# 34. Norræna stærðfræðikeppnin

## 30. mars, 2020

**1.** Fyrir jákvæða heiltölu $n$ táknum við, með $g(n)$, fjölda strangt vaxandi þrennda úr menginu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Finnið minnstu jákvæðu heiltöluna $n$ þannig að eftirfarandi gildi:

Töluna $g(n)$ má rita sem margfeldi þriggja mismunandi frumtalna sem eru stök (ekki nauðsynlega samliggjandi) úr jafnmunarunu sem hefur mismuninn 336.

**2.** Georg á $2n + 1$ spil með eina tölu skrifaða á hvert spil. Á eitt spilið er talan 0 skrifuð og á hinum spilunum eru heiltölurnar $k = 1, \ldots, n$ skrifaðar þannig að hver tala kemur fyrir tvisvar. Georg vill raða spilunum í röð þannig að spilið með 0 sé í miðjunni og fyrir sérhverja tölu $k = 1, \ldots, n$ séu spilin tvö, sem á er skrifað $k$, í fjarlægðinni $k$ hvort frá öðru (sem þýðir að það eru nákvæmlega $k - 1$ spil á milli þeirra).

Fyrir hvaða $1 \leq n \leq 10$ er þetta mögulegt?

**3.** Báðum hliðunum $AB$ og $CD$, í úthyrndum ferhyrningi $ABCD$, er skipt í þrjá jafnstóra hluta, $|AE| = |EF| = |FB|$, $|DP| = |PQ| = |QC|$. Hornalínur $AEPD$ skerast í $M$ og hornalínur $FBCQ$ skerast í $N$. Sýnið að samanlagt flatarmál $\triangle AMD$ og $\triangle BNC$ er jafnt samanlögðu flatarmáli $\triangle EPM$ og $\triangle FNQ$.

**4.** Finnið öll föll $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ þannig að

$$f(x)f\left(f\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right) = f\left(\frac{x+y}{xy+1}\right)$$

gildi fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$ sem uppfylla $(x+1)(y+1)(xy+1) \neq 0$.

*Tími til ráðstöfunar er 4 klukkustundir.*
*Hvert dæmi er 7 stiga virði.*
*Einu leyfilegu hjálpartækin eru teikniáhöld og skriffæri.*