Den 35. nordiske matematikkonkurransen

Fredag 16. april 2021

Tillaten tid: 4 timar. Kvar oppgåve er verdt 7 poeng.
Berre skrive- og teiknereiskap er tillatne.

Oppgåve 1. På ei tavle er det skrive eit endeleg tal på positive heiltal større enn éin. Kvart minutt skriv Nordi i tillegg på tavla det minste positive heiltalet som er større enn alle andre heiltal på tavla, og som ikkje er deleleg med noko anna tal på tavla.

Vis at etter ei viss tid skriv Nordi berre primtal på tavla.

Oppgåve 2. Finn alle funksjonar $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at for alle $x \in \mathbb{R}$ er

$$f\big(x(1+|x|)\big) \leq x \leq f(x)\big(1+|f(x)|\big).$$

Oppgåve 3. La n vere eit positivt heiltal. Alice og Bob speler eit spel. Først vel Alice $n+1$ delmengder $A_1, \ldots, A_{n+1}$ av $\{1, \ldots, 2^n\}$, kvar av dei av storleik 2^{n-1}. Deretter vel Bob $n+1$ vilkårlege heiltal $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Til slutt vel Alice eit heiltal t. Bob vinn dersom det finst eit heiltal $1 \leq i \leq n+1$ og $s \in A_i$ slik at $s + a_i \equiv t \pmod{2^n}$. I motsett fall vinn Alice.

Finn alle verdiar av n slik at Alice har ein vinnande strategi.

Oppgåve 4. La A, B, C og D vere punkt på sirkelen ω slik at $ABCD$ er ein konveks firkant. Anta at AB og CD skjer kvarandre i eit punkt E slik at A ligg mellom B og E, og at BD og AC skjer kvarandre i eit punkt F. La $X \neq D$ vere det punktet på ω som er slik at DX og EF er parallelle. La Y vere spegelbiletet av D om EF, og anta Y ligger innanfor sirkelen ω.

Vis at A, X og Y ligg på linje.