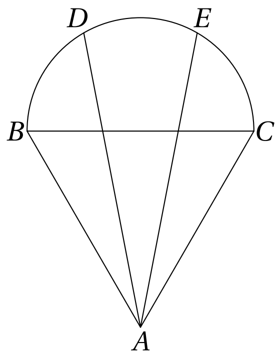


Bevis at $|DF|=|AG|$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2009)

7 Udfordringer

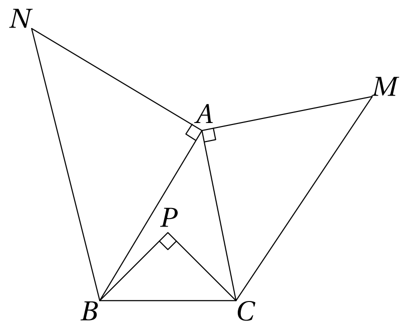
I dette sidste afsnit er samlet nogle udfordrende opgaver fra Georg Mohr-Konkurrencen som typisk kræver at du kombinerer flere af teknikkerne vi har set på indtil nu.

Opgave 7.1. En ligesidet $\triangle ABC$ er givet. Med BC som diameter tegnes en halvcirkel uden for trekanten. På halvcirklen vælges punkter D og E så buelængderne BD, DE og EC er lige store.



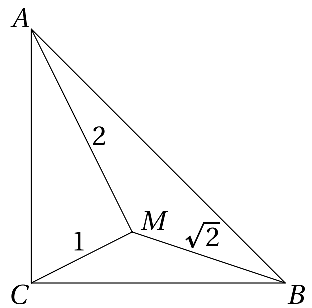
Bevis at linjestykkerne AD og AE deler siden BC i tre lige store stykker.

Opgave 7.2. Punktet P ligger inden i $\triangle ABC$ så $\triangle BPC$ er ligebenet, og vinkel P er ret. Desuden er $\triangle BAN$ og $\triangle CAM$ begge ligebenede og med en ret vinkel i A, og begge ligger uden for $\triangle ABC$.



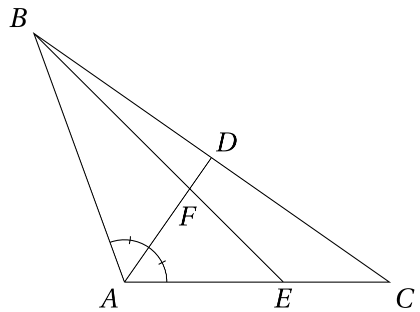
Vis at $\triangle MNP$ er ligebenet og retvinklet. (Georg Mohr-Konkurrencen 2005)

Opgave 7.3. I $\triangle ABC$ er $\angle C = 90°$ og $|AC| = |BC|$. Desuden er M et indre punkt i trekanten så $|MC| = 1$, $|MA| = 2$ og $|MB| = \sqrt{2}$.



Beregn $|AB|$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2002)

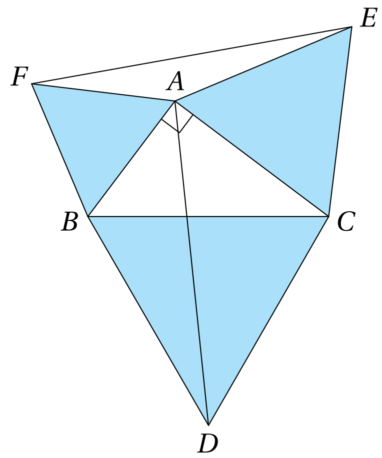
Opgave 7.4. I trekant ABC skærer vinkelhalveringslinjen fra A siden BC i punktet D. Punktet E ligger på siden AC, og linjerne AD og BE skærer hinanden i punktet F. Desuden gælder $\dfrac{|AF|}{|FD|} = 3$ og $\dfrac{|BF|}{|FE|} = \dfrac{5}{3}$.



Bevis at $|AB| = |AC|$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2013)

Opgave 7.5. I sekskant $ABCDEF$ er alle vinkler lige store. Om sidelængderne gælder $|AB| = |CD| = |EF| = 3$ og $|BC| = |DE| = |FA| = 2$. Diagonalerne AD og CF skærer hinanden i punktet G. Punktet H ligger på siden CD således at $|DH| = 1$. Bevis at $\triangle EGH$ er ligesidet.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2019)

Opgave 7.6. I nedenstående figur er trekanterne BCD, CAE og ABF ligesidede, og trekanten ABC er retvinklet med $\angle A = 90°$.

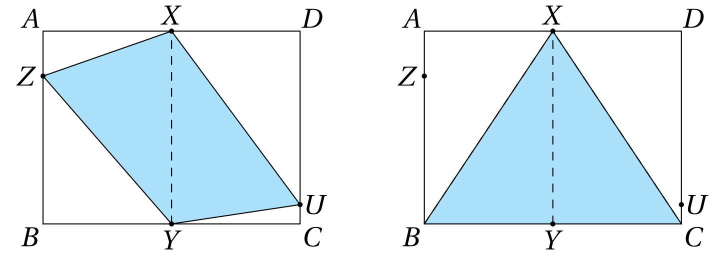


Bevis at $|AD| = |EF|$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2019)

Opgave 7.7. Om femkant $ABCDE$ vides at vinkel A og vinkel C er rette, og at siderne $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 10$ og $|DE| = 6$. Endvidere gælder det at punktet C', der fremkommer ved spejling af C i linjen BD, ligger på linjestykket AE. Find vinkel E.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1997)

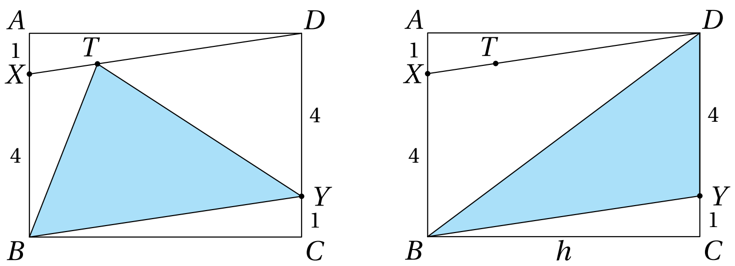
8 Løsninger

Opgave 1.1 Inddel firkant $XZYU$ i to trekanter $\triangle XYZ$ og $\triangle XYU$



Da AB er parallel med YX, må $\triangle XYZ$ have samme areal som $\triangle XYB$ da de har samme grundlinje XY og samme højde. Tilsvarende har $\triangle XYU$ samme areal som $\triangle XYC$. Altså udgør arealet af firkant $XZYU$ halvdelen af arealet af rektangel $ABCD$.

Opgave 1.2 Firkant $BXDY$ er et parallelogram da siderne BX og DY er parallelle og lige lange. Altså er linjen XD parallel med linjen BY.



Hvis vi betragter BY som grundlinje i $\triangle BYT$, betyder det at vi kan flytte T langs linjen XD uden at ændre arealet af $\triangle BYT$. Dermed er arealet af $\triangle BYT$ lig med arealet af $\triangle BYD$. Kald bredden af rektangel $ABCD$ for h. Da er h højde i $\triangle BYD$ hvor vi nu betragter DY som grundlinje. Dermed er

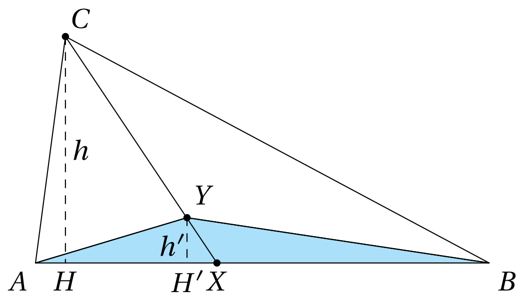
$$\text{areal}(\triangle BYT) = \text{areal}(\triangle BYD) = \frac{h\cdot 4}{2} = 2h.$$

Tilsvarende er

$$\text{areal}(ABCD) = (1+4)\cdot h = 5h.$$

Dermed udgør arealet af $\triangle BYT$ $\frac{2}{5}$ af arealet af rektangel $ABCD$.

Opgave 1.3 Betragt højden h fra C i $\triangle ABC$ og højden h' fra Y i $\triangle ABY$. Fodpunkterne for de to højder kaldes henholdsvis H og H'

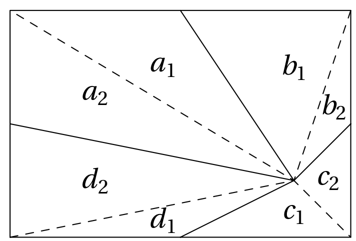


Trekanterne $\triangle CXH$ og $\triangle YXH'$ er nu ensvinklede da de har samme vinkel ved X, og begge er retvinklede. De betyder at forholdet mellem ensliggende sider er det samme, dvs.

$$\frac{h'}{h} = \frac{|XY|}{|XC|} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Dermed udgør arealet af $\triangle ABY$ $\frac{1}{5}$ af arealet af $\triangle ABC$.

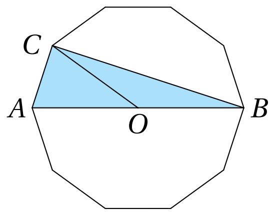
Opgave 1.4 Opdel som vist områderne ved hjælp af forbindelseslinjer til rektanglets hjørner, og lad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 betegne arealerne af de fremkomne trekanter.



Da trekanter med samme højde og grundlinje har samme areal, er $a_1 = b_1$, $b_2 = c_2$, $c_1 = d_1$ og $d_2 = a_2$. Dermed er

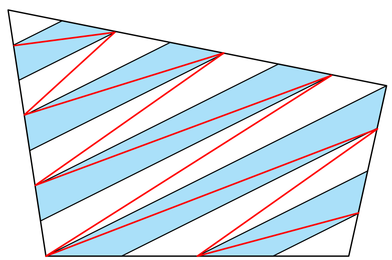
$$a + c = a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = b_1 + d_2 + d_1 + b_2 = b + d.$$

Opgave 1.5 Lad O være tikantens midtpunkt. Punktet O er midtpunktet af AB, og ved at forbinde O med tikantens hjørner opdeles tikanten i ti kongruente trekanter. Dermed udgør arealet af $\triangle AOC$ en tiendedel af tikantens areal.

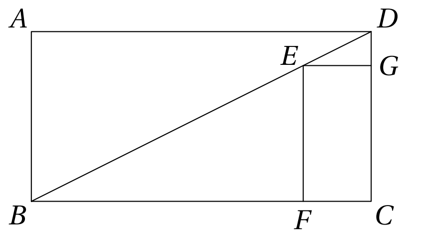


Trekant ABC har dobbelt så stort areal som $\triangle AOC$ da grundlinjen AB i $\triangle ABC$ er dobbelt så lang som grundlinjen AO i $\triangle AOC$, mens højden fra C er den samme. Trekant ABC udgør altså $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ af tikantens areal.

Opgave 1.6 Med de viste hjælpelinjer opdeles firkanten i en række par af trekanter. Hvert par består af en hvid og en blå trekant der har en side fælles; med denne side som grundlinje har de to trekanter samme højde fordi striberne er lige brede, og derfor har de så samme areal. Det samlede hvide areal har derfor samme størrelse som det samlede blå areal, og firkantens areal er derfor $2 \cdot 10 = 20$.



Opgave 2.1 Kald længden af linjestykket DG for x. Trekanterne EGD og BCD er ensvinklede da siderne BC og EG er parallelle. Da BC er dobbelt så lang som CD, må EG også være dobbelt så lang som GD, altså $|EG| = 2x$. Yderligere er GC dobbelt så lang som EG, altså $|GC| = 4x$.

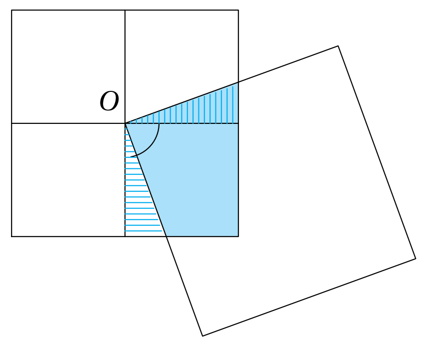


Det lille rektangel $EFCG$ har derfor sidelængderne $2x$ og $4x$, mens det store rektangel $ABCD$ har sidelængderne $|DC| = |DG| + |GC| = 5x$ og $|BC| = 2|DC| = 10x$. Arealet af det lille rektangel udgør dermed brøkdelen

$$\frac{2x \cdot 4x}{5x \cdot 10x} = \frac{4}{25}$$

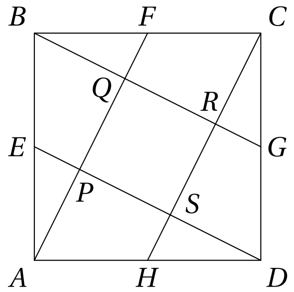
af arealet af det store rektangel.

Opgave 2.2 Kald midten af det første kvadrat for O, og tegn linjer fra O vinkelret på kvadratets sider som vist så kvadratet inddeles i fire lige store dele med areal $\frac{1}{4}$.



Derved fremkommer to små retvinklede trekanter. De er ensvinklede da vinklen ved O i begge trekanter summerer til $90°$ sammen med den markerede vinkel på tegningen. Trekanterne må desuden være kongruente fordi deres længste katete er afstanden fra O til kvadratets sider. Dermed er arealet af den blå firkant lig med arealet af en af de fire lige store dele af kvadratet, dvs. det er $\frac{1}{4}$.

Opgave 2.3 Af symmetrigrunde er alle vinkler ved P, Q, R og S rette. Trekant CGR er derfor ensvinklet med $\triangle CDS$ da de begge er rette og deler vinklen ved C. Da G er midtpunktet af CD, må forholdet mellem dem være $1:2$. Kald længden af CR for x. Da er længden af CS lig $2x$, og af symmetrigrunde er længden af SD også x.



Nu har vi en retvinklet $\triangle CDS$ hvor længden af kateterne er x og $2x$, mens længden af hypotenusen er 1, dvs. ifølge Pythagoras' sætning er

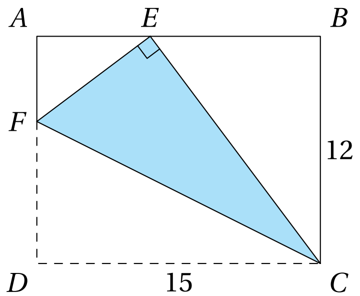
$$x^2+(2x)^2=1^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\frac{1}{5}.$$

Firkant $PQRS$ er et kvadrat med sidelængde x, dvs. dets areal er $x^2=\frac{1}{5}$.

Opgave 2.4 Bemærk først at $|CE|=15$ da det er bredden af rektanglet. Vha. Pythagoras' sætning kan vi nu udregne længden af EB.

$$|EB|=\sqrt{|CE|^2-|BC|^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9.$$

Dermed er $|AE|=|AB|-|EB|=15-9=6$.



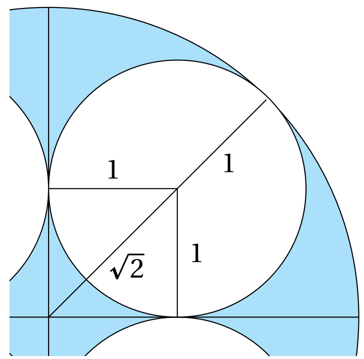
Trekanterne AEF og BCE er ensvinklede da de begge er retvinklede, og da vinkel E i $\triangle AEF$ må være lig med vinkel C i $\triangle BCE$ da de begge summerer til 90° med vinkel E i $\triangle BCE$. Forholdet mellem ensliggende sider i de to trekanter er

$$\frac{|AE|}{|BC|}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Dermed er $|EF|=\frac{1}{2}\cdot|CE|=\frac{1}{2}\cdot 15=\frac{15}{2}$, dvs. arealet af den blå trekant er

$$\frac{1}{2}\cdot|EF|\cdot|CE|=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 15=\frac{225}{4}.$$

Opgave 3.1 Tegn to linjer gennem den store cirkels centrum som tangerer de små som vist. Disse må stå vinkelret på hinanden pga. symmetri. Tegn yderligere to linjer fra centrum i en af de små cirkler vinkelret ned på tangenterne som vist. Dermed dannes et lille kvadrat med samme sidelængde som radius i den lille cirkel, dvs. 1.



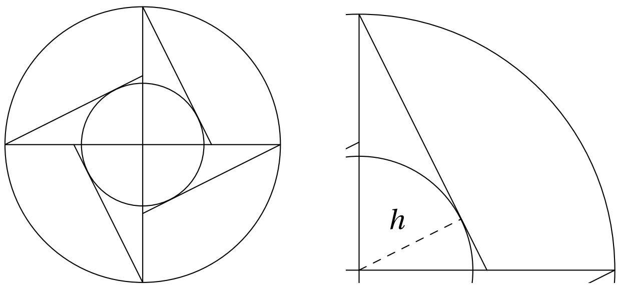
Diagonalen i et kvadrat med sidelængde 1 har ifølge Pythagoras' sætning længde $\sqrt{2}$, dvs. radius i den store cirkel er $\sqrt{2}+1$. Arealet af det blå område er altså

$$\pi\cdot(1+\sqrt{2})^2-4\cdot\pi\cdot 1^2=\pi\cdot(1+2+2\sqrt{2})-4\pi=(2\sqrt{2}-1)\pi.$$

Opgave 3.2 Den lille cirkels og den store cirkels centrum er placeret i det punkt hvor de fire trekanters rette vinkler mødes, da dette punkt har samme afstand til de fire trekanters fjerneste vinkelspidser samt samme afstand til de fire trekanters hypotenuser, som den lille cirkel tangerer.

Radius i den store cirkel er derfor længden af trekantens længste katete, dvs. 2, og den store cirkels areal er $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

Radius i den lille cirkel er lig med højden h på hypotenusen i de retvinklede trekanter fordi hypotenusen er tangent til cirklen, og tangenten står vinkelret på radius i sit røringspunkt.



Længden af hypotenusen er ifølge Pythagoras' sætning $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, og højden h kan findes ved at udtrykke arealet af en af trekanterne på to måder

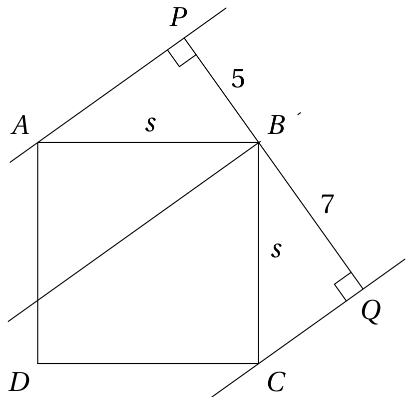
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Den lille cirkels areal er dermed $\pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}\pi$ og den lille cirkels areal udgør derfor

$$\frac{\frac{4}{5}\pi}{4\pi} = \frac{1}{5}$$

af den store cirkels areal.

Opgave 3.3 Indtegn en linje gennem B vinkelret på de tre parallelle linjer så der dannes to retvinklede trekanter ABP og BCQ. Vinkel C i $\triangle BCQ$ er lig med vinkel B i $\triangle ABP$ da de begge sammen med vinkel B i $\triangle BCQ$ summerer til 90°. Dermed er trekanterne ABP og BCQ ensvinklede.

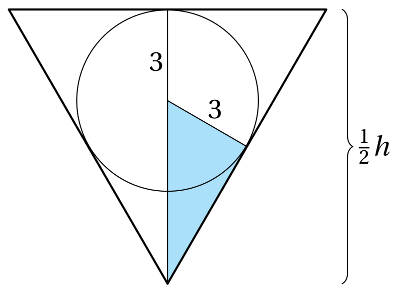


Da længden af deres hypotenuser begge er kvadratets sidelængde s, må de være kongruente. Altså har deres kateter længde 5 og 7, mens der om deres hypotenuse s ifølge Pythagoras' sætning gælder at

$$s^2 = 5^2 + 7^2 = 74.$$

Kvadratets areal er dermed $s^2 = 74$.

Opgave 4.1 Tegn linjer gennem centrum af appelsinen som vist på figuren, og husk at en linje fra centrum af en cirkel til røringenspunktet for en tangent står vinkelret på tangenten.



Den blå trekant er retvinklet, og vinklen ved glassets bund er $\frac{60°}{2} = 30°$. Dermed er den en 30°-60°-90°-trekant. Det betyder at hypotenusen er dobbelt så lang som den lille katete, dvs. $2 \cdot 3 = 6$. Samlet er højden af glasset uden stilk $\frac{1}{2}h = 6+3 = 9$, dvs. glassets højde er $h = 2 \cdot 9 = 18$.

Opgave 4.2 På figuren til højre ses en sjettedel af stjernen. Da

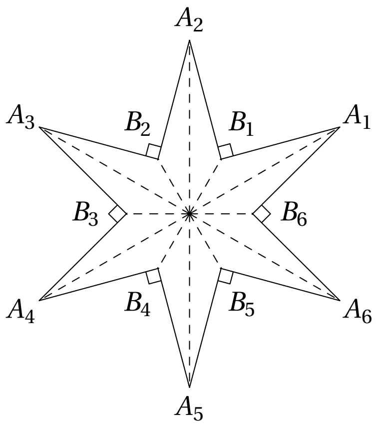
$$\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{6} = 60°$$

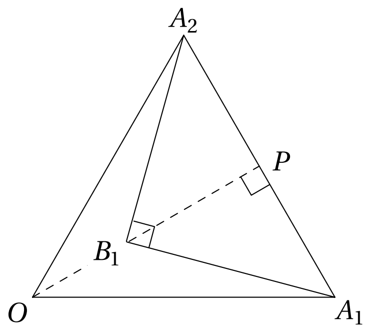
og $|OA_1| = |OA_2| = 1$, er $\triangle OA_1A_2$ en ligesidet trekant, og dermed har den højde

$$|OP| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

og areal

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$





Trekant $A_1A_2B_1$ er en retvinklet ligebenet trekant med hypotenuse 1, og dermed er højden på hypotenusen $\frac{1}{2}$. Altså er arealet af $\triangle A_1A_2B_1$ lig med

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

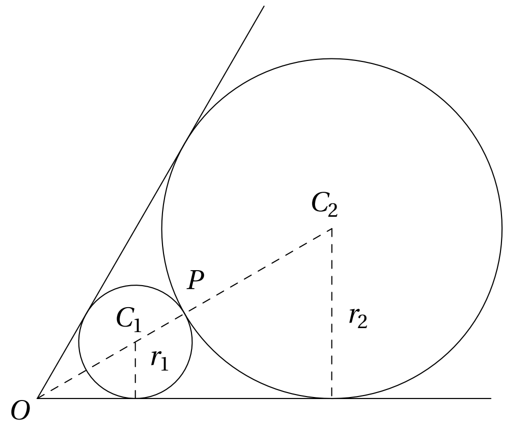
Dermed er arealet af firkant

$$OA_1B_1A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Arealet af hele stjernen er derfor

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4} = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}.$$

Opgave 4.3 Vi viser at når vi i en 60° vinkel har to cirkler der tangerer som vist, da har den største en radius der er 3 gange så stor som den mindste.



Kald radius og centrum i den lille cirkel for henholdsvis r_1 og C_1 og tilsvarende for den store. På figuren er tegnet en linje gennem vinkelspidsen og de to centre, og denne linje deler vinklen i to vinkler på 30°. Desuden er tegnet linjer fra cirklernes centre til røringspunktet for tangenten, og vi ved at disse linjer står vinkelret på tangenten. Dermed har vi skabt to 30°-60°-90°-trekanter, og her ved vi at hypotenusen er dobbelt så lang som den mindste katete. Afstanden fra en cirkels centrum til vinkelspidsen O er derfor altid dobbelt så stor som cirklens radius, dvs. $|OC_1| = 2r_1$ og $|OC_2| = 2r_2$. Hvis vi lader P være røringspunktet mellem de to cirkler, betyder det at

$$|OP| = |OC_1| + |C_1P| = 2r_1 + r_1 = 3r_1.$$

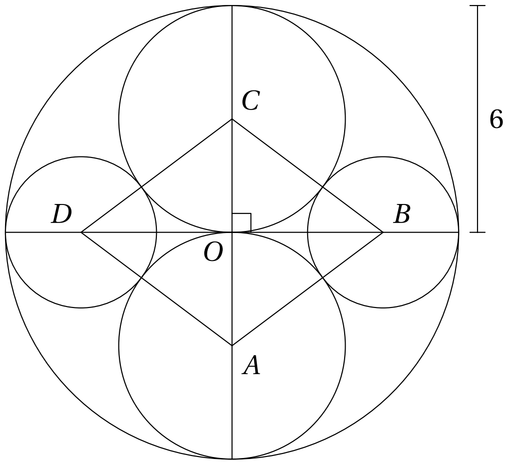
Tilsvarende ved vi at

$$|OP| = |OC_2| - |PC_2| = 2r_2 - r_2 = r_2.$$

Dermed er $r_2 = 3r_1$, hvilken netop var hvad vi ville vise. Da forholdet mellem radius i to nabocirkler dermed altid er 3, må $r_{2007} = r_1 \cdot 3^{2006} = 3^{2006}$.

Opgave 5.1 De smarte linjer i denne opgave viser sig at være linjerne AC og BD da det giver os en vigtig retvinklet trekant:

Først tegner vi en linje gennem centrene B og D. Denne linje må af symmetrigrunde tangerer de to cirkler med centre A og C, og derfor står linjen vinkelret på linjen AC.



Diameteren i cirklerne med centrum A og C svarer til radius i den store cirkel, dvs. de har radius $\frac{6}{2}=3$.

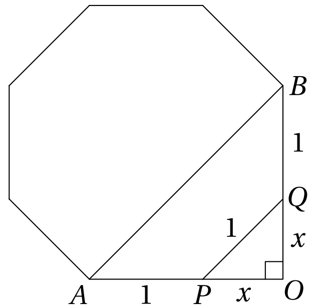
Kald radius i cirklerne med centrum B og D for r. Trekant OBC er dermed en retvinklet trekant hvor $|OC|=3$, $|BO|=6-r$ og $|BC|=3+r$. Ifølge Pythagoras' sætning er

$$(r+3)^2=3^2+(6-r)^2 \quad\Leftrightarrow\quad r^2+9+6r=9+36+r^2-12r \quad\Leftrightarrow\quad r=2.$$

Nu er arealet af firkant $ABCD$ lig med

$$4\cdot\frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|CO|=2\cdot(6-2)\cdot 3=24.$$

Opgave 5.2 Da ottekanten er regulær, dvs. alle vinkler er lige store, og alle sider er ens, må den drejes over i sig selv ved en drejning gennem dens midtpunkt med en vinkel på $\frac{360°}{8}\cdot 2=90°$. Det betyder at vi kan skabe en retvinklet trekant ved at forlænge to af siderne som vist.



Da der er symmetri, er $\triangle OPQ$ og $\triangle OAB$ begge ligebenede retvinklede trekanter, dvs. de er ensvinklede.

Kald længden af kateten i $\triangle OPQ$ for x. Pythagoras' sætning giver at

$$x^2+x^2=1^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Forholdet mellem ensliggende sider i $\triangle OAB$ og $\triangle OPQ$ er nu

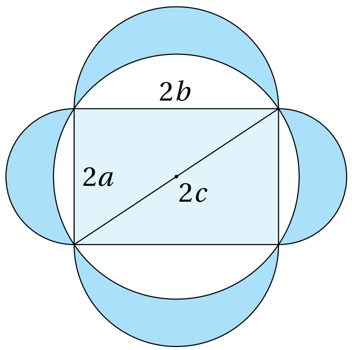
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}.$$

Dermed er

$$|AB|=(1+\sqrt{2})|PQ|=1+\sqrt{2}.$$

Opgave 5.3 Vi skal finde en sammenhæng mellem diametrene i alle tre cirkelstørrelser for at kunne løse opgaven, og ved at tegne en diagonal i rektanglet får vi vha. Pythagoras' sætning en sådan sammenhæng. Derfor er en diagonal i rektanglet den smarte linje her.

Lad $2a$, $2b$ og $2c$ være diametrene i de tre cirkler som vist på figuren, og dermed også længden af henholdsvis siderne og diagonalen i rektanglet. Der gælder ifølge Pythagoras' sætning $(2a)^2+(2b)^2=(2c)^2$, og dermed $a^2+b^2=c^2$.



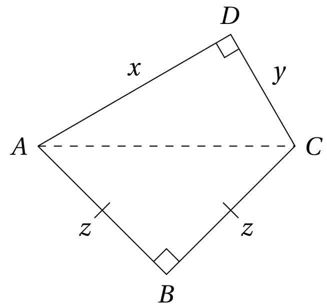
Arealet af det lyseblå rektangel er $2a\cdot 2b=4ab$. Arealet af de fire hvide områder er lig med arealet af den store cirkel minus arealet af rektanglet, dvs. $\pi\cdot c^2-4ab$. Arealet af de fire blå måneformede områder er arealet af to cirkler med radius a og b minus arealet af de hvide område, dvs.

$$\pi\cdot a^2+\pi\cdot b^2-\left(\pi\cdot c^2-4ab\right)=\pi\cdot\left(a^2+b^2-c^2\right)+4ab=4ab,$$

hvilket netop er arealet af rektanglet.

Opgave 5.4 Idéen er at opdele firkanten i to trekanter som vi kan bestemme arealet af. Da det er nemt at bestemme areal af retvinklede trekanter, inddeler vi firkanten ved at tegne diagonalen AC.

Sæt $x=|AD|$, $y=|DC|$ og $z=|AB|=|BC|$. Firkantens areal udregnes som summen af arealerne af $\triangle ABC$ og $\triangle ACD$, altså $\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}xy$.



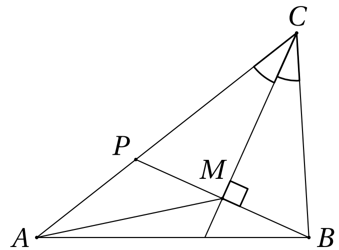
Pythagoras' sætning anvendt på $\triangle ABC$ og $\triangle ACD$ giver $2z^2=|AC|^2$ og $x^2+y^2=|AC|^2$ og dermed $2z^2=x^2+y^2$. Altså er firkantens areal

$$\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}xy=\frac{1}{4}(2z^2+2xy)=\frac{1}{4}(x^2+y^2+2xy)=\frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Alle firkanter der opfylder betingelsen $x+y=1$, har altså samme areal, nemlig arealet $\frac{1}{4}$.

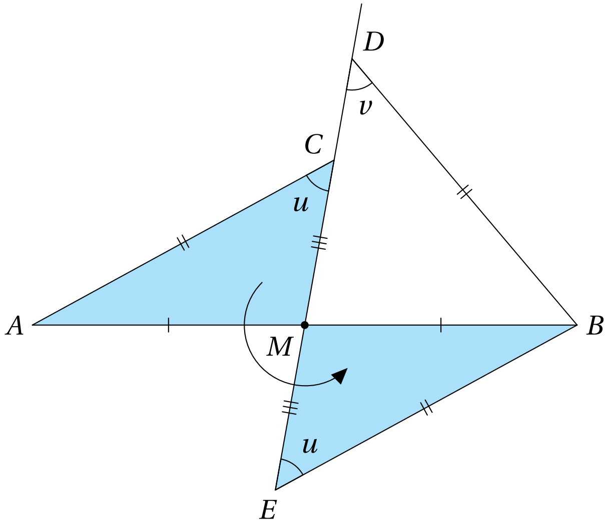
Opgave 5.5 Idéen i denne opgave er at inddele $\triangle AMC$ i to dele så den ene del har samme areal som $\triangle BMC$ og den anden samme areal som $\triangle ABM$ da det viser det ønskede.

Lad P være skæringspunktet mellem forlængelsen af BM og siden AC. Da $|AC|>|BC|$, ligger punktet P mellem A og C. Vi viser nu at arealet af $\triangle CMP$ er lig arealet af $\triangle CMB$, og at arealet af $\triangle AMP$ lig arealet af $\triangle ABM$, da det viser at arealet af $\triangle AMC$ er halvt så stort som arealet af $\triangle ABC$.

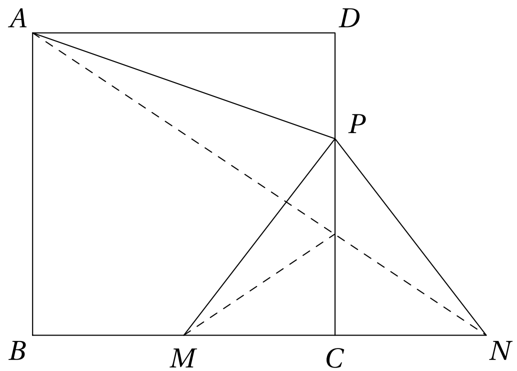


De to retvinklede trekanter CMP og CMB er kongruente da de deler siden CM og har samme vinkel ved C. Deraf følger at de har samme areal. Det følger også at $|MP|=|MB|$. Trekanterne AMP og AMB har dermed lige lange grundlinjer MP og MB, og da de har samme højde fra A, har de samme areal.

Opgave 6.1 Drej $\triangle ACM$ 180° om punktet M. Punktet A drejes over i B da $|AM| = |BM|$. Lad E være det punkt som C drejes over i. Dette punkt må ligge på forlængelsen af linjen MC da det er en drejning på 180° af C i punktet M, dvs. punkterne D, C, M og E ligger på linje. Af drejningen følger at $|BE| = |AC|$ og dermed $|BE| = |BD|$. Trekant EDB er altså ligebenet, og derfor er vinklerne u og v lige store.



Opgave 6.2 Punktet M spejles i linjen CD, og spejlbilledet kaldes N.

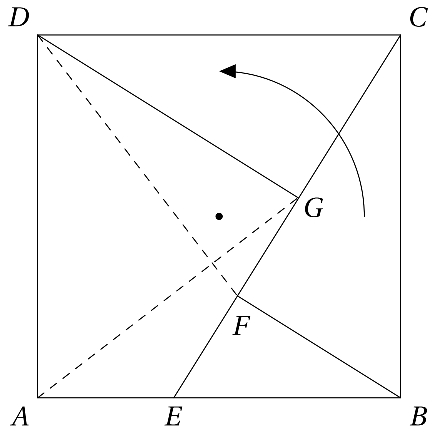


Dermed er $|AP| + |PM|$ lig med længden $|AP| + |PN|$ af den brudte linje fra A til N via P, og denne er kortest når P vælges på linjestykket AN. Med denne placering af P giver Pythagoras' sætning at

$$|AP| + |PM| = |AN| = \sqrt{|AB|^2 + |BN|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Opgave 6.3 Idéen i denne løsning er et dreje linjestykket DF over i AG da det viser at de er lige lange.

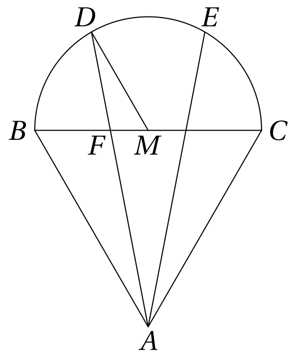
Ved en drejning på 90° omkring centrum af kvadratet $ABCD$ i retningen der fører B over i C, vil C føres over i D. Da linjen BF står vinkelret på linjen CG, og linjen CF står vinkelret på linjen DG, vil drejningen føre linjen BF i linjen CG og linjen CF i linjen DG. Dermed føres skæringspunktet F mellem linjerne BF og CF over i skæringspunktet G mellem linjerne CG og DG.



Ved drejningen føres F altså i G og D i A, og dermed føres linjestykket DF i linjestykket AG. Altså er de to linjestykker DF og AG lige lange.

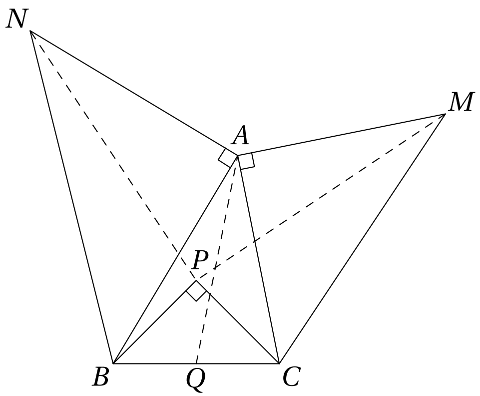
Opgave 7.1 Kald midtpunktet af linjestykket BC for M og skæringen mellem BC og AD for F.

Cirkeludsnittet BMD udgør netop en tredjedel af halvcirklen da buestykket BD udgør en tredjedel af halvcirkelbuen, og dermed er $\angle BMD = 60°$. Kald trekantens sidelængde for s. Radius i halvcirklen er da $\frac{s}{2}$, dvs. at $|MD| = \frac{s}{2}$. Trekanterne FDM og FAB er derfor ensvinklede med forholdet 1 : 2 da $\angle BFA = \angle DFM$, $\angle ABF = 60° = \angle FMD$ og $|AB| = s = 2|DM|$. Af dette følger at $|BF| = 2|FM|$, dvs. $|BF| = \frac{2}{3}|BM| = \frac{1}{3}|BC|$, og altså at BF udgør en tredjedel af BC.



Da figuren er symmetrisk omkring aksen AM, viser dette at linjestykkerne AD og AE deler siden BC i tre lige store stykker.

Opgave 7.2 Lad Q være midtpunktet af siden BC.

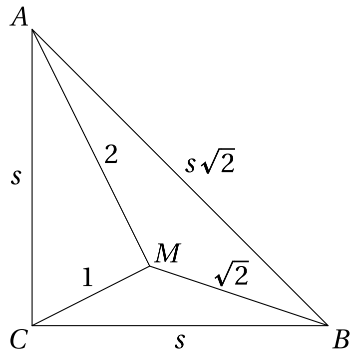


Vi ønsker at vise at $\triangle NBP$ og $\triangle ABQ$ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. Bemærk først at $\angle NBP = 45° + \angle ABP = \angle ABQ$. Ifølge Pythagoras' sætning er $|NB| = \sqrt{2}|AB|$ og $|BP| = \sqrt{2}|BQ|$, hvilket viser at $\triangle NBP$ og $\triangle ABQ$ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. På tilsvarende måde ser man at $\triangle MCP$ og $\triangle ACQ$ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. Dette viser at $|NP| = \sqrt{2}|AQ| = |MP|$. Desuden er

$$\begin{aligned}\angle NPM &= 360° - (\angle NPB + \angle MPC) - \angle BPC = 360° - (\angle AQB + \angle AQC) - 90° \\ &= 360° - 180° - 90° = 90°.\end{aligned}$$

Dermed er $\triangle MNP$ ligebenet og retvinklet.

Opgave 7.3 Kald kateternes længde for s. Ifølge Pythagoras' sætning er længden af hypotenusen $\sqrt{2}s$. Siderne i $\triangle AMB$ er $\sqrt{2}$ gange så store som siderne i $\triangle BMC$, og de to trekanter er dermed ensvinklede.



Nu kan vi udregne vinklerne ved M:

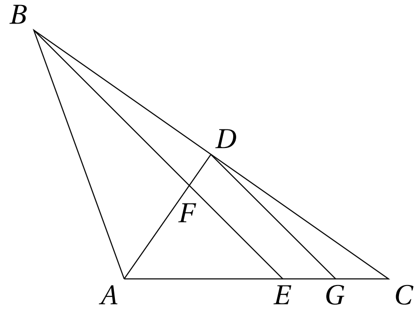
$$\begin{aligned}\angle AMB &= 180° - \left(\angle MAB + \angle MBA\right) = 180° - \left(\angle MBC + \angle MBA\right) \\ &= 180° - 45° = 135°.\end{aligned}$$

Dermed er

$$\angle CMA = 360° - 2 \cdot \angle AMB = 90°.$$

Trekant AMC er derfor retvinklet, og Pythagoras giver at $s = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, og $|AB| = \sqrt{2}s = \sqrt{10}$.

Opgave 7.4 Tegn en linje parallel med linjen BE fra punktet D, og kald skæringspunktet med siden AC for G.

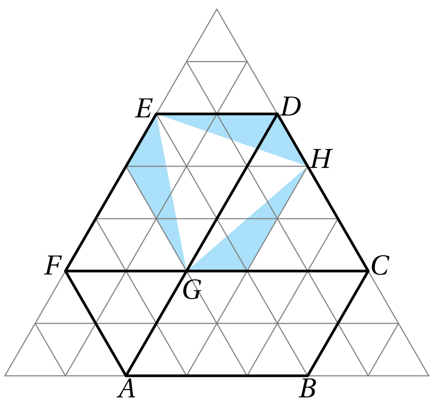


Trekanterne AFE og ADG er ensvinklede med forholdet $\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{3}{4}$ da $\frac{|AF|}{|FD|} = 3$. Altså er $\frac{|DG|}{|FE|} = \frac{4}{3}$. Desuden er $\frac{|FE|}{|BE|} = \frac{3}{8}$ da $\frac{|BF|}{|FE|} = \frac{5}{3}$.
Trekanterne DCG og BCE er pr. konstruktion ensvinklede med forholdet

$$\frac{|DG|}{|BE|} = \frac{|DG|}{|FE|} \cdot \frac{|FE|}{|BE|} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

og dermed er D midtpunktet af siden BC. Altså er vinkelhalveringslinjen fra A også median i trekanten, og når vinkelhalveringslinjen og medianen fra A er sammenfaldende, er det kendt at trekanten er ligebenet med A som toppunkt, dvs. $|AB| = |AC|$.

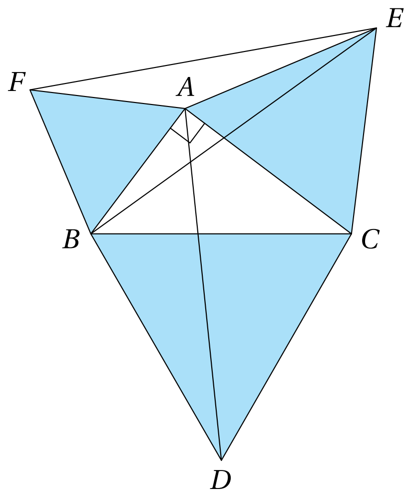
Opgave 7.5 Figuren viser et gitter af ligesidede trekanter med sidelængde 1.



Vinklerne i den indtegnede sekskant $ABCDEF$ er alle 120°, og sidelængderne er $|AB| = |CD| = |EF| = 3$ og $|BC| = |DE| = |FA| = 2$, dvs. at det netop er opgavens sekskant vi har tegnet.

Diagonalerne AD og CF samt punkterne G og H er indtegnet. På figuren er yderligere indtegnet tre blå trekanter som er kongruente fordi de alle tre har to sider af længde 1 og 2 med en vinkel på 120° mellem sig. De tre sider i $\triangle EGH$ er ensliggende sider i de blå trekanter, dvs. alle tre sider i $\triangle EGH$ er lige lange.

Opgave 7.6 Bemærk først at $\angle EAB = 90° + 60° = 150°$ og dermed (se på vinklerne omkring A) $\angle EAF = 360° - 60° - 150° = 150°$. Bemærk også at $|AF| = |AB|$. Ved en spejling om EA føres $\triangle EAF$ derfor over i $\triangle EAB$, og dermed er $|EF| = |EB|$.

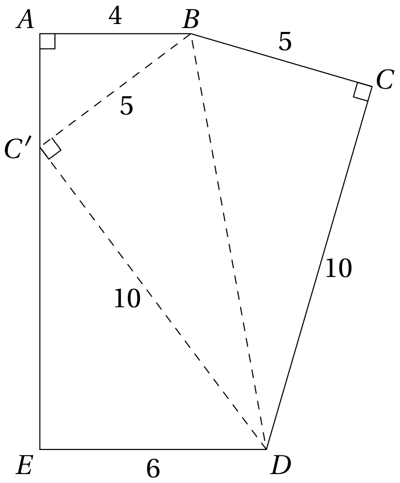


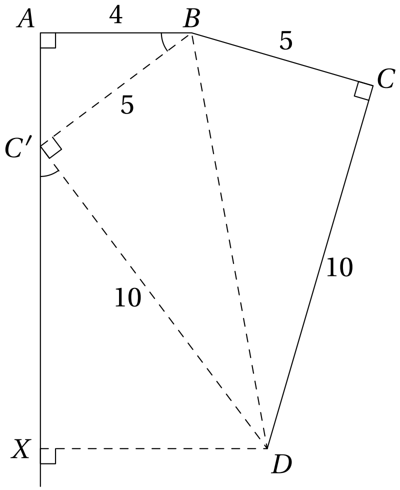
Ved en drejning om C på 60° i positiv omløbsretning føres CE over i CA, og CB føres over i CD. Trekant ECB føres derfor over i $\triangle ACD$, og dermed er $|EB| = |AD|$. Alt i alt fås $|AD| = |EF|$ som ønsket.

Opgave 7.7 Ifølge Pythagoras' sætning er

$$|AC'| = \sqrt{|BC'|^2 - |AB|^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Bemærk nu at vinkel $\angle ABC' = 90° - \angle BC'A = \angle DC'E$. Hvis vi tegner en linje fra D vinkelret på AE får vi derfor endnu en retvinklet $\triangle XC'D$, og den må være ensvinklet med $\triangle ABC'$.





Forholdet mellem ensliggende sider i de to trekanter er forholdet mellem deres hypotenuser, dvs. $\frac{10}{5} = 2$. Dermed er $|XD| = 2 \cdot |AC'| = 2 \cdot 3 = 6$. Dette viser at den korteste afstand fra D til linjen AE er 6, og da vi ved at $|DE| = 6$, må $E = X$, dvs. vinkel E er ret.