Den 36. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 4. april 2022

Norsk versjon (bokmål)

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 7 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1

Finn alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x) \qquad \text{og} \qquad f(f(x)) = 1 - f(x),$$

for alle reelle x.

Oppgave 2

I Eventyrland er byene forbundet av veier, og hver gang det finnes en direkteforbindelse mellom to byer, finnes det også en rute mellom disse to byene som ikke bruker direkteforbindelsen. Hjerterdamen beordret Sparkortene til å lage en liste over alle jevne delsystemer av veinettet, dvs. systemer som består av en delmengde av mengden av veier, der hver by er forbundet med et partalls antall veier (muligens ingen). For hvert jevnt delsystem skulle de i tillegg liste opp alle dets veier. Dersom det i alt er n veier i Eventyrland og x jevne delsystemer på Sparkortenes liste, hva er det totale antallet veier på listen, dersom hver vei telles så mange ganger som den er listet opp?

Oppgave 3

Anton og Britta spiller et spill med mengden $M = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ der $n \geq 5$ er et oddetall. I hver runde fjerner Anton ett tall fra M og plasserer det i sin egen mengde A, og deretter fjerner Britta et tall fra M og plasserer det i sin mengde B (både A og B er tomme mengder i starten). Når mengden M er tom, velger Anton to forskjellige tall x_1, x_2 fra A og viser dem til Britta. Deretter velger Britta to forskjellige tall y_1, y_2 fra B. Britta vinner dersom

$$(x_1 x_2 (x_1 - y_1)(x_2 - y_2))^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \mod n,$$

ellers vinner Anton. Finn alle n som er slik at Britta har en vinnende strategi.

Oppgave 4

La ABC være en spissvinklet trekant med omsirkel k og omsenter O. En linje gjennom O skjærer sidene AB og AC i henholdsvis D og E. La B' og C' være speilbildet av henholdsvis B og C om punktet O. Vis at omsirklene til ODC' og OEB' har et felles punkt på k.