Version: Norwegian (bokmål)

Den 34. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 30. mars 2020

1. Gitt et positivt heltall n, betegner $g(n)$ antallet strengt økende tripler fra mengden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Finn det minste positive heltallet n for hvilket følgende holder: tallet $g(n)$ kan skrives som produktet av tre forskjellige primtall som alle tilhører en aritmetisk følge med differanse 336, men ikke nødvendigvis rett etter hverandre i følgen.

2. Nils har $2n+1$ kort, med ett tall skrevet på hvert av dem. På ett av dem står tallet 0, mens heltallene $k = 1, \ldots, n$ er å finne på to kort hver. Nils ønsker å plassere kortene på rad slik at 0-kortet står i midten, og for enhver $k = 1, \ldots, n$ ligger de to kortene med tallet k på dem i en avstand av k (dette betyr at det ligger nøyaktig $k-1$ kort mellom dem).

For hvilke $1 \leq n \leq 10$ er dette mulig?

3. Begge sidene AB og CD i den konvekse firkanten $ABCD$ deles opp i tre like deler $AE = EF = FB$, $DP = PQ = QC$. Diagonalene til henholdsvis $AEPD$ og $FBCQ$ skjærer hverandre i M og N. Vis at summen av arealene til $\triangle AMD$ og $\triangle BNC$ er lik summen av arealene til $\triangle EPM$ og $\triangle FNQ$.

4. Bestem alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ slik at

$$f(x)f\left(f\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right) = f\left(\frac{x+y}{xy+1}\right)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$ for hvilke $(x+1)(y+1)(xy+1) \neq 0$.

Tid til disposisjon: 4 timer.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.