

Den 36. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 4. april 2022

Norsk versjon (nynorsk)

*Oppgåvene skal løysast på 4 timar. Du får opptil 7 poeng på kvar oppgåve.
Skrive- og teiknereiskap er einaste tillatne hjelpemiddel.*

Oppgåve 1

Finn alle funksjonar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som er slik at

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x) \quad \text{og} \quad f(f(x)) = 1 - f(x),$$

for alle reelle x .

Oppgåve 2

I Eventyrland er byane forbundne av vegar, og kvar gong det finst ein direkteforbindelse mellom to byar, finst det òg ei rute mellom desse to byane som ikkje bruker direkteforbindelsen. Hjerterdama beordra Sparkorta til å lage ei liste over alle jamne delsystem av vegnettet, dvs. system som består av ei delmengd av mengda av vegar, der kvar by er forbunden med eit partals tal vegar (kan hende ingen). For kvart jamnt delsystem skulle dei i tillegg liste opp alle dets vegar. Dersom det i alt er n vegar i Eventyrland og x jamne delsystem på Sparkorta si liste, kva er det totale talet vegar på lista, dersom kvar veg tel så mange gongar som han er lista opp?

Oppgåve 3

Anton og Britta spelar eit spel med mengda $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ der $n \geq 5$ er eit oddetal. I kvar runde fjernar Anton eit tal frå M og plasserer det i si eiga mengd A , og deretter fjernar Britta eitt tal frå M og plasserer det i si mengd B (både A og B er tomme mengder i starten). Når mengda M er tom, vel Anton to forskjellige tal x_1, x_2 frå A og viser dei til Britta. Deretter vel Britta to forskjellige tal y_1, y_2 frå B . Britta vinn dersom

$$(x_1 x_2 (x_1 - y_1)(x_2 - y_2))^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{n},$$

ellers vinn Anton. Finn alle n som er slik at Britta har ein vinnande strategi.

Oppgåve 4

La ABC vere ein spissvinkla trekant med omsirkel k og omsenter O . Ei linje gjennom O skjer sidene AB og AC i D respektive E . La B' og C' vere spegelfiletet av B respektive C om punktet O . Vis at omsirklane til ODC' og OEB' har eit felles punkt på k .