Version: Svenska

Den 34e Nordiska matematiktävlingen

Måndagen, den 30 mars, 2020

1. För varje positivt heltal n, beteckna med $g(n)$ antalet strängt växande tripplar av element från mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bestäm det minsta positiva heltalet n sådant att följande gäller: Talet $g(n)$ kan skrivas som produkt av tre olika primtal, som är (inte nödvändigtvis på varandra följande) element i en aritmetisk följd med differens 336.

2. Georg har $2n + 1$ kort med ett tal skrivet på varje kort. På ett av korten står heltalet 0, och på resten av korten står heltalen $k = 1, \ldots, n$, vart och ett av dem två gånger. Georg vill lägga korten i en rad så att 0-kortet är i mitten, och för varje $k = 1, \ldots, n$, befinner sig de två korten med talet k på avstånd k från varandra (det vill säga det finns exakt $k - 1$ kort mellan dem).

För vilka $1 \leq n \leq 10$ är detta möjligt?

3. Var och en av sidorna AB och CD i en konvex fyrhörning $ABCD$ är delad i tre lika delar, $|AE| = |EF| = |FB|$, $|DP| = |PQ| = |QC|$. Diagonalerna i $AEPD$ och $FBCQ$ skär varandra i M och N, respektive. Visa att summan av areorna av $\triangle AMD$ och $\triangle BNC$ är lika med summan av areorna av $\triangle EPM$ och $\triangle FNQ$.

4. Bestäm alla funktioner $f \colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f(x) f\left(f\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right) = f\left(\frac{x+y}{xy+1}\right)$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}$ som uppfyller $(x + 1)(y + 1)(xy + 1) \neq 0$.

Skrivtid 4 timmar.
Varje problem är värt 7 poäng.
Endast skriv- och ritdon är tillåtna.